高等院校精品教材系列

工程力学教程

◎ 李海龙　梅凤翔　编著

◎ 水小平　主审

电子工业出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

国家精品课程配套教材
高等院校精品教材系列

工程力学教程

李海龙　梅凤翔　编著
水小平　主审

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry

内 容 简 介

本教材根据教育部高等学校力学基础课程教学指导分委员会制定的“工程力学课程教学基本要求”，吸收国内外优秀教材的精华，尤其是德国教材所具有的起点高、内容广、简明扼要的优点，结合作者20多年从事基础力学教学的丰富经验编写而成，是面向对力学知识有一定要求的非机械专业的少学时“工程力学”课程新型教材，以适应现代教学改革的更高要求。本教材分为两篇：第一篇为理论力学，包括力系的简化、力系的平衡、点的运动学、刚体运动学、点的复合运动、质点运动微分方程、达朗贝尔原理、动能定理和动量原理；第二篇为材料力学，包括材料力学绪论、应力状态理论、杆的拉伸与压缩、扭转、梁的弯曲应力、梁的弯曲变形、强度理论与组合变形、能量原理和压杆稳定。

本教材可作为高等院校非机械类专业本科生64～80学时的工程力学教材，也可供高职高专、自学考试、远程教育和成人教育的相关专业师生及有关的工程技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

工程力学教程/李海龙，梅凤翔编著. —北京：电子工业出版社，2013.11
高等院校精品教材系列
ISBN 978-7-121-21767-8

I. ①工… II. ①李… ②梅… III. ①工程力学-高等学校-教材 IV. ①TB12

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第257627号

策划编辑：余 义
责任编辑：余 义
印 刷：涿州市京南印刷厂
装 订：涿州市京南印刷厂
出版发行：电子工业出版社
北京市海淀区万寿路173信箱 邮编：100036
开 本：787×1092 1/16 印张：15.5 字数：397千字
印 次：2013年11月第1次印刷
定 价：39.00元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：（010）88258888。

前　言

工程力学是高等工科院校的一门重要的技术基础课，具有理论性强、内容丰富、题量大、题型多等特点。本教材包括了理论力学和材料力学的主要内容。在编排上，采用理论力学、材料力学各自独立的体系结构，理论力学采用“静力学—运动学—动力学”的体系结构，材料力学采用“应力分析—基本变形—组合变形—能量法—压杆稳定”的体系结构，按 64～80 学时编写，适用于大学本科“工程力学”课程少学时非机械专业的教学之用。

目前，少学时的工程力学教材大多是从后续的专业课程的实际需要出发，按照“够用为度”的原则，采用从多学时的理论力学和材料力学中去掉一些理论推演，删减较难内容，经重新编排内容体系而成，但理论推演实际上是工程力学的精华部分，盲目“删繁就简”和“删难就易”也会使知识面大为减少；还有少部分少学时工程力学教材，其内容是涵盖了理论力学和材料力学的主要知识，但由于知识点众多而学时数有限，教材在内容的编排上往往面面俱到而难于深入和严谨。针对以上情况，为了能够融合我国传统教材理论性强、严谨、系统全面的优点与欧美教材(尤其是德国教材)所具有的起点高、内容广、简明扼要的特点，作者在近几年做了一些有益的探索工作，主要体现在以下几个方面。

(1)在保持少学时的刚性条件下，加强了基础理论部分的内容。以矢量运算作为数学工具，使力学基本概念和基本原理的数学描述简洁；采用从一般到特殊的内容体系，极大地加强了基本理论的严谨性和知识体系的系统性。例如，在运动学中，从刚体一般运动的讨论开始(篇幅不多)，很容易就过渡到刚体的平移、定轴转动和平面运动，同时也为点的复合运动的速度和加速度合成公式的一般性推导提供了强有力的理论支持，在这两章中都用较少的篇幅加强了加速度分析，而以前少学时的工程力学教材对加速度分析的介绍都比较少；通过达朗贝尔原理的一般理论推导，结合运动学部分已打下的坚实基础，可将达朗贝尔原理应用到一般平面运动刚体的动力学问题中以及定点运动刚体的稳定转动问题中(此时刚体变成了定轴转动)，有效地克服了以前少学时的工程力学教材只将达朗贝尔原理应用于平移和定轴转动刚体动力学问题求解的情况。

(2)结合相关理论结果，简明扼要地推广其应用，使教材所包含的内容较为广泛。例如，在梁的弯曲变形中，通过积分法计算梁的变形的基本理论的简要介绍，由几个简单例题就将之应用于具有弹性支承和初始小挠度梁的计算中去；通过能量法这一种计算结构位移的一般性方法的简要介绍，由几个简单例题将之应用于桁架、刚架、曲梁的位移计算以及冲击载荷作用下结构位移的计算中。这样，在增加很少篇幅的情况下就使材料力学的内容变得更为深广。对两次刚化法从原理上进行数学论证，本教材第一次成功将此方法应用于求简支梁指定截面的位移上，其他教材的两次刚化法只应用到求悬臂梁或外伸梁或刚架指定截面的位移情况，没有应用到简支梁的情况；教材指出了工字截面梁腹板剪应力近似公式(即腹板剪应力近似等于横截面剪力除以腹板面积，大部分材料力学教材都介绍了这个近似公式)存在严重问题，这是从铁摩辛柯著

的《材料力学》中来的，问题来源于一个数学推理错误，对 No. 63c 工字钢，腹板上的最大剪应力和最小剪应力可相差 60%以上。

(3)提高了例题的典型性，加强了部分例题的难度。其目的是使读者领会正确的解题思路，掌握基本的分析方法和计算技能，提高对基本概念和基本理论的理解，能起到触类旁通、举一反三的作用。

(4)各章习题按照先概念题、后计算题安排，强化学生对基本概念、基本理论的准确理解和基本方法的熟练掌握，部分习题有一定难度，有利于引导少数学有余力的学生深入理解课程内容。

(5)部分内容以*号形式出现，是为部分学有余力的学生作为参考资料准备的，并不做教学要求，有利于分层次设计教学。

本教材由李海龙老师、梅凤翔老师编著，是作者在北京理工大学多年教学所使用的讲义经修改完善而成。工程力学课程组的张强、汪小明、尚玫、赵颖涛、赵希淑、刘晓宁、田强等老师在教材的编写过程中也参与了部分工作。

全国优秀教师、第三届北京市高等学校教学名师奖获得者水小平教授对本教材进行了认真仔细的审阅，提出了许多宝贵的修改意见，并在李海龙老师的教学探索过程中不断给予鼓励和支持。在本教材编写过程中，得到了北京理工大学宇航学院工程力学课程组的同事们的大力支持与热情帮助。电子工业出版社对本教材的出版付出了辛勤的工作和有力的支持。在此，作者一并表示衷心的感谢。

限于作者的水平，书中难免有不少缺点和欠妥之处，恳请读者批评指正。

李海龙　梅凤翔

2013 年 9 月

目　　录

第一篇　理论力学

第二篇　材料力学

第一篇 理论力学

理论力学包括静力学、运动学和动力学三部分。

静力学研究物体在力系作用下处于平衡的规律。力系是指作用于物体上的一组力；平衡是指物体相对于惯性参考系静止或匀速直线平移的状态，它是机械运动的一种特殊状态。

静力学研究的对象是刚体。刚体是指在力的作用下不变形的物体。实际上，任何物体在力的作用下总要发生变形，对变形很小的物体，把它抽象为刚体来考虑其平衡问题，不会对研究的结果产生太大的影响，但却能大大降低问题的复杂程度；对变形大的物体，当它处于平衡时，可以用刚化公理转化为刚体来研究，因此刚体模型有很广泛的实用背景。

静力学有两个基本问题：一是力系的简化，它是指用简单的力系等效地代替复杂的力系；这里的等效是指两个力系作用在物体上的力学效果一样，或规定的力学度量一样；二是力系的平衡，它是指通过力系简化，找出力系作用于物体上而使物体保持平衡的条件，也就是力系的平衡条件。满足平衡条件的力系称为平衡力系。

静力学中介绍的力系简化方法与物体的受力分析也是研究动力学问题的基础。静力学本身也有广泛的工程应用背景，如在工程结构和零件的设计中，必须先进行静力学计算，然后以此为基础进行强度、刚度和稳定性等计算。

运动学研究物体在空间的位置随时间变化的特性，如物体的运动描述、运动学量的确定等，它不涉及引起物体运动的原因。

在运动学中，研究对象是两个理想化模型：质点和刚体。质点是指体积无限小、有质量的点；刚体是指由无限多个质点构成的有限大小的不变形的物体，即刚体上的任意两点的距离始终保持不变。运动学的内容包含点的运动学和刚体运动学两部分。

运动学对物体运动特性的研究及静力学对力系特性的研究是动力学研究力与物体运动关系的基础，但运动学本身也可以直接应用于工程实际中。在机械设计中，对机构的运动分析已发展成为机构运动学。在力学的发展史上，正是机构学的研究丰富了运动学的内容，促进了机构学这个学科的形成。

动力学是以牛顿三定律为基础建立起来的，属于经典动力学。它研究物体受力与物体机械运动的关系，是理论力学的核心内容。静力学和运动学的知识是动力学研究的基础。

动力学的研究对象是质点和质点系，因此动力学的内容包含质点动力学和质点系动力学两部分。先研究一个质点的运动规律，然后将所得结论加以推演，即得到质点系的运动规律。质点系动力学是概括了机械运动中最一般的规律。

达朗贝尔原理利用静力学原理提供了解决受约束物体动力学问题的另一种方法，在工程上得到了广泛应用。动量定理、动量矩定理和动能定理被称为动力学三大普遍定理，是质点动力学解决问题的重要工具。刚体作为一个特殊的质点系，在动力学中占有重要的位置，工程中很多研究对象都可以抽象为刚体模型，本课程将质点系动力学原理的应用主要放在解决刚体的动力学问题上。

第 1 章　力系的简化

力系的简化是静力学的基础。本章将介绍静力学原理、力系的简化及物体的受力分析。

1.1　静力学原理

1. 力的概念

力是物体之间的相互机械作用。这种作用使物体的运动状态发生改变，以及使物体发生变形。力使物体运动状态发生改变的效应称为力的外效应，而使物体发生变形的效应称为力的内效应。在国际单位制中，力的单位是牛顿(N)。它表示使 1 千克(kg)质量的物体产生 1 米/秒^2 (m/s^2)的加速度所需的力。

2. 静力学原理

静力学是建立在一些基本事实上的，这些事实是人类经过长期的观察和经验的积累而得到的。

力矢量性原理　力是一个定位矢量；力对物体的作用效应决定于三个要素：力的大小、力的方向和力的作用点。

所谓定位矢量，是指矢量的起始点、大小和方向不能变动的矢量。如果矢量的起始点可以沿矢量方向上移动，则称该矢量为滑移矢量或滑动矢量。如果在保持矢量大小、方向不变的条件下矢量的起始点可以任意移动，则称该矢量为自由矢量。数学上的矢量都是自由矢量。

如图 1-1 所示，力 $\boldsymbol{F}$ 的作用点为 A，它对参考点 O 的力矩 $\boldsymbol{M}_O$ 定义为

$$\boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{r}_{OA} \times \boldsymbol{F} \tag{1-1}$$

力矩 $\boldsymbol{M}_O$ 的作用点为点 O，方向垂直于 $\boldsymbol{r}_{OA}$、$\boldsymbol{F}$ 构成的平面，指向服从右手螺旋法则，大小等于 $\boldsymbol{r}_{OA}$、$\boldsymbol{F}$ 为边组成的平行四边形的面积。

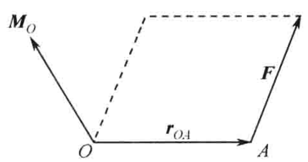

图 1-1

对力系 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \cdots, \boldsymbol{F}_n$，各力的作用点分别为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，该力系对点 O 的合力矩定义为

$$\boldsymbol{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{M}_{Oi} = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{r}_{OA_i} \times \boldsymbol{F}_i) \tag{1-2}$$

力系等效原理　若两个力系对任意给定的点 O 都给出同样的合力矩，则这两个力系是等效的。

力系等效原理是力系简化的基础。对刚体而言，可以找出一个和原力系等效的简单力系来代替原力系。

例 1-1　如图 1-2 所示的力系，$\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2$，试求力系对点 O 的合力矩。

解：力系对点 O 的合力矩为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_O &= \boldsymbol{r}_{OA_1} \times \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{r}_{OA_2} \times \boldsymbol{F}_2 \\ &= \boldsymbol{r}_{OA_1} \times \boldsymbol{F}_1 - \boldsymbol{r}_{OA_2} \times \boldsymbol{F}_1 \\ &= \boldsymbol{r}_{A_2A_1} \times \boldsymbol{F}_1 = 0\end{aligned}$$

即该力系对任一点 O 的合力矩为零。这样的力系称为零力系。

平衡原理 作用于刚体上的力系使刚体保持平衡的充要条件是:此力系等效于零力系。

平衡原理的充分性是指刚体原处于平衡状态,如果作用于刚体上的力系等效于零力系,则刚体将保持平衡状态;平衡原理的必要性是指如果刚体处于平衡状态,则作用于刚体上的力系等效于零力系。

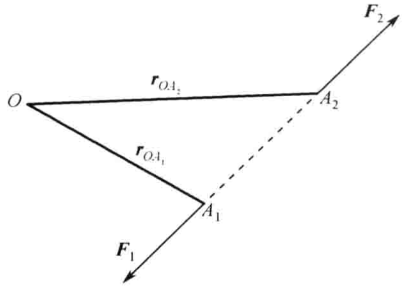

图 1-2

作用力与反作用力原理 两物体间的作用力和反作用力总是大小相等,方向相反,作用线相同,分别作用于这两个物体上。这个原理就是牛顿第三定律。此原理对机械作用力成立,对电磁作用力不一定成立。

刚化原理 在已知力作用下保持平衡的变形体,可以将它变成同一形状和大小的刚体而不影响它的平衡。

这个原理建立了刚体的平衡条件和变形体的平衡条件之间的联系。它说明变形体平衡时,作用在其上的力系必须满足把变形体转换成同样形状和大小的刚体(称为刚化)后的平衡条件。

如图 1-3 所示的橡胶杆,在力系 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 作用下平衡,将杆刚化成刚体,则仍平衡。由平衡原理知,力系 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 必等效于零力系,因此它们必须大小相等、方向相反、作用线相同。要注意的是,当 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 的大小增大时,橡胶杆会进一步伸长,而刚化后的杆不变形,所以刚化只能在变形体处于平衡时应用。

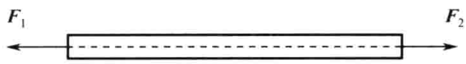

图 1-3

1.2 力系的简化

用最简单的力系等效地代替较复杂的力系称为力系的简化。

1. 力的基本性质

性质 1 作用于刚体上的力可以将其作用点沿其作用线滑移到刚体内的任一点。

证明: 如图 1-4 所示,$\boldsymbol{F}$ 为作用于刚体上点 A 处的力,现在其作用线上的一点 O 处加一零力系 $\boldsymbol{F}'$、$\boldsymbol{F}''$,$\boldsymbol{F}'=-\boldsymbol{F}''=\boldsymbol{F}$,由力系等效原理,新力系 $\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{F}'$、$\boldsymbol{F}''$ 与原力系等效。

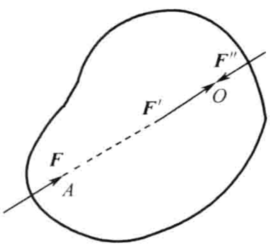

图 1-4

由于 $\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{F}''$ 也是零力系,去掉此零力系,所得力 $\boldsymbol{F}'$ 和原力 $\boldsymbol{F}$ 等效。此时,力的作用点已移动到了点 O。

这个性质称为力的可传性。对刚体而言,力是一个滑移矢量,力的三要素成为大小、方向和作用线。对变形体而言,此性质不成立。

推论 力 $\boldsymbol{F}$ 的作用点沿其作用线的滑移不改变其对同一点的矩。

性质 2 力系 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \cdots, \boldsymbol{F}_n$ 有共同作用点 A,$\boldsymbol{F}=\sum\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i$ 称为力系的合力,则对任一点 O 有

$$\boldsymbol{M}_O = \sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{r}_{OA} \times \boldsymbol{F}_i) = \boldsymbol{r}_{OA} \times \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{r}_{OA} \times \boldsymbol{F} \tag{1-3}$$

即共点力系中各力对一点的力矩的矢量和等于该力系的合力对同一点的力矩。此性质称为合力矩定理,也称伐里农定理(Varignon P)定理。

性质 3　对于力 $\boldsymbol{F}$,用 $\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}$ 分解为作用于同一点的共点力系 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \cdots, \boldsymbol{F}_n$,不会改变 $\boldsymbol{F}$ 对一点的矩。

性质 3 是性质 2 的逆命题,当求力 $\boldsymbol{F}$ 对一点的力矩不方便时,常利用性质 3 将力 $\boldsymbol{F}$ 进行合理的分解,然后再求对该点的力矩。

2. 力偶的概念

大小相等、方向相反、作用线相互平行的两个力 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 组成的力系称为力偶,以$(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2)$表示,如图 1-5 所示。两个力所在的平面称为力偶的作用面,两个力之间的距离称为力偶臂。

定理 1　力偶对一点 O 的力矩与点 O 的选择无关。

对于点 O,作一过点 O 的平面与力 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 的作用线垂直,交点分别为 A_1、A_2,如图 1-6 所示,则力偶$(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2)$对点 O 的力矩为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_O &= \boldsymbol{M}_{O1} + \boldsymbol{M}_{O2} = \boldsymbol{r}_{OA_1} \times \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{r}_{OA_2} \times \boldsymbol{F}_2 \\ &= (\boldsymbol{r}_{OA_1} - \boldsymbol{r}_{OA_2}) \times \boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{r}_{A_2A_1} \times \boldsymbol{F}_1 \\ &= \boldsymbol{r}_{A_1A_2} \times \boldsymbol{F}_2 \end{aligned}$$

显然,$\boldsymbol{M}_O$ 与点 O 的选择无关,大小为力偶中力的大小与力偶臂的乘积,方向垂直于力偶的作用面,指向服从右手螺旋法则。

$\boldsymbol{M}_O$ 称为力偶矩。定理 1 说明力偶的力偶矩的作用点可以是空间的任一点,即力偶矩是一个自由矢量。力偶矩常以 $\boldsymbol{M}$ 或 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2)$表示。

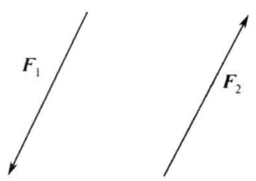

图 1-5

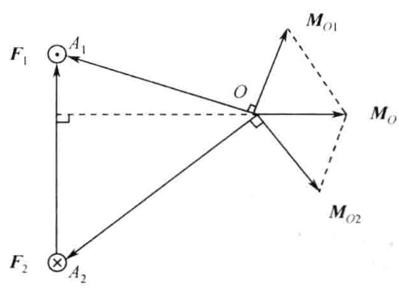

图 1-6

定理 2　对于刚体,只要保持力偶矩不变,可以同时改变力偶中力的大小、方向和力偶臂的长短,或平行移动力偶的作用面,所得的力偶与原力偶等效。

证明:显然,这些得到的力偶对任一点的力矩与原力偶对该点的力矩相等,由力系等效原理即得结论。

定理 3　当力偶矩不为零时,力偶不可能与一个力等效。

证明:用反证法。设力偶$(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2)$与一个非零力 $\boldsymbol{F}$ 等效,在 $\boldsymbol{F}$ 的作用线上取一点,则 $\boldsymbol{F}$ 对此点的力矩为零,但力偶对此点的力矩不为零,即它们不等效,矛盾说明结论成立。

定理 3 说明力偶是一个最简单的特殊力系。力偶对物体的作用效果决定于三要素:力偶作用平面、力偶矩的大小和在力偶的作用面内的转向。对刚体而言,力偶的作用效果仅取决于力

偶矩的大小和方向。习惯上，常用力偶矩表示力偶，画在力偶的作用面上，如图 1-7所示。

图 1-7

3. 一般力系的简化

设作用于刚体上的力系为 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\cdots,\boldsymbol{F}_n$，作用点分别为 A_1，$A_2,\cdots,A_n$，令

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i \tag{1-4}$$

称为力系的主矢。一般情况下，力系的主矢不是力，因为没有作用点。一般力系可按下面方法进行简化。

(1)选择参考点为 O，在点 O 处加上 n 个零力系，$\boldsymbol{F}_1'$、$\boldsymbol{F}_1''$，$\boldsymbol{F}_2'$、$\boldsymbol{F}_2''$，$\cdots$，$\boldsymbol{F}_n'$、$\boldsymbol{F}_n''$，使 $\boldsymbol{F}_1'=-\boldsymbol{F}_1''=\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2'=-\boldsymbol{F}_2''=\boldsymbol{F}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{F}_n'=-\boldsymbol{F}_n''=\boldsymbol{F}_n$，如图 1-8 所示。所得的新力系和原力系等效，而 $\boldsymbol{F}_1',\boldsymbol{F}_2',\cdots,\boldsymbol{F}_n'$ 为共点力系，$(\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_1'')$，$(\boldsymbol{F}_2,\boldsymbol{F}_2'')$，$\cdots$，$(\boldsymbol{F}_n,\boldsymbol{F}_n'')$ 构成力偶系；

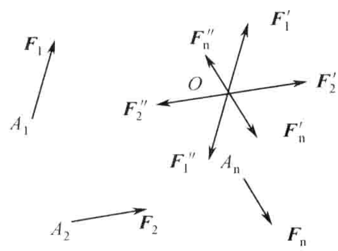

图 1-8

(2)共点力系的合力为

$$\boldsymbol{F}_O=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i'=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i=\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}} \tag{1-5}$$

(3)力偶系可以合成为一个合力偶，合力偶矩为

$$\boldsymbol{M}_O=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_{OA_i}\times\boldsymbol{F}_i \tag{1-6}$$

上式称为力系对参考点 O 的主矩。

由上面三个步骤得到了点 O 处的一个力 $\boldsymbol{F}_O$(其大小、方向等于力系的主矢)和一个力偶矩 $\boldsymbol{M}_O$。显然，由力 $\boldsymbol{F}_O$ 和力偶矩 $\boldsymbol{M}_O$ 组成的力系与原力系等效。

定理 空间任意力系向一点 O 简化必然得到一个力 $\boldsymbol{F}_O$ 和一个力偶矩 $\boldsymbol{M}_O$。其中 $\boldsymbol{F}_O=\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$，$\boldsymbol{M}_O=\sum\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_{OA_i}\times\boldsymbol{F}_i$。

当 $n=1$ 时，上述定理即是力的平移定理。

从简化的过程可以看出，对不同的参考点简化所得的力 $\boldsymbol{F}_O$ 的大小和方向是不变的，但力偶矩 $\boldsymbol{M}_O$ 可能不一样。

不同参考点主矩变换法则 设力系 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\cdots,\boldsymbol{F}_n$ 的主矢为 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$，向参考点 O 简化，主矩为 $\boldsymbol{M}_O$，向参考点 O_1 简化，主矩为 $\boldsymbol{M}_{O_1}$，则

$$\boldsymbol{M}_{O_1}=\boldsymbol{M}_O+\boldsymbol{r}_{O_1O}\times\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}} \tag{1-7}$$

证明：力系向点 O 简化，得到作用点 O 的一个力 $\boldsymbol{F}_O=\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$ 和一个力偶矩 $\boldsymbol{M}_O$，将由 $\boldsymbol{F}_O$、$\boldsymbol{M}_O$ 组成的力系向点 O_1 简化，在点 O_1 处加一个零力系 $\boldsymbol{F}_O'$、$\boldsymbol{F}_O''$，使 $\boldsymbol{F}_O'=-\boldsymbol{F}_O''=\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$，则得到的新力系与原力系等效，如图 1-9 所示(当力矢量和力偶矩矢量同时出现在一幅图中，为将它们区分开，常用双箭头表示力偶矩)。新力系中，力偶$(\boldsymbol{F}_O,\boldsymbol{F}_O'')$的力偶矩为

$$\boldsymbol{r}_{O_1O}\times\boldsymbol{F}_O=\boldsymbol{r}_{O_1O}\times\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$$

它和 $\boldsymbol{M}_O$ 合成即为点 O_1 处的主矩 $\boldsymbol{M}_{O_1}$，即

$$\boldsymbol{M}_{O_1}=\boldsymbol{M}_O+\boldsymbol{r}_{O_1O}\times\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$$

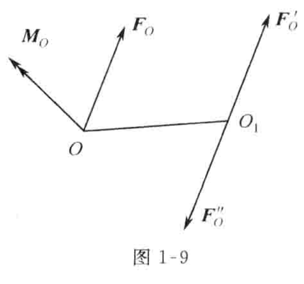

图 1-9

简化结果讨论：

(1)当 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}=0$，$\boldsymbol{M}_O\neq0$ 时，则原力系等效于一个力偶，其力偶矩为

$$\boldsymbol{M}_O=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_{OA_i}\times\boldsymbol{F}_i$$

这个力偶称为力系的合力偶。

(2)当 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}} \neq 0$ 时，考虑点 C

$$\boldsymbol{r}_{OC} = \frac{\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}} \times \boldsymbol{M}_O}{|\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}|^2} \tag{1-8}$$

力系向点 C 简化，则点 C 的主矩 $\boldsymbol{M}_C$ 为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{M}_C &= \boldsymbol{M}_O + \boldsymbol{r}_{CO} \times \boldsymbol{F}_{\mathrm{R}} = \boldsymbol{M}_O + \boldsymbol{F}_{\mathrm{R}} \times \boldsymbol{r}_{OC} \\
&= \boldsymbol{M}_O + \frac{1}{|\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}|^2}\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}} \times (\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}} \times \boldsymbol{M}_O) \\
&= \boldsymbol{M}_O + \frac{1}{|\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}|^2}[\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}(\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}} \cdot \boldsymbol{M}_O) - \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}} \cdot \boldsymbol{F}_{\mathrm{R}})] \\
&= \frac{\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}} \cdot \boldsymbol{M}_O}{|\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}|^2}\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}
\end{aligned}$$

令

$$p = \frac{\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}} \cdot \boldsymbol{M}_O}{|\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}|^2} \tag{1-9}$$

则

$$\boldsymbol{M}_C = p\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}} \tag{1-10}$$

①当 $p=0$ 时，$\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}} \perp \boldsymbol{M}_O$，$\boldsymbol{M}_C=0$，原力系等效于一个作用线过点 C 的力 $\boldsymbol{F}_C=\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$，$\boldsymbol{F}_C$ 称为力系的合力。这种情况存在类似的合力矩定理。

②当 $p \neq 0$ 时，力系简化为点 C 的力 $\boldsymbol{F}_C=\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$ 和力偶 $\boldsymbol{M}_C=p\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$，它们构成一个力螺旋。当 $p>0$时，称为右手力螺旋；当 $p<0$ 时，称为左手力螺旋，如图 1-10 所示（双箭头表示力偶矩）。p 称为力螺旋参数。力螺旋中力的作用线称为力螺旋的中心轴。

(a) 右手力螺旋　　(b) 左手力螺旋

图 1-10

力螺旋也是一个最简单的力系。

在生活和工程实际中存在这样的力系，如紧固螺丝加在螺丝刀上的力系，开煤、打井时加在钻杆上的力系都是力螺旋。

力系中所有力的作用线相互平行，这样的力系称为平行力系。力系中所有力的作用线都在同一平面内，这样的力系称为平面力系。对于平行力系，对任一点 O 的合力矩 $\boldsymbol{M}_O$ 一定垂直力系中各力的作用线，即 $\boldsymbol{M}_O \perp \boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$，因此当 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}} \neq 0$ 时，平行力系可以简化为一个合力；当 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}=0$ 时，平行力系可以简化为一个合力偶。同样，对于平面力系，对任一点 O 的合力矩 $\boldsymbol{M}_O$ 一定垂直于 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$，因此平面力系可以简化为一个合力或一个合力偶。

下面通过建立坐标系，解析表达力系的主矢和对一点的主矩，以便于应用。为此，先介绍力对轴的矩的概念。

如图 1-11 所示，作用于点 A 的力 $\boldsymbol{F}$，在垂直于 z 轴的 xy 平面上的投影矢量为 $\boldsymbol{F}_{xy}$，原点 O 到 $\boldsymbol{F}_{xy}$ 作用线的距离为 h，称为力臂。力 $\boldsymbol{F}$ 对 z 轴的矩 $\mathrm{M}_z(\boldsymbol{F})$定义为

$$M_z(\boldsymbol{F}) = \pm F_{xy}h \tag{1-11}$$

上式正负号规定：$\boldsymbol{F}_{xy}$ 绕 z 轴转动符合右手螺旋法则时取正号；反之，取负号。

从式(1-11)可以看出：力对轴的矩是一个标量，当力的作用线与轴平行（这时 $\boldsymbol{F}_{xy}=0$）或相交（这时 $h=0$）时，力对该轴的矩为零。当力沿其作用线移动时，它对轴的矩不变，因为其投影矢量的大小和方向及力臂并不改变。

对力系 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \cdots, \boldsymbol{F}_n$ 向点 O 简化，在点 O 处建立直角坐标系 $Oxyz$，设 $\boldsymbol{F}_i=\{F_{ix}, F_{iy}, F_{iz}\}$

和 $\boldsymbol{r}_{OA_i}=\{x_i,y_i,z_i\}(i=1,2,\cdots,n)$,如图 1-12 所示,则

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i=\left\{\sum_{i=1}^{n}F_{ix},\sum_{i=1}^{n}F_{iy},\sum_{i=1}^{n}F_{iz}\right\} \tag{1-12}$$

即力系主矢在三个直角坐标系轴上的投影分别等于各分力在相应坐标轴上的投影的代数和。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_{OA_i}\times\boldsymbol{F}_i&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\x_i&y_i&z_i\\F_{ix}&F_{iy}&F_{iz}\end{vmatrix}\\&=(F_{iz}y_i-F_{iy}z_i)\boldsymbol{i}+(F_{ix}z_i-F_{iz}x_i)\boldsymbol{j}+\\&\quad(F_{iy}x_i-F_{ix}y_i)\boldsymbol{k}\\&=\{M_x(\boldsymbol{F}_i),M_y(\boldsymbol{F}_i),M_z(\boldsymbol{F}_i)\}\end{aligned}$$

即力 $\boldsymbol{F}_i$ 对点 O 的力矩在三个直角坐标系轴上的投影分别等于力 $\boldsymbol{F}_i$ 对相应坐标轴的矩。

$$\boldsymbol{M}_O=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_{OA_i}\times\boldsymbol{F}_i=\left\{\sum_{i=1}^{n}M_x(\boldsymbol{F}_i),\sum_{i=1}^{n}M_y(\boldsymbol{F}_i),\sum_{i=1}^{n}M_z(\boldsymbol{F}_i)\right\} \tag{1-13}$$

即力系对点 O 的主矩在三个直角坐标轴上的投影分别等于各分力对相应坐标轴的矩的代数和。

由合力矩定理可知,共点力系中各力对某轴的矩的代数和等于力系的合力对该轴的矩。

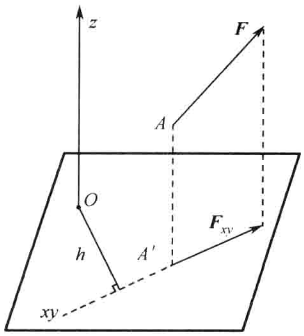

图 1-11

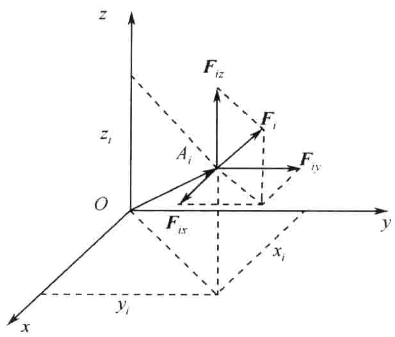

图 1-12

1.3 物体的重心

物体重心的位置对物体的平衡或运动状态有着重要影响。如赛车,由于高速行驶,要求重心位置尽量低,这样能保持运动的稳定,不至于翻倒。起重机重心的位置若超出某一范围,受载后就不能保证起重机的平衡。因此,在工程实际中,常要求计算或测定物体的重心位置。

1. 平行力系中心

对于平行力系 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\cdots,\boldsymbol{F}_n$,作用点分别为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,设力系的主矢 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}=\sum\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\neq 0$,取简化点 O,可得力系对点 O 的主矩 $\boldsymbol{M}_O$,由于 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}\perp\boldsymbol{M}_O$,力系可进一步简化为作用线过一点 O_1 上的一个力矢 $\boldsymbol{F}_{O_1}=\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$,称这个力即为平行力系的合力。显然,力系对点 O_1 的主矩为

$$\boldsymbol{M}_{O_1}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_{O_1A_i}\times\boldsymbol{F}_i=0 \tag{1}$$

在 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$ 方向上取单位矢 $\boldsymbol{e}$,则 $\boldsymbol{F}_i=F_i\boldsymbol{e}$,$\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}=(\sum\limits_{i=1}^{n}F_i)\boldsymbol{e}$,

$$\boldsymbol{r}_{O_1A_i}=\boldsymbol{r}_{OA_i}-\boldsymbol{r}_{OO_1} \tag{2}$$

如图 1-13 所示。

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_{O_1A_i}\times\boldsymbol{F}_i&=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_{OA_i}\times\boldsymbol{F}_i-\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_{OO_1}\times\boldsymbol{F}_i\\&=\sum_{i=1}^{n}(F_i\boldsymbol{r}_{OA_i})\times\boldsymbol{e}-(\sum_{i=1}^{n}F_i)\boldsymbol{r}_{OO_1}\times\boldsymbol{e}\\&=(\sum_{i=1}^{n}F_i)(\frac{\sum_{i=1}^{n}F_i\boldsymbol{r}_{OA_i}}{\sum_{i=1}^{n}F_i}-\boldsymbol{r}_{OO_1})\times\boldsymbol{e}\end{aligned}\tag{3}$$

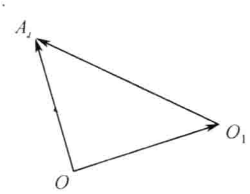

图 1-13

令

$$\boldsymbol{r}_{OC}=\frac{\sum_{i=1}^{n}F_i\boldsymbol{r}_{OA_i}}{\sum_{i=1}^{n}F_i}\tag{1-14}$$

上式确定空间一点 C，并且

$$(\boldsymbol{r}_{OC}-\boldsymbol{r}_{OO_1})\times\boldsymbol{e}=0\tag{4}$$

上式表明 $\boldsymbol{r}_{OC}-\boldsymbol{r}_{OO_1}=\boldsymbol{r}_{O_1C}//\boldsymbol{e}$，即点 C 也是合力作用线上的一点。由式(1-14)可知，点 C 仅与平行力系各分力 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_1,\cdots,\boldsymbol{F}_n$ 的大小和作用点有关，与平行力系的方向无关，并且与参考点 O 的选择无关。因为若取参考点 O'，由式(1-14)确定的点为 C'，则

$$\boldsymbol{r}_{O'C'}-\boldsymbol{r}_{OC}=\frac{\sum_{i=1}^{n}F_i(\boldsymbol{r}_{O'A_i}-\boldsymbol{r}_{OA_i})}{\sum_{i=1}^{n}F_i}=\frac{(\sum_{i=1}^{n}F_i)\boldsymbol{r}_{O'O}}{\sum_{i=1}^{n}F_i}=\boldsymbol{r}_{O'O}\tag{5}$$

但

$$\boldsymbol{r}_{O'O}=\boldsymbol{r}_{O'C'}+\boldsymbol{r}_{C'C}-\boldsymbol{r}_{OC}\tag{6}$$

如图 1-14 所示，比较式(5)、(6)，得

$$\boldsymbol{r}_{C'C}=0$$

即点 C'、C 重合。称式(1-14)确定的点 C 为平行力系的中心。

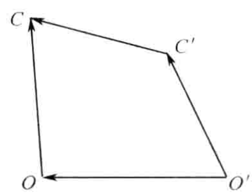

图 1-14

2. 物体的重心

在地球表面附近，物体受到重力的作用。把物体分成 n 个微小部分，每一部分受到的重力大小为 $\Delta G_i(i=1,2,\cdots,n)$，作用点为 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$，这些重力是一个平行力系，其平行力系的中心为

$$\boldsymbol{r}_{OC}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\Delta G_i\boldsymbol{r}_{OA_i}}{\sum_{i=1}^{n}\Delta G_i}=\frac{1}{G}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_{OA_i}\Delta G_i\tag{1-15}$$

式中，$G=\sum_{i=1}^{n}\Delta G_i$ 为物体重力的大小。式(1-15)确定的物体中或其延伸部分上的点 C 称为物体的重心。由平行力系的中心的性质可知，物体的重心是物体或某延伸部分上的确定点，不因物体在空间位置的变化而改变。

在参考点 O 上建立直角坐标系 $Oxyz$，$\boldsymbol{r}_{OA_i}=\{x_i,y_i,z_i\}$，$\boldsymbol{r}_{OC}=\{x_C,y_C,z_C\}$，则