

NEW

SHORTCUT WAY

新捷径

总主编

江苏省数学学会理事
江苏省教育厅教研室数学教研员、高级教师

万庆炎

主 编

南京市中学数学教学研究会理事
南京市玄武区教研室主任、高级教师

荆福仁



初中数学

三年级分册

东北师范大学出版社



NEW SHORTCUT WAY

新捷径 初中数学

三年級分冊

[总主编] 江苏省数学学会理事 万庆炎
江苏省教育厅教研室数学教研员、高级教师

[主 编] 南京市中学数学教学研究会理事 荆福仁
南京市玄武区教研室主任、高级教师

[主 审] 国家基础教育实验中心主 史宁中
东北师范大学校长、博士生导师

东北师范大学出版社

长 春

图书在版编目(CIP)数据

新捷径·初中数学·三年级分册/万庆炎总主编;荆福仁主编. —长春:东北师范大学出版社,2001.7
ISBN 7-5602-2725-2

I. 新… II. ①万…②荆… III. 数学课—初中—
教学参考资料 IV.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 07384 号

☐ 出 版 人: 贾国祥

☐ 策划创意: 贾国祥 ☐ 制作统筹: 唐峻山

☐ 责任编辑: 杨述春 ☐ 责任校对: 张中敏

☐ 封面设计: 魏国强 ☐ 责任印制: 张允豪

☐ 电脑制图: 乔彦勇 ☐ 电脑制作: 刘丽颖

东北师范大学出版社出版发行

长春市人民大街138号 邮政编码: 130024

电话: 0431—5695744 5688470 传真: 0431—5695734

网址: WWW.NNUP.COM 电子函件: SDCBS@MAIL.JL.CN

广告许可证: 吉工商广字2200004001001号

东北师范大学出版社激光照排中心制版

长春新华印刷厂印刷

长春市吉林大路35号 邮政编码: 130031

2001年6月第1版 2001年6月第1次印刷

开本: 890×1240 1/32 印张: 6.5 字数: 238千

印数: 00 001 - 50 000 册

定价: 16.50元

如发现印装质量问题, 影响阅读, 可直接与承印厂联系调换

总有一种捷径

让我们梦寐以求

■ 选择《新捷径》的五种理由

首先感谢您选择了《新捷径》丛书！作为一套面向二十一世纪的教辅图书，《新捷径》丛书从灵活实用而富有创意的内容体例到淡雅清丽而极具神韵的视觉形式，都凝聚着《新捷径》丛书所有编创人员对学习方式和方法所进行的有益尝试和极有价值的总结。相信自己的眼光和感觉，因为对于学习而言，总有一种捷径让我们梦寐以求……

1. 权威编写专家审订

《新捷径》丛书所有参与撰稿的作者均为长期工作在一线教学岗位的资深教师。为保证丛书的高起点和高品质，又特别聘请了相应学科的著名专家对丛书内容进行了全面审订。权威编写，专家审订，品质自然与众不同。

2. 以学生的眼光梳理知识

教材是以一种知识的逻辑讲解着你应该掌握的知识。而《新捷径》丛书则着力于从学生的能够理解和掌握的角度，来建立自己的讲解逻辑。这样做的好处在于能够针对大多数学生的学习状态，弥补教材的不足，从而使得知识的理解更便利。

3. 学习的诀窍灵活实用

《新捷径》丛书正文两侧所附的图表、边文辅助说明文字均来自一线教师对其多年教学经验的感受和总结，这些看上去不过是三言两语的文字，有时便是你豁然开朗的捷径。

4. 应试技能技巧全面汇总

我们无法逃避考试。所以，《新捷径》丛书更是突出面对考试的知识总结和要点归纳，并附以相应训练，以期更快地提高你的学习水平和应试能力。

5. 视野开阔全面兼容

《新捷径》丛书的编写紧紧依据教育部最新教学大纲和考试大纲的内容要求和顺序，在注重人教版九年制义务教育教材的同时，也注意到对其他教材如沪版、内地版教材内容的兼容，这极大地拓展了本书的适用地域。

NEW SHORTCUT WAY

本书 使用说明

1. 各章的最前面有图表形式的要点总整理, 易读易记.
2. 每节的内容围绕节的要点展开. 分为提高实战能力的指导、例题解法与同类题同步训练.
3. 章末附自我检测与中考试题精选两套训练题.

要点整理

教科书要点的总整理, 放在各节的前面, 对预习、复习和考试最有用.

考点指要

为轻松考试而必须记住的知识点, 考试易出现的问题提示, 得高分的关键指要.

边文解惑

为了及时解惑, 两侧配有边文, 补充正文内容. 包括详细解说、应知应会、考试注意、另解、图解及得分指要.

2 加法

考试中经常出现的 本节最重点

① 同号两数的和

同号两数的和, 取两加数绝对值的和与相同的符号

同符号(+与+, -与-) 作和的绝对值 作和的符号

$$\begin{array}{l} \text{绝对值的和} \\ (-3) + (-2) = -(3+2) = -5 \quad \ominus \text{相同的符号“-”} \end{array}$$

② 异号两数的和

异号两数的和, 取其绝对值的差与绝对值较大加数的符号

符号相反(+与-, -与+) 作和的绝对值 作和的符号

$$\begin{array}{l} \text{绝对值的差} \\ (-6) + (+4) = -(6-4) = -2 \quad \ominus -6 \text{的绝对值较大, 取“-”号.} \end{array}$$

绝对值较大加数的符号

● 运算时称为加法, 其结果称为和.

考试轻松

提高实战能力的指导

⑤ 应知应会

▶ 0 与任何数相加, 和仍是该数.

$$a+0=a$$

$$0+a=a$$

▶ 两数和为 0 时, 其绝对值相等, 符号相反.

$$(+3)+(-3)=0$$

这样的两个数叫做互为相反数.

⑥ 参考

加法交换律与加法结合律

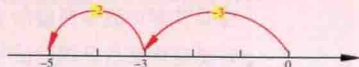
加法交换律: $a+b=b+a$, 交换两加数的顺序, 和不变.

加法结合律: $(a+b)+c=a+(b+c)$, 先加前两数或后两数, 和不变.

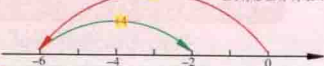
① 利用数轴理解加法的意义

① 同号两数的和 $(-3)+(-2)=-5$

▼ 自 0 起沿负方向连续取 3 个单位与 2 个单位.



② 异号两数的和 $(-6)+(+4)=-2$ ▼ 自 0 起沿负方向取 6 个单位, 再沿正方向取 4 个单位.



② 三个以上数求和时, 先按正、负数分别求和

$$\begin{array}{l} (-3) + (+6) + (-7) \\ = (+6) + (-3) + (-7) \\ = (+6) + (-10) \\ = -4 \end{array}$$

利用加法交换律

$$a+b=b+a$$

利用加法结合律

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

NEW SHORTCUT WAY

1. 本书围绕考试中易出现的种种问题编写, 应考立竿见影.
2. 能立即了解教科书的要点, 每节均有餐桌式的重点整理.
3. 例题丰富, 以基本题、提高题、发展题等类型循序渐进.
4. 解说详细、灵活、易懂, 以加深理解.
5. 解题步骤与解题思路对应, 随文解惑和提示, 有助于解题, 可迅速理解, 提高学习效率.
6. 正文与图解颜色对应, 可以快速了解关联内容.
7. 训练配合学习, 对应的测试能帮助提高实力及应试能力.

新 捷 径 初中数学(七年级下册)

考试中经常出现的 **例题和解法**

例题10 **考点** 同号两数的和

基本题

计算:

$$(1) (+5)+(+7);$$

$$(2) (-6)+(-4).$$



取绝对值的和与原来的符号.

(1) 两正数的和; (2) 两负数的和, 都是求同号两数的和.

解题步骤与思路

$$\begin{aligned} & \text{取} + \text{号} \rightarrow (1) (+5)+(+7) \xrightarrow{\text{原来的符号}} \\ & \quad \rightarrow = + (5+7) \xrightarrow{\text{绝对值的和}} \\ & \quad = +12 \xrightarrow{\text{结果取} + \text{号}} \\ & \text{取} - \text{号} \rightarrow (2) (-6)+(-4) \xrightarrow{\text{原来的符号}} \\ & \quad \rightarrow = - (6+4) \xrightarrow{\text{绝对值的和}} \\ & \quad = -10 \xrightarrow{\text{结果取} - \text{号}} \end{aligned}$$



参考

正数即小学里所学的数, 其运算 $(+5)+(+7)$ 同小学里面 $5+7$ 一样, 其结果 $+12$ 与 12 相同. 对于正数而言, “+”号可以省略.

同步训练10

计算:

$$(1) (+12)+(+9);$$

$$(2) (-8)+(-21);$$

$$(3) (+8)+(+5);$$

$$(4) (-11)+(-4).$$

例题11 **考点** 异号两数的和

基本题

计算:

$$(1) (+6)+(-11);$$

$$(2) (-10)+(+14).$$



取绝对值的差与绝对值较大加数的符号.

(1) 正数+负数, (2) 负数+正数, 都是求异号两数的和.

解题步骤与思路

$$\begin{aligned} & \text{取绝对值较大加数的符号, 且绝对值相减} \rightarrow (+6)+(-11) \xrightarrow{\text{取绝对值较大加数}(-11)\text{的符号}} \\ & \quad \rightarrow = - (11-6) \xrightarrow{\text{绝对值的差}} \\ & \quad = -5 \end{aligned}$$

考试注意

不是“绝对值的和”!

求和的绝对值时, 若是异号两数相加, 则是两加数绝对值的差!

例题和解法

将解题思路和解题步骤同解题过程分栏综合表述, 清晰指要, 例题简单明了.

同步训练

同类题的同步训练, 配在例题与解法之后, 是必须自己完成的且有助于理解例题的具有挑战力的题目, 题目少而重要.

全方位备考

章末附两种类型的套题, 自我检测重在基本内容的理解训练, 中考试题精选是综合题的训练, 最高程度的挑战.

《新捷径》丛书主审委员会

- 申士昌** [全国中小学教材审定委员会语文审查委员、北京市西城区教研中心中学教研室主任、特级教师]
- 史宁中** [国家基础教育实验中心主任、东北师范大学校长、博士生导师]
- 杨 忠** [教育部外语专业指导委员会委员、东北师范大学副校长、博士生导师]
- 赵永年** [中国物理学会光反射专业委员会副主任、吉林大学教授、博士生导师]
- 吴通好** [中国化学会理事、吉林省化学会竞赛委员会主任、吉林大学化学系主任、博士生导师]

《新捷径》丛书编撰委员会

- 丁怀正** [北京市西城区中学语文教学研究会副秘书长、北京市西城区教研中心语文教研员、高级教师]
- 万庆炎** [江苏省数学学会理事、江苏省教育厅教研室数学教研员、高级教师]
- 欧阳春** [南京市数学学会理事、南京市下关区教育局教研室主任、高级教师]
- 杨光雄** [南京市中学高级职称评审委员会学科组成员、南京市六合县教育局教研室主任、高级教师]
- 荆福仁** [南京市中学数学教学研究会理事、南京市玄武区教研室主任、高级教师]
- 张学文** [吉林省外语学会理事、长春市实验中学高级教师]
- 陈凤书** [全国初中物理竞赛优秀辅导教师、吉林省实验中学高级教师]
- 李 桢** [吉林省化学教学研究会常务理事、东北师范大学附属中学教务主任、高级教师]

本册撰稿人

荆福仁 邵星华 黄 阳 丁 孟 金 秋
荆 昊 黄天祺 金 谷 雨 水 叶 红

目 录

C O N T E N T S

第 1 章

一元二次方程

2

1 一元二次方程的有关概念	5
2 一元二次方程的解法——开平方法	7
3 一元二次方程的解法——配方法	10
4 一元二次方程的解法——公式法	13
5 一元二次方程的解法——因式分解法	17
6 一元二次方程根的判别式	21
7 一元二次方程根与系数的关系	24
8 二次三项式的因式分解	29
9 可化为一元二次方程的分式方程	32
10 一元二次方程的应用	36
11 二元二次方程组	44
自我检测	47
中考试题精选	49

第 2 章

函数及其图像

50

1 平面直角坐标系及函数的概念	53
2 一次函数的图像及其性质	58
3 二次函数 $y=ax^2$ 的图像及其性质	63
4 二次函数 $y=ax^2+b$ 和 $y=a(x+h)^2$ 的图像及其性质	65
5 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a \neq 0)$ 的图像及其性质	67
6 反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k \neq 0)$ 的图像及其性质	76
自我检测	82
中考试题精选	85

第 3 章

统计初步

86

1 平均数 总体 样本	88
2 众数 中位数	91
3 方差 标准差	94
4 频率分布	98
自我检测	102
中考试题精选	105

第 4 章

解直角三角形

106

1 锐角三角函数	108
2 解直角三角形及其应用	115
自我检测	122
中考试题精选	125

第 5 章

圆

126

1 圆的基本性质	130
2 圆周角	134
3 圆内接四边形	140
4 直线与圆的位置关系	145
5 和圆有关的比例线段	152
6 圆和圆的位置关系	158
7 正多边形与圆	169
8 圆的周长、弧长、圆、扇形、弓形的面积	172
自我检测	178
中考试题精选	181

参 考 答 案

182

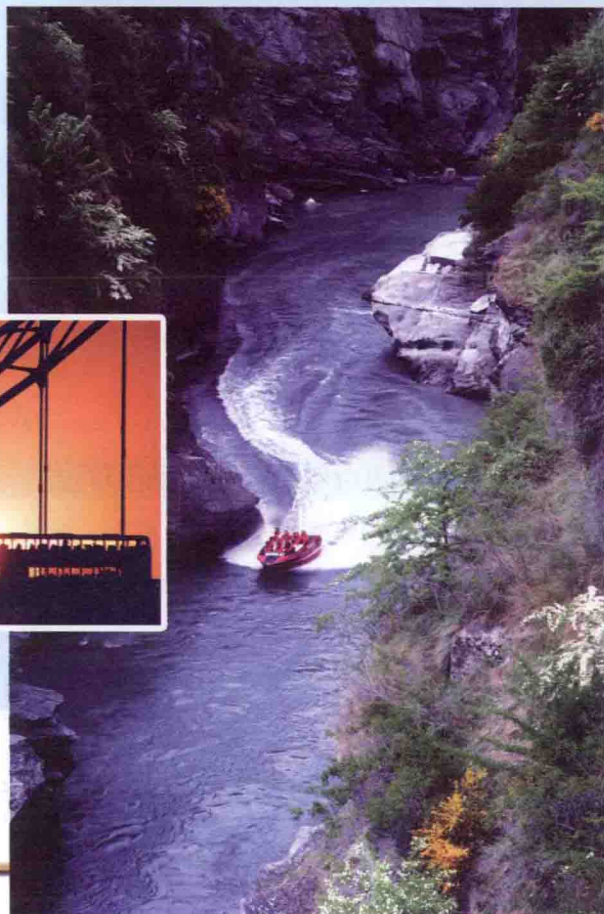
总有
一种捷径
让我们
梦寐以求

.....

New Shortcut Way

新捷径

初中数学



I LOVE THIS BOOK

第 1 章

新捷径 NEW SHORTCUT WAY

一元二次方程

1 一元二次方程的有关概念

→ 本书第 5 页

一元二次
方程的基
本概念

① 一元二次方程的定义

含有一个未知数,未知数的最高次数是 2 的整式方程,叫做一元二次方程.

② 一元二次方程的一般形式 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$),

其中 a 为二次项系数, b 为一次项系数, c 为常数项.

③ 一元二次方程的根

使一元二次方程左、右两边的值相等的未知数的值,叫做一元二次方程的根.

2 一元二次方程的解法——开平方法

→ 本书第 7 页

开平方法

① $ax^2=b$ 型

$$x^2=a (a \geq 0) \Rightarrow x = \pm \sqrt{a}.$$

例 解方程 $2x^2=3 \Rightarrow x^2=\frac{3}{2} \Rightarrow x=\pm \frac{\sqrt{6}}{2}$.

② $(x \pm a)^2=b$ 型

设 $X=x \pm a$, 则 $X^2=b$, 利用①解.

例 $(x+7)^2=5$, 设 $X=x+7$.

$$X^2=5 \Rightarrow X=\pm \sqrt{5} \Rightarrow x+7=\pm \sqrt{5} \Rightarrow x=-7 \pm \sqrt{5}.$$

3 一元二次方程的解法——配方法

→ 本书第 10 页

配方法

① $x^2+px+q=0$ 型

$$\text{直接配方 } \left(x^2 + \frac{p}{2}\right) = \frac{p^2-4q}{4} \Rightarrow \text{当 } p^2-4q \geq 0 \text{ 时, } x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2-4q}}{2}.$$

例 解方程 $x^2-6x-1=0$,

$$x^2-6x+9=1+9,$$

$$(x-3)^2=10 \quad \blacktriangle \text{用开平方法解之.}$$

② $ax^2+bx+c=0$ 型

$$ax^2+bx+c=0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$\Rightarrow \text{当 } b^2-4ac \geq 0 \text{ 时, } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$



4 一元二次方程的解法——公式法

→ 本书第 13 页

公式法

一元二次方程的求根公式 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ **例** 解方程 $2x^2 + 3x - 1 = 0$.

$$\because a=2, b=3, c=-1, b^2-4ac=3^2-4 \times 2 \times (-1)=17,$$

$$\therefore x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2 \times 2} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}.$$

5 一元二次方程的解法——因式分解法

→ 本书第 17 页

① 因式分解法

① $x^2 + px + q = 0$, 将方程左边因式分解 $x^2 + px + q = (x+m)(x+n) = 0$. 根据命题 $ab=0$, 则 $a=0$ 或 $b=0$, 将问题转化.

例 $x^2 - 5x + 6 = 0$,

左边因式分解 $(x-2)(x-3) = 0$,

得 $x-2=0$ 或 $x-3=0$, 即 $x_1=2, x_2=3$.

② 较复杂的一元二次方程的因式分解解法

② 把复杂方程整理, 化为一般式 $ax^2 + bx + c = 0$ 型, 即方程的左边为二次三项式, 右边为零. 再将方程左边因式分解.

例 解方程 $(x+2)(x+3) = -5x - 11$.

先把方程左边展开, 整理化为

$x^2 + 6x + 5 = 0$,

再用因式分解法解之.

6 一元二次方程根的判别式

→ 本书第 21 页

① 一元二次方程根的判别式

方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$,

则 $\Delta = b^2 - 4ac$ 叫做一元二次方程根的判别式.

② 一元二次方程根的判别

一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$,

当 $\Delta = b^2 - 4ac > 0 \Leftrightarrow ax^2 + bx + c = 0$ 有两个不相等的实数根;

$\Delta = b^2 - 4ac = 0 \Leftrightarrow ax^2 + bx + c = 0$ 有两个相等的实数根;

$\Delta = b^2 - 4ac < 0 \Leftrightarrow ax^2 + bx + c = 0$ 无实数根.

7 一元二次方程根与系数的关系

→ 本书第 24 页

一元二次方程根与系数关系

① 若方程 $x^2 + px + q = 0$ 有两个实数根 x_1, x_2 ,

则 $\Delta = p^2 - 4q \geq 0, x_1 + x_2 = -p, x_1 \cdot x_2 = q$.

② 若 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 有两个实数根 x_1, x_2 ,

则 $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0, x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.



8 二次三项式的因式分解

→ 本书第 29 页

二次三项式 ax^2+bx+c 求根公式分解因式法

二次三项式 ax^2+bx+c .

设 $ax^2+bx+c=0$, ①

1 当 $\Delta > 0$ 时, 方程①有两个实数根 x_1, x_2 , 则 $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

2 当 $\Delta = 0$ 时, 方程①有两个相等实数根 $x_1=x_2$, 则 $ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$.

3 当 $\Delta < 0$ 时, ax^2+bx+c 在实数范围内不能分解.

9 可化为一元二次方程的分式方程

→ 本书第 32 页

解分式方程的基本思想、基本方法

● 基本思想: 分式方程 $\xrightarrow{\text{转化}}$ 整式方程.

● 基本方法: ① 去分母——方程两边同乘以最简公分母, 约去分母.
② 换元法.

例 $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + 5\left(\frac{x}{x+1}\right) + 6 = 0$, 令 $y = \frac{x}{x+1}$, 则方程即为 $y^2 + 5y + 6 = 0$.

● 注意问题: 解分式方程可能产生增根, 必须验根.

10 一元二次方程的应用

→ 本书第 36 页

应用问题的解法

根据题意列方程 $\Rightarrow$ 解方程 $\Rightarrow$ 解的检验

- ① 数、数字问题
- ② 图形问题
- ③ 增长率问题
- ④ 行程问题
- ⑤ 工程问题



11 二元二次方程组

→ 本书第 44 页

1 二元二次方程(组)的意义

- ① 含有两个未知数, 且含有未知数的项的最高次数为 2 的整式方程, 叫做二元二次方程.
- ② 含有两个未知数, 且至少有一个方程是二次方程的整式方程组, 叫做二元二次方程组.

2 解二元二次方程组的基本思想和方法

- ① 解二元二次方程组的基本思想是消元和降次.
- ② 由一个二元一次方程和一个二元二次方程组成的二元二次方程组, 可用代入法消元来解.
- ③ 由二个二元二次方程组成的 (其中有一个方程可因式分解) 二元二次方程组, 可用因式分解的方法降次转化为第 I 型.

1

一元二次方程的有关概念

考试中经常出现的

本节最重点

1 一元二次方程的基本概念

◆ 含有一个未知数,未知数的最高次数是2的整式方程,叫做一元二次方程.

一般形式为 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$),

其中 a 为二次项系数, b 为一次项系数, c 为常数项.

2 一元二次方程的根的意义

◆ 使一元二次方程左、右两边的值相等的未知数的值,叫做一元二次方程的根.

● 一般地,一元二次方程的根有两个.

考试轻松

提高实战能力的指导

应知应会

* 一元二次方程的一般式:

$$ax^2+bx+c=0 (a \neq 0),$$

方程的左边是按 x 的降幂排列,右边是0.

* 确定一元二次方程各项的系数时,应先将方程化为 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$),并注意连同符号一起写.

* 若 α, β 是 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 的两个根,根据根的定义,可得到等式 $a\alpha^2+b\alpha+c=0$ 和 $a\beta^2+b\beta+c=0$.

1 一元二次方程的判定

先将方程化为一般式 $ax^2+bx+c=0$, 当 $a \neq 0$ 时, 方程为一元二次方程; 当 $a=0$ 时, 方程为一元一次方程.

例 (1) $18-2x=(2x-5)^2$

经整理(去括号、移项、合并), 得 $4x^2-18x+7=0$

原方程是一元二次方程.

(2) $(x+2)(x-2)=(x-2)^2$

经整理(去括号、移项、合并), 得 $4x+8=0$.

原方程不是一元二次方程.

2 一元二次方程的根的检验

将未知数的值代入方程, 能使等式成立的即是方程的根.

例 (1) 判定 $x=3$ 是否是方程 $-\frac{1}{4}x^2+2x-\frac{15}{4}=0$ 的根.

$$\begin{aligned} \text{把 } x=3 \text{ 代入方程, 左边} &= -\frac{1}{4} \times (3)^2 + 2 \times 3 - \frac{15}{4} \\ &= -\frac{9}{4} + 6 - \frac{15}{4} = 0, \text{ 左边} = \text{右边}. \end{aligned}$$

$$\therefore x=3 \text{ 是方程 } -\frac{1}{4}x^2+2x-\frac{15}{4}=0 \text{ 的根.}$$

(2) 若 $x=3$ 是方程 $(m-1)x^2+2x-5m=0$ 的一个根, 求 m 的值. 把 $x=3$ 代入方程, 得 $9(m-1)+6-5m=0$, 经整理, 得

$$4m-3=0, \therefore m=\frac{3}{4}.$$

考试中经常出现的 例题和解法

例题 1 考点 一元二次方程的概念

基本题

已知 $kx^2+k(x+k)=5+x$ 是关于 x 的一元二次方程,那么 k 的取值是 ()

- A. $k>0$ B. $k<0$ C. $k=0$ D. $k\neq 0$

点拨



将方程转化为 $ax^2+bx+c=0$ 的形式,由 $a\neq 0$ 判断 k 的取值.

解题步骤与思路

转化为 $ax^2+bx+c=0$
由 $a\neq 0$ 确定 k 的值.

$$\begin{aligned} kx^2+kx+k^2 &= 5+x, \\ kx^2+kx-x+k^2-5 &= 0, \\ kx^2+(k-1)x+k^2-5 &= 0. \end{aligned}$$

去括号
移项
合并

由一元二次方程的定义,知 $k\neq 0$,故选 D.

⊗ 考试注意

当 $k=0$ 时,即 $-x-5=0$ 为一元一次方程.

当 $k\neq 0$ 时,方程 $kx^2+(k-1)x+k^2-5=0$ 为一元二次方程.

同步训练 1

答案见本书第 182 页.

- 若方程 $mx^2-mx=n-2nx^2 (m\neq -2n)$ 是一元二次方程,括号内的条件 $m\neq -2n$ 能缺少吗?为什么?
- 当 $k=$ _____ 时,方程 $(3k+2)x^2+(2k-1)x-6=0$ 有一个根是 1,此方程是 _____,其中 $a=$ _____, $b=$ _____, $c=$ _____.
- 关于 x 的方程 $(3k-1)x^2+2kx-4=0$,当 $k=$ _____ 是一元二次方程;当 $k=$ _____ 是一元一次方程.

例题 2 考点 一元二次方程根的意义

提高题

若方程 $mx^2+4x+3=0$ 有一个根是 1,则 m 的值是 _____.

点拨



将方程的根代入方程,转化为关于所求参数 m 的一次方程.再求 m 的值.

解题步骤与思路

把方程的根回代方程 →
一元一次方程 →

$$\begin{aligned} \text{把 } x=1 \text{ 代入方程,得} \\ m \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 3 = 0, \quad m + 7 = 0, \\ \therefore m = -7. \end{aligned}$$

⊗ 必会

根据一元二次方程的根的定义解题,一般有正用、逆用两种题型.把方程的根回代方程是一种重要的逆用技巧.

同步训练 2

答案见本书第 182 页.

- 当 $a=$ _____ 时,方程 $ax^2-5x+2=0$ 有一根是 -5.
- 如果方程 $x^2-(\sqrt{2}+m)x+\sqrt{6}=0$ 的一个根是 $\sqrt{2}$,求 m 的值.

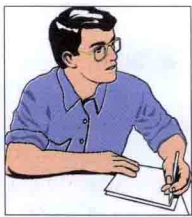
2

一元二次方程的解法——开平方法

考试中经常出现的

本节最重点

开平方法



◆ $x^2=a$ ($a \geq 0$), 由平方根的意义, $x=\pm\sqrt{a}$.

◆ $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$), 当 $b=0$ 时, $ax^2+c=0$.

即 $x^2=-\frac{c}{a}$ ($a \neq 0$).

(1) 当 $-\frac{c}{a} > 0$ 时, $x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ (平方根的定义).

(2) 当 $-\frac{c}{a} = 0$ 时, $x=0$ (平方根的定义).

(3) 当 $-\frac{c}{a} < 0$ 时, 这样的 x 不存在, 方程无实数根.

考试轻松

提高实战能力的指导

应知应会

* $x^2=a$ ($a \geq 0$), x 叫做 a 的平方根. 用符号 $x=\pm\sqrt{a}$ 表示, 这是开平方方法的依据.

* 适用于直接开平方方法解的方程类型:

● $x^2=p$ ($p \geq 0$) $\Rightarrow x=\pm\sqrt{p}$.

● $ax^2=b$ $\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$.

其中 $a \neq 0$, $\frac{b}{a} \geq 0$.

● $(x+a)^2=b$ ($b \geq 0$) $\Rightarrow x=-a \pm \sqrt{b}$.

● $x^2+px+q=0$, 其左边 x^2+px+q 是一个完全平方式.

误区

~~$$\begin{aligned} 3x^2+7 &= 0 \\ 3x^2 &= -7 \\ x^2 &= -\frac{7}{3} \\ x &= \pm\sqrt{-\frac{7}{3}} \end{aligned}$$~~

注意

方程 $ax^2=b$ 转化为 $x^2=\frac{b}{a}$ 后, 特别注意, 当 $\frac{b}{a} \geq 0$ 时, 方程才有解, 即 $x_1=$

$$\sqrt{\frac{b}{a}}, x_2=-\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

本题 $x^2=-\frac{7}{3}$, x 在实数范围内不存在, 故方程无解.

2 $(x \pm a)^2=b$ 型的解法

① $(12x-3)^2=25$

把 $(12x-3)$ 看
作一个整式

$$12x-3=\pm 5$$

$$12x-3=5, 12x-3=-5$$

$$x_1=\frac{2}{3}, x_2=-\frac{1}{6}.$$

② $(3x-2)^2=(2x-1)^2$

把 $(2x-1)^2$ 看
作一个非负数

$$3x-2=\pm(2x-1)$$

$$3x-2=2x-1, 3x-2=-(2x-1)$$

$$x_1=1, x_2=\frac{3}{5}.$$

提示

把括号内的式子看作一个整体来处理的思想是数学中的一个重要整体思想.

考试中经常出现的

例题和解法

例题3 考点 $x^2=a(a\geq 0)$ 型方程的解法

基本题

(1) 方程 $x^2-4=0$ 的根是

()

- A. -2 B. 2 C. ± 2 D. 以上都不是

(2) 解方程 $x^2-\frac{7}{8}=0$.

点拨



$x^2=a (a\geq 0)$, 由平方根的意义, $x=\pm\sqrt{a}$.

解题步骤与思路

x 是 4 的平方根 $\rightarrow x^2=4$ $\xleftarrow{\text{移项}}$ (1) $x^2-4=0$
 $x=\pm\sqrt{4}=\pm 2$
 故选 C.

x 是 $\frac{7}{8}$ 的平方根 $\rightarrow x^2=\frac{7}{8}$ $\xleftarrow{\text{移项}}$ (2) $x^2-\frac{7}{8}=0$
 $x=\pm\sqrt{\frac{7}{8}}=\pm\frac{\sqrt{14}}{4}$
 $x_1=\frac{\sqrt{14}}{4}, x_2=-\frac{\sqrt{14}}{4}$

注意

分母有理化的方法:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{7}{8}} &= \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{7} \times \sqrt{2}}{2\sqrt{2} \times \sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{14}}{4}.\end{aligned}$$

最后结果应化成最简根式, 根号内不含分母.

同步训练3

解下列各方程:

(1) $x^2=\frac{16}{49}$;

(2) $x^2=\frac{5}{8}$;

(3) $x^2-63=0$.

答案见本书第 182 页.

例题4 考点 $ax^2=b$ 型方程的解法

提高题

(1) $3x^2-81=0$;

(2) $5x^2-7=0$.

点拨



把 $ax^2=b$ 的两边同除以 x^2 的系数 a , 转化为 $x^2=p$ 型再解.

解题步骤与思路

x 是 27 的平方根 $\rightarrow$ (1) $3x^2-81=0$ $\xleftarrow{\text{移项, 方程两边同除以 3.}}$
 $3x^2=81$
 $x^2=27$
 $x=\pm\sqrt{27}=\pm 3\sqrt{3}$

注意

$$\begin{aligned}\sqrt{27} &= \sqrt{3^3 \times 3} \\ &= 3\sqrt{3}.\end{aligned}$$

必须把根式化为最简根式.