

数理逻辑入门

李锡胤◆编

数理逻辑入门

李锡胤◆编

图书在版编目(CIP)数据

数理逻辑入门 / 李锡胤编. -- 哈尔滨 : 黑龙江大学出版社, 2013. 11

ISBN 978 - 7 - 81129 - 604 - 4

I. ①数… II. ①李… III. ①数理逻辑 - 基本知识
IV. ①O141

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 094663 号

数理逻辑入门

SHULI LUOJI RUMEN

李锡胤 编

责任编辑	李 丽 肖嘉慧
出版发行	黑龙江大学出版社
地 址	哈尔滨市南岗区学府路 74 号
印 刷	哈尔滨市石桥印务有限公司
开 本	720 × 1000 1/16
印 张	8.5
字 数	127 千
版 次	2013 年 11 月第 1 版
印 次	2013 年 11 月第 1 次印刷
书 号	ISBN 978 - 7 - 81129 - 604 - 4
定 价	18.00 元

本书如有印装错误请与本社联系更换。

版权所有 侵权必究

目 录

1 命题逻辑	1
1.1 逻辑研究什么	3
1.2 逻辑与自然语言	4
1.3 命题	5
1.4 联结符号	6
1.5 命题符号	11
1.6 真值表	12
1.7 永真命题和永假命题	13
1.8 演绎推理	16
1.9 命题推演:自然演绎法	18
1.10 基本加行规则	21
1.11 直接证明法	24
1.12 间接证明法	27
1.13 非蕴涵式的证明法	28
1.14 命题逻辑的定理和派生规则	29
1.15 命题逻辑的公理系统	50
1.16 公理系统的方法论	53
1.17 公理系统的无矛盾性	57
1.18 公理系统的独立性	59
1.19 模型,解释	63

2 谓词逻辑	65
2.1 谓词逻辑与命题逻辑	67
2.2 量词,辖域	70
2.3 一阶谓词逻辑的基本规则	72
2.4 一阶谓词逻辑的定理和派生规则	76
2.5 一阶谓词逻辑的公理系统	87
附录	95
习题及答案	113

1

命题逻辑

1.1 逻辑研究什么

人们知识的获得和加深不外通过以下几种途径：

- (1) 观察和实验。
- (2) 利用看书或听讲等方式学习别人的经验。
- (3) 在原有知识的基础上进行推理,得出新知识。

逻辑学研究第三种途径如何正确实现。也就是说,如何在原有正确知识的基础上,通过正确的推理,得出正确的新知识? 在逻辑学中,原有知识叫作**前提**,由它推演出来的新知识叫作**结论**。

无论是观察和实验,还是看书和听讲,它们首先注意的都是事实的内容。例如,我们用石墨电极来电解食盐溶液,在负极处可形成氢气,在正极处可形成氧气。在日常直觉推理的时候,我们也多注意在什么前提下得出什么结论,例如看见乌云就断定要下雨。而逻辑学却把这些内容都推给了各门具体科学(如化学、气象学等)去研究;它不研究前提和结论的内容本身,而是研究从前提到结论的**推理形式**(也称**推理规则**)。

有名的三段论就是一种推理形式,这种推理形式远在古希腊哲学家亚里士多德的著作中就有了系统的阐述。但是,现代逻辑只是到了 19 世纪末和 20 世纪初,经过弗雷格、希尔伯特、罗素等人的努力后,才得以创立。

现代逻辑广泛地采用数学方法来研究推理形式,而且其研究成果又广泛地被应用于数学领域,因此又叫作**数理逻辑**。

1.2 逻辑与自然语言

推理过程是一种思维活动。人类的思维活动主要是和自然语言密切地联系在一起。然而,自然语言却往往不够明确,主要表现在以下几个方面。

(1) 一词多义(这里只研究具有**联结**作用的词的多义现象,而不考虑表示个体的词的多义现象)

玫瑰**是**红色的。(属性)

上海市**是**比哈尔滨市大。(比较)

史记的作者**是**历史学家。(归类)

史记的作者**是**司马迁。(同一)

(2) 被联结的方面往往不够清楚

我和三个哥哥打桥牌。(我|和…^①打桥牌|三个哥哥)

我和三个哥哥下象棋。(我|和…下象棋|大哥;我|和…下象棋|二哥;我|和…下象棋|三哥)

沈阳在天津和哈尔滨之间。(沈阳|在…和…之间|天津,哈尔滨)

天津在沈阳和哈尔滨之南。(天津|在…之南|沈阳;天津|在…之南|哈尔滨)

(3) 数个命题复合成一个命题

张三不听母亲的话。(张三|不听…的话;…|是张三的母亲)

与自然语言相对,形式化的逻辑表达要求**明显**和**精确**。所谓“明

^① 本书为行文简便,以…代表省略号(……)。

显”，就是不容许把逻辑关系隐蔽起来；所谓“精确”，就是不容许含糊其词、模棱两可。

1.3 命题

思维活动的基本单位是和语言中**句子**相当的一个“思想”，例如：

(1)是,今天是个好天气。

(2)啊! 多好的天气!

(3)喂,外边冷吗?

逻辑所注意的只是与(1)类句子(语法上叫作陈述句)相应的“思想”，并且把它们叫作**命题**，用 $p, q, r, s \cdots$ 表示。

句子和命题相应，但不完全相同，试看表1-1。

表1-1 句子和命题的性质、构成、范围对应表

	句 子	命 题
性 质	语言结构单位	思维结构单位
构 成	主语、谓语、宾语、定语…	个体词、谓词
范 围	(1)、(2)、(3)类句子	与(1)类句子相应

还有一个最重要的区别是：句子报道事实内容；而命题不注重事实内容，它只具有**真或假**两种意义。研究这类命题的逻辑也叫**二值逻辑**（多值逻辑不在本书讨论的范围之内）。

命题逻辑不分析简单命题的结构，它只讨论：

(1)如何把几个简单命题联结成复合命题？

(2)如何从一个命题推演出另一个命题而真假值不变？如此等等。

1.4 联结符号

语言的基本句子是单句,两个或更多的单句可以用连接词连接起来,成为复句。逻辑的单命题由一个或几个名词和一个谓词构成,两个或更多的单命题可以用联结号连接起来,成为复合命题。

语言的连接词有:“…和…”^①;“…或(者)…”;“如果…,则…”;“虽然…,但是…”;“当…的时候,…”;“在…场合下,…”;“因为…,所以…”;等等。

逻辑的联结号却大有限制。正如上面说过的那样,逻辑命题只能,也必须在真、假两值中取一值。单命题如此,复合命题也如此。单命题的**值**(也叫**真值**;即或为真,或为假)可以是任意赋予的。复合命题的值完全取决于各单命题的值以及各单命题之间的联结号的意义。也就是说,复合命题的值是处于联结号空位上的各单命题的值的**函项**。正因为如此,逻辑联结号必须保证由它联结而成的复合命题的真值完全取决于它所连接的几个单命题的真值。这种联结号也叫**真值联结号**。

逻辑中基本的真值联结号有以下 5 个。

(1) $\vee$ ——析取号

它的意义是:如果 p 为真,或者 q 为真,或者 p 和 q 都为真,则复合命题 $p \vee q$ 为真;如果 p 和 q 都为假,则复合命题 $p \vee q$ 为假。

可以用图 1-1 表示如下(这种图叫作维因图)。

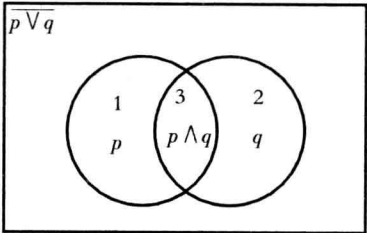


图 1-1 命题 $p, q, p \vee q$ 的真假值

^① 本书为行文简便,以…代表省略号(……)。

这连环形所包含的区域就是 $p \vee q$, 其中区域 1 表示 p 为真, 区域 2 表示 q 为真, 区域 3 表示 p 与 q 都为真; 而连环形外边的区域就是 $\overline{p \vee q}$, 即, 既非 p 且非 q 。

(2) $\wedge$ ——合取号

它的意义是: 如果 p 和 q 都为真, 则复合命题 $p \wedge q$ 为真; 如果 p 为假, 或者 q 为假, 或者 p 和 q 都假, 则复合命题 $p \wedge q$ 为假。

用图 1-2 表示如下。

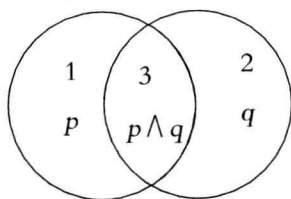


图 1-2 命题 $p, q, p \wedge q$ 的真假值

中间区域 3 就表示 $p \wedge q$ 。

(3) $\rightarrow$ ——蕴涵号

它的意义是: 如果 p 和 q 都真, 或者 p 和 q 都假, 或者 p 为假而 q 为真, 则复合命题 $p \rightarrow q$ 为真。如果 p 真而 q 假, 则复合命题 $p \rightarrow q$ 为假。

用图 1-3 表示如下。

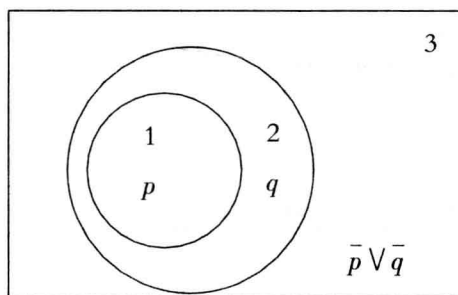


图 1-3 $p, q, p \rightarrow q$ 的真假值

这里区域 1 代表 p 真, q 亦真; 区域 2 代表 q 真 p 假; 区域 3 代表 p 假 q 亦假。从图可看出: 如果 p 真, 则 q 一定亦真(区域 1); 如果 p 假, 则 q 可以真(区域 2), 也可以假(区域 3)。另一方面, 如果 q 真, 则 p 可以真(区域 1), 也可以假(区域 2); 如果 q 假, 则 p 一定假(区域 3)。

(4) $\longleftrightarrow$ 等值号

它的意义是: 如果 p 和 q 都真, 或者 p 和 q 都假, 则复合命题 $p \longleftrightarrow q$ 为真; 如果 p 真而 q 假, 或者 q 真而 p 假, 则 $p \longleftrightarrow q$ 为假。

用图 1-4 表示如下。

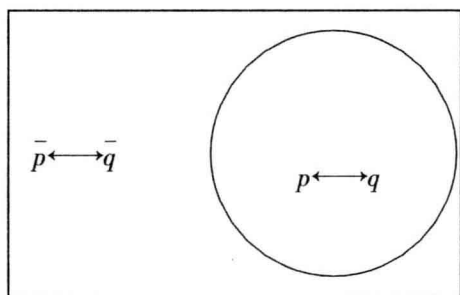


图 1-4 命题 $p, q, p \longleftrightarrow q$ 的真假值

这里要注意等值号($\longleftrightarrow$)与一般等号($=$)之间的区别。一般的等号表示左件与右件实质上相同, 而等值号表示左件与右件的真假值相等。

例如: $2 \times 2 = 4$

表示左件和右件实质上是同一个数。

① 茅盾 = 《子夜》的作者

表示左件和右件实质上是同一个人。

但是:

②我起床 $\xrightarrow{\text{(则)}}$ 时间是早上六点钟

早上六点钟 $\xrightarrow{\text{(则)}}$ 我起床

我起床 $\xleftrightarrow{\text{(当且仅当)}}$ 时间是早上六点钟

可以明显看出:结论中的“当且仅当”($\leftrightarrow$)表示左件和右件互为充要条件,而并不是说两者实质上相等同。

用等值号来表示上述例子①,就是:

x 是茅盾 $\leftrightarrow x$ 是《子夜》的作者

左件和右件或者同为真,或者同为假。某人不可能同时是茅盾而不是《子夜》的作者,也不可能相反。

(5) $\bar{}$ ——否定号

它与其他联结号的不同之处在于它的作用不是把两个命题连接成一个复合命题。它与其他联结号的相同之处在于它加到某命题(单命题或复合命题)之上便可以得出一个新命题。它的意义是: $\bar{p}$ 为真,则 p 为假; p 为真,则 $\bar{p}$ 为假。

用图 1-5 表示如下。

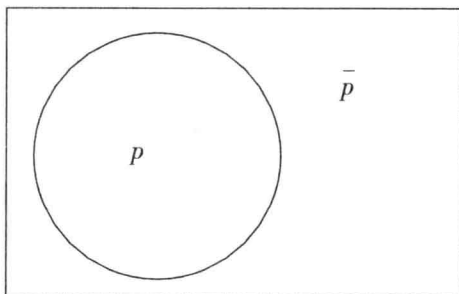


图 1-5 命题 p 与 $\bar{p}$ 的真假值

p 和 $\bar{p}$ 没有共同的区域,它们不可能同时共真或共假。

以上列举的 5 种逻辑联结号,它们的联结能力强弱不一样。正如数学运算时,我们遵守先乘除后加减的次序。在逻辑命题中如果 5 个联结号同时出现,我们先取否定号的值,然后取合取号的值,然后取析取号的值,然后取蕴涵号的值,最后取等值号的值。如果复合命题中出现括号,则先取括号内复合命题的值,解括号的次序也和数学中一样,先内后外。

这 5 种联结号(否定号的情况除外),彼此之间可以互相定义,例如:

$$p \vee q \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\overline{p} \wedge \overline{q}}$$

$$p \wedge q \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\overline{p} \vee \overline{q}}$$

$$p \rightarrow q \stackrel{\text{def}}{=} \overline{p} \vee q$$

$$p \longleftrightarrow q \stackrel{\text{def}}{=} (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

$$\overline{\overline{p}} \stackrel{\text{def}}{=} p$$

这里 $\stackrel{\text{def}}{=}$ 表示“根据定义相等于…”之意。

因此,严格说来,逻辑推演中不必运用 5 种联结号。一般认为只要有否定号和蕴涵号两者,便足能推演出各种命题的关系。例如:

$$p \vee q \quad \text{可改写为} \quad \overline{\overline{p} \rightarrow q} \text{ 或 } \overline{q \rightarrow \overline{p}}$$

$$p \wedge q \quad \text{可改写为} \quad \overline{p \rightarrow \overline{q} \text{ 或 } q \rightarrow \overline{p}}$$

$$p \longleftrightarrow q \quad \text{可改写为} \quad \overline{(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)} \text{ 或 } \overline{(q \rightarrow p) \rightarrow (p \rightarrow q)}$$

但为方便起见,本书中 5 个联结号都用,其中 $\vee$, $\wedge$ 和 $\longleftrightarrow$ 实际上是作为简略号出现的。

必须注意,逻辑符号具有两类意义:一类是**结构意义**,是由逻辑系统所决定的;另一类是**语义意义**,是逻辑系统投射于某个客体域之上而赋予的,也就是说:是逻辑系统经过**解释**而取得的。前面讲的 5 种联结号的意义,都是它们的结构意义。

从前面的叙述不难看出:逻辑联结号的意义与语言中连接词的意义不完全相同。前者决定于逻辑系统,后者决定于语言系统。所以虽然习

惯上把“ $\vee$ ”译作“或”；“ $\wedge$ ”译作“且”；“ $\rightarrow$ ”译作“如果…，则…”；“ $\neg$ ”译作“非”。并且这译法也是有道理的，但我们应尽量避免语言学名称和逻辑名称的混乱，使读者习惯于从联结号的结构功能去把握它们的(结构)意义。

这些联结号在数理逻辑文献中各家的写法很不一致，表1-2做一对照，以便读者阅读资料时触类旁通。

表 1-2 联结号在数理逻辑文献中的不同写法

联结号	希尔伯特	罗素	波兰文献	其 他
析取号	$p \vee q$	$p \vee q$	A_{pq}	$p \cup q$
合取号	$p \& q$	$p \cdot q$	K_{pq}	$p \wedge q, p \cap q$
蕴涵号	$p \rightarrow q$	$p \supset q$	C_{pq}	$p \rightarrow q$
等值号	$p \sim q$	$p = q$	E_{pq}	$p \longleftrightarrow q$
否定号	$\bar{p}$	$\sim p$	N_p	$\neg p$

1.5 命题符号

说明了联结号的(结构)意义之后，我们再来讨论命题符号。我们用 $p, q, r, s \cdots$ 代表任何一个命题。二值逻辑中，它们只能取真值或者假值，这也是命题符号的结构意义。至于它们的语义意义，要等经过解释之后才能确定。

在逻辑表达式中，出现在不同位置上的相同字母代表同一个命题(实际上就是代表相同的真假值)；而不相同的字母可以代表不同的命题，也可以代表相同命题在不同位置上的复现(实际上就是说：不同的字母可以代表互不相同的真假值，也可以代表相同的真假值)。带否定号的字母 $\bar{p}$ ，则只能代表与 p 相区别的命题，绝不能代表命题 p (实际上， $\bar{p}$ 的取值必须与 p 的取值相反)。

字母 $p, q, r, s \cdots$ 可以代表单命题，也可代表复合命题。假如我们令 p

和 q 代表单命题, 则 $p \vee q, p \wedge q, p \rightarrow q, p \leftrightarrow q$ 等命题都是复合命题。再设 r 和 s 代表复合命题, 则 $r \vee s, r \wedge s$ 等命题又是复合命题。如此类推开去, 可以产生无限多的复合命题。而这无限多的复合命题都只能取值为真或为假, 而且高一级的复合命题的取值完全决定于低一级复合命题的取值, 最后决定于单命题的取值。

1.6 真值表

如果有一个复合命题 $p \vee q$ 是由两个不同的单命题 p 和 q 构成的, 那么这个复合命题的取值完全取决于 p 的取值和 q 的取值。我们知道, 在二值逻辑中, p 可真可假, q 也可真可假, 因此 p 和 q 联结在一起, 共有 4 种取值可能, 为:

- (1) p 真, q 真。
- (2) p 真, q 假。
- (3) p 假, q 真。
- (4) p 假, q 假。

而且, 根据组合理论, 2 个二值元素就有 $2^2 = 4$ 种组合可能, 3 个二值元素就有 $2^3 = 8$ 种组合可能。所以, n 个二值元素就有 2^n 种组合可能。

现在我们根据上述 4 种可能, 可以分别得出 $p \vee q$ 的 4 种值, 为:

- ① $1 \vee 1$ 得值 1。
- ② $1 \vee 0$ 得值 1。
- ③ $0 \vee 1$ 得值 1。
- ④ $0 \vee 0$ 得值 0。

这里 1 代表取值为真, 0 代表取值为假。

通过其他联结号构成的复合命题, 也可以用同样的方法求出全部的取值可能。下面我们把 5 种联结号的情况列成总表(如表 1-3 所示),