

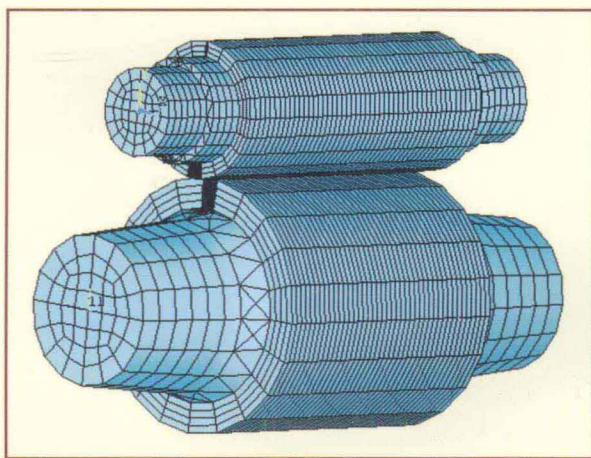


普通高等教育“十二五”规划教材

PUTONG GAODENG JIAOYU "12.5" GUIHUA JIAOCAI

工程中的有限元分析方法

陈章华 宁晓钧 编著



冶金工业出版社
Metallurgical Industry Press



普通高等教育“十二五”规划教材

工程中的有限元分析方法

陈章华 宁晓钧 编著

北 京
冶 金 工 业 出 版 社

2013

内 容 简 介

本书以理论与实践相结合的方法,系统地介绍了工程分析中有限元方法的原理与操作步骤,并通过选自于工程实际背景的力学与热学问题来加深读者对这种现代数值计算方法的理解。全书共分9章,内容包括有限单元法的数学基础、ANSYS 命令基础及其操作步骤、弹性力学(包括平面实体问题、轴对称问题、空间问题)的有限单元法、等参单元和数值积分、杆梁结构的有限单元法、有限单元法应用中的若干实际考虑、热传导问题的有限单元法与 ANSYS 热分析。每章后面附有复习思考题,大部分章节后面还附有上机作业,使用有限元分析软件 ANSYS 进行解题的步骤都包括在所提供的可运行的上机作业当中。

本书可作为机械、土木、冶金、热能等专业高年级本科生和研究生的学习教材,也可作为从事工程分析的技术人员、研发人员的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

工程中的有限元分析方法/陈章华,宁晓钧编著. —北京:冶金工业出版社,2013.6

普通高等教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-5024-6186-7

I. ①工… II. ①陈… ②宁… III. ①工程分析—有限元分析—高等学校—教材 IV. ①TU712 ②O241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 120959 号

出 版 人 谭学余

地 址 北京北河沿大街嵩祝院北巷 39 号,邮编 100009

电 话 (010)64027926 电子信箱 yjchs@cnmip.com.cn

责任编辑 常国平 美术编辑 李 新 版式设计 孙跃红

责任校对 王永欣 责任印制 牛晓波

ISBN 978-7-5024-6186-7

冶金工业出版社出版发行;各地新华书店经销;北京百善印刷厂印刷

2013 年 6 月第 1 版,2013 年 6 月第 1 次印刷

787mm×1092mm 1/16;14.25 印张;341 千字;215 页

32.00 元

冶金工业出版社投稿电话:(010)64027932 投稿邮箱:tougao@cnmip.com.cn

冶金工业出版社发行部 电话:(010)64044283 传真:(010)64027893

冶金书店 地址:北京东四西大街 46 号(100010) 电话:(010)65289081(兼传真)

(本书如有印装质量问题,本社发行部负责退换)

前 言

从 20 世纪 50 年代诞生到现在,有限元方法和技术经历了 60 年的发展历程,已经成为当今科学与工程领域中分析和求解微分方程的系统化数值计算方法。与传统解法相比,有限元方法具有理论完整、可靠,物理意义直观、明确,解题效能强等优点。特别是由于这种方法适用性强,形式单纯、规范,近年来已被推广应用到航空航天、机械、土木建筑、造船等行业和相关科学领域。有限元方法起源于矩阵结构分析方法,通过工程师和数学家的工作使其不断成熟和完善,已经变成工程分析中处理偏微分方程边值问题的最有效的数值方法之一。对于工程中的许多场变量的定解问题,通过有限元方法可以得到满足工程要求的近似解。目前,有限元方法已经从传统的力学领域向其他学科领域推广,它不仅用于研究物质机械运动的规律,还用于研究声、光、电、热、磁运动及其耦合作用的规律。

目前,理工科各专业的学生普遍需要学习有限元基础知识并至少掌握一门软件的使用方法,以使用软件解决一些相对简单的工程实际问题,包括建模、计算、结果解释及误差分析。通过进一步的实践和提高,掌握各种 CAD 软件接口和二次开发工具,可以解决复杂多场耦合工程问题。本书在编写过程中,注意尽量避开深奥的数学理论,从简单结构的物理模型入手,力求做到深入浅出、概念清晰、循序渐进,便于初学者理解和掌握。本书在兼顾基础知识的同时,强调实用性、可操作性和知识的新颖性,系统地介绍了 ANSYS 软件的基本功能和工程应用,包括几何建模技术、网格划分与有限元建模技术、施加载荷与求解过程、结果后处理技术等。本书坚持理论与实践紧密结合的原则,将有限元理论与 ANSYS 操作糅合在一起,大部分章都编写了上机作业,有助于学生对于有限元理论的理解和熟悉 ANSYS 软件的应用。全书共分 9 章,第 1 章介绍了有限单元法的数学基础以及有限元法的基本思想和基本理论;第 2 章介绍了 ANSYS 的基本知识、基本操作和有限元分析过程;第 3 章介绍了弹性力学平面问题的有限单元法;第 4 章介绍了轴对称问题的有限单元法;第 5 章介绍了空

间问题的有限单元法；第6章讲述了等参数单元和数值积分；第7章介绍了杆梁结构的有限单元法；第8章介绍了有限单元法应用中的若干实际考虑，包括自由度耦合与约束方程的基本知识与基本操作以及几种现代非协调单元；第9章介绍了热传导问题的有限单元法。

由于编写时间仓促，加之水平所限，书中疏漏之处在所难免。如在学习和上机实践过程中发现问题或有改进建议，欢迎广大读者和同行批评斧正。

编著者

2013年3月

冶金工业出版社部分图书推荐

书 名	作 者	定价(元)
数学建模入门	焦云芳 编著	20.00
有限元简明教程	赵 奎 等编著	28.00
数学规划及其应用(第3版)	范玉妹 等编著	49.00
数值分析(第2版)	张 铁 等编	22.00
张量和连续介质力学	黄宝宗 编著	69.00
数学物理方程	魏培君 编著	20.00
实用数学分析教程	刘春风 等编著	26.00
实用数学分析解题指导	刘春风 等编著	19.00
高等数学	程海棠 等编著	30.00
新编高等数学	黄开兴 主编	38.00
高等数学习题集	马 颖 主编	18.00
线性代数	苏醒侨 等著	28.00
概率统计	刘筱萍 等编	16.00
模糊数学及其应用(第2版)	李安贵 等编著	22.00
结构分析有限元法的基本原理及工程应用	陈道礼 等编著	55.00
金属塑性加工有限元模拟技术与应用	刘建生 编著	35.00
无缝钢管减径过程的有限元虚拟仿真集成系统	许志强 等著	18.00
冶金工程数学模型及应用基础	张延玲 编著	28.00
热轧棒线材力学性能数学模型的建立	张 海 等著	26.00
冶金反应工程学丛书		
冶金传输原理基础	沈颐身 等著	38.00
钢的精炼过程数学物理模拟	朱苗勇 等著	24.00
连续铸钢过程数学物理模拟	千 勇 等著	45.00
高炉过程数学模型及计算机控制	毕学工 著	28.00

目 录

1 有限单元法的数学基础	1
1.1 工程分析中的数值分析方法	1
1.2 微分方程的等效积分形式	3
1.2.1 控制微分方程	3
1.2.2 微分方程的等效积分形式	4
1.3 加权残值法的基本概念	5
1.4 虚功原理	6
1.5 有限元方法处理问题的基本步骤	7
1.6 有限元软件的工作模块	8
1.7 关于有限元方法论学习	8
本章小结	9
复习思考题	10
2 ANSYS 命令基础及其操作步骤	11
2.1 分析基本流程	11
2.2 ANSYS 的架构及命令	12
2.3 ANSYS 的启动	13
2.4 单位系统	13
2.5 坐标系统	14
2.5.1 总体坐标系	14
2.5.2 局部坐标系	14
2.5.3 激活坐标系	14
2.5.4 工作平面坐标系	14
2.5.5 结点坐标系	14
2.5.6 单元坐标系	15
2.5.7 结果坐标系	15
2.5.8 显示坐标系	15
2.5.9 激活坐标系	15
2.6 建立模型	15
2.6.1 指定作业名和分析标题	16
2.6.2 定义计算单位	16

2.6.3	定义单元的类型	16
2.6.4	定义单元实常数	17
2.6.5	定义和创建横截面	17
2.6.6	定义材料特性	17
2.6.7	创建几何模型	17
2.6.8	布尔运算	18
2.6.9	其他运算	20
2.7	单元网格划分	21
2.7.1	单元属性设定	21
2.7.2	划分网格概述	22
2.7.3	网格划分基本原则	22
2.7.4	ANSYS 提供的网格划分方法	23
2.8	选择	24
2.9	加载和求解	25
2.9.1	定义分析类型和分析选项	25
2.9.2	加载	25
2.9.3	加载应注意的问题	25
2.9.4	将压力载荷施加于梁上	26
2.9.5	体积载荷	26
2.9.6	惯性载荷	27
2.10	后处理	27
2.10.1	通用后处理器 (General Postproc)	27
2.10.2	时间历程后处理器 (TimeHist Postproc)	27
2.10.3	将计算结果旋转到不同坐标系中	27
2.10.4	ANSYS 输出图片处理	28
2.11	开发 ANSYS 功能	29
	本章小结	29
	复习思考题	30
	上机作业	31
3	弹性力学平面实体的有限单元法	39
3.1	弹性力学平面问题的基本方程	39
3.1.1	基本变量	39
3.1.2	平面应力和平面应变问题	41
3.1.3	平衡方程	41
3.1.4	几何方程	42
3.1.5	物理方程	42
3.2	单元分类	43

3.2.1 连续介质实体单元的形状	43
3.2.2 结构单元形状	43
3.2.3 连续介质实体单元的特点	44
3.2.4 结构单元的特点	44
3.3 平面问题三结点三角形单元的有限元格式	44
3.3.1 三结点三角形单元的形函数	44
3.3.2 单元载荷移置	47
3.3.3 单元刚度矩阵	49
3.3.4 单元刚度矩阵的性质与物理意义	51
3.3.5 单元刚度矩阵的性质	52
3.3.6 整体分析步骤	52
3.3.7 刚度矩阵组装的物理意义	53
3.3.8 刚度矩阵组装的规则	53
3.3.9 约束条件的处理	55
3.3.10 整体刚度矩阵的特点与存储方法	55
3.4 线性代数方程组解法	56
3.5 有限元解的收敛性	57
3.6 六结点三角形单元	58
3.7 矩形四结点单元	58
3.8 有限元解的误差	59
本章小结	59
复习思考题	60
上机作业	61
4 弹性力学轴对称问题的有限单元法	65
4.1 弹性力学轴对称问题的有限元方程	65
4.2 轴对称三结点单元位移函数	67
4.3 轴对称三结点单元刚度矩阵	68
4.4 轴对称单元的结点载荷移置	70
4.5 ANSYS 对于轴对称问题建模的要求	70
本章小结	71
复习思考题	71
上机作业	71
5 弹性力学空间问题的有限单元法	76
5.1 三维空间线弹性问题的应力应变关系	76
5.2 常应变四面体单元	77
5.2.1 位移函数	77

5.2.2 应变矩阵	77
5.2.3 单元刚度矩阵	78
5.2.4 单元等效结点载荷列阵	78
5.3 八结点立方体单元	78
本章小结	80
复习思考题	81
上机作业	81
6 等参数单元和数值积分	94
6.1 平面四边形四结点等参数单元	94
6.1.1 自然坐标系中的母单元和形函数	94
6.1.2 结点位移值内插方式	95
6.1.3 实际单元与母单元之间的坐标变换	95
6.1.4 收敛性分析	96
6.2 四边形四结点等参数单元公式	97
6.2.1 Jacobi 矩阵 $[J]$ 及其逆阵 $[J]^{-1}$	97
6.2.2 求导公式	98
6.2.3 应变矩阵	98
6.2.4 单元刚度矩阵	99
6.2.5 体力的移置	99
6.2.6 分布面力的移置	99
6.3 八结点四边形等参数单元	99
6.3.1 自然坐标的形函数	99
6.3.2 实际单元和坐标变换	100
6.3.3 Jacobi 矩阵	100
6.3.4 单元内假设的位移场	100
6.3.5 收敛性分析	101
6.3.6 精度分析	101
6.4 平面三角形单元与面积坐标	102
6.5 数值积分	104
6.5.1 问题的提出	104
6.5.2 一维高斯积分方法	104
6.5.3 二维的高斯积分方法	105
6.5.4 三维高斯积分方法	105
6.5.5 三角形单元的数值积分方法	106
6.6 积分阶数选择要考虑的因素	107
6.6.1 积分精度	107
6.6.2 完全积分与剪切锁闭现象	109

6.6.3 避免产生剪切锁闭现象的措施	111
6.6.4 沙漏现象与零变形能模式	111
6.7 空间等参数单元的有限元列式	113
6.7.1 坐标变换	113
6.7.2 位移模式	114
6.7.3 应变、应力计算方法	115
6.8 空间问题的其他单元类型	116
6.8.1 四面体四结点单元	116
6.8.2 四面体十结点单元	118
6.8.3 五面体六结点单元	119
6.8.4 六面体八结点单元	119
本章小结	120
复习思考题	121
上机作业	121
7 杆梁结构的有限单元法	127
7.1 杆单元概念	127
7.2 平面杆单元分析	128
7.3 平面杆单元坐标变换	129
7.4 平面杆单元刚度矩阵的性质	131
7.5 总体刚度矩阵的组装	131
7.5.1 结点平衡条件	131
7.5.2 扩大的单元刚度矩阵	132
7.5.3 组装总体刚度矩阵	133
7.5.4 引入位移约束条件	134
7.5.5 解有限元方程	134
7.6 框架与梁单元	136
7.6.1 梁单元的概念及其分类	136
7.6.2 欧拉-伯努利梁单元	137
7.6.3 铁木辛柯梁单元	138
7.6.4 ANSYS 梁单元的横截面方位设置	138
7.7 ANSYS 屈曲分析方法	139
7.7.1 线性屈曲分析方法	139
7.7.2 非线性屈曲分析方法	140
本章小结	142
复习思考题	142
上机作业	143

8 有限单元法应用中的若干实际考虑	149
8.1 自由度耦合与约束方程	149
8.2 ANSYS 耦合自由度的方法	150
8.3 应力计算结果的性质与应力平滑处理	151
8.4 Wilson 非协调单元	153
8.4.1 Wilson 非协调单元内假设位移场	154
8.4.2 Wilson 非协调单元特性	154
8.4.3 单元分析与静态凝聚	155
8.5 非协调单元的收敛性和分片试验	157
8.6 u/p 混合插值单元与选择积分	159
8.6.1 u/p 混合单元公式	159
8.6.2 u/p 混合单元的压力场	161
8.7 增强应变单元	163
8.7.1 增强应变场	163
8.7.2 增强应变单元公式	164
8.8 单元类型及网格划分与计算精度的关系	165
8.9 应力奇异性的处理	167
本章小结	168
复习思考题	169
上机作业	169
9 热传导问题的有限单元法与 ANSYS 热分析	182
9.1 热传导方程与换热边界条件	182
9.2 稳态温度场分析的一般有限元列式	183
9.3 瞬态热传导问题	186
9.3.1 瞬态热传导问题的基本方程与时间积分步	186
9.3.2 瞬态温度场的有限元列式	187
9.3.3 时间积分算法	188
9.4 ANSYS 稳态热分析的基本过程	188
9.4.1 建模	189
9.4.2 施加载荷计算	189
9.4.3 后处理	190
9.5 ANSYS 瞬态热分析的基本过程	190
9.5.1 载荷步、子步和迭代次数	190
9.5.2 模型初始温度设定	190
9.5.3 ANSYS 瞬态分析的命令流程	191
9.6 ANSYS 热-应力耦合场分析	193

9.6.1 直接耦合与间接耦合的概念	194
9.6.2 ANSYS 热-应力耦合的直接方法	194
9.6.3 ANSYS 热-应力耦合的间接方法	195
9.6.4 ANSYS 热-应力顺序耦合的基本步骤	196
9.6.5 热-应力分析流程图	197
本章小结	197
复习思考题	199
上机作业	199
参考文献	215

1 有限单元法的数学基础

本章学习要点

本章主要介绍工程分析中的数值分析方法以及计算机辅助工程分析的基本知识。要求了解微分方程的等效积分弱形式的概念。熟悉有限元方法的组成模块和计算流程。了解加权残值法和虚功原理在构建有限元列式中的作用。

1.1 工程分析中的数值分析方法

为了有效及经济地设计、构建以及运行一个工程系统，工程师必须首先对这些工程系统的行为（包括结构特性、内部环节及其子系统），具有充分的认识。这个过程就是工程分析。图 1-1 所示为传统工程分析步骤，五个方块分别代表不同分析阶段的模型，而四个圆圈分别代表四个分析步骤。注意，这五个模型事实上是同一事情的不同表示方式：工程系统指的是真实世界中的实物，分析模型往往是一个简化的抽象模型。数学方程式常常具有微分方程组的形式，其解答可以是解析解或是数值解。如果是数值解则分析模型可以称为数值模型。

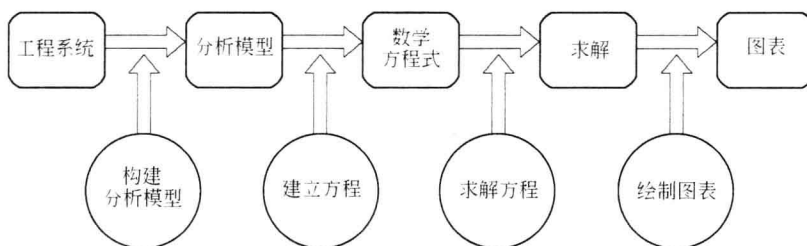


图 1-1 传统工程分析步骤

针对实际的工程问题推导相关微分方程组并不十分困难，然而，要获得问题的解析解却很困难。目前，在工程实践中，人们多采用数值方法给出近似满足工程精度要求的解答。

现代工程师在进行工程分析时，多采用计算机辅助工程（CAE）分析方法来完成图 1-2 所描述的步骤中的许多工作。如果对于数学方法或计算机辅助工程分析专业知识不熟悉，可以将“建立方程组”及“解方程式”这两个分析步骤及其前后相关的模型（分析模型、数学方程式及数值解答）用一个“黑箱”包装起来。这个黑箱代表一个封闭的计算机处理核心：计算机会全自动地将一个分析模型转换成数学方程式，并且方便地求解。输入数据在黑箱外部注入，而最后的数值结果也在黑箱外部以图形方式表示。

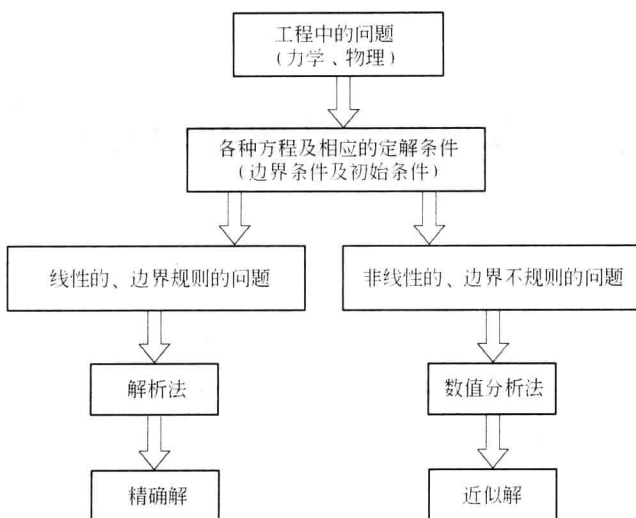


图 1-2 工程问题的求解思路

图 1-3 所示为计算机辅助工程分析的步骤，黑箱内部代表一个求解工程问题的计算机程序：以一个分析模型为输入，而以数值解为输出。半个世纪以来，力学家与数学家以及计算机专家齐心协力，发展出了一系列求解工程问题中的微分方程的方法，如有限差分法 (finite difference method, FDM)、有限元法 (finite element method, FEM)、边界元法 (boundary element method, BEM) 等。这些方法本质上是求解区域进行网格离散化，然后通过求解方程获得数值结果。目前，发展最成熟、应用最广泛的是有限元法。

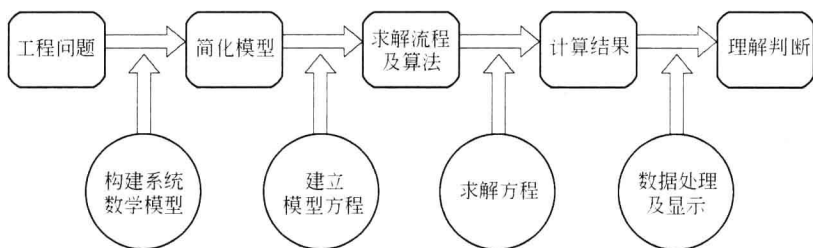


图 1-3 计算机辅助工程分析的步骤

综上所述，可以把计算机辅助工程分析由图 1-2 改成图 1-3。当采用有限元分析方法时，图 1-4 就是图 1-2 的特殊情形。图 1-4 中，分析模型（或有限元模型）和数值求解还

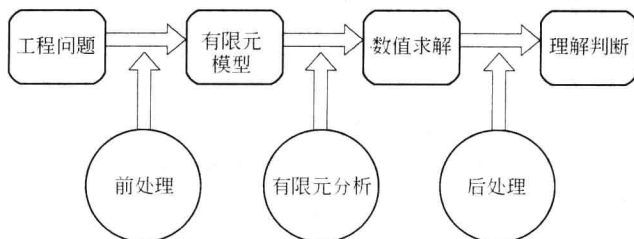


图 1-4 有限元方法进行计算机辅助工程分析的步骤

是在黑箱里面,“建立模型方程”及“求解方程”两个步骤用“有限元分析”来取代。“构建系统数学模型”步骤常称为“前处理”,而“数据处理及显示”步骤常称为“后处理”。所以在图 1-4 中,通常把计算机辅助工程分析分成三个主要步骤:前处理 (preprocessing)、有限元分析 (finite element analysis) 及后处理 (postprocessing)。

1.2 微分方程的等效积分形式

1.2.1 控制微分方程

有限元方法是处理偏微分方程边值问题的最有效的数值方法之一。许多工程问题的本质是物理问题,可以利用所谓控制微分方程 (governing differential equation) 描述其物质变化的本质过程。如考虑到空间、时间、时滞的确定性条件,则形成可以求解的边值以及初始条件:

$$\underline{\mathbf{A}}(\underline{u}) + \underline{f}(\underline{x}, t) = \begin{Bmatrix} \underline{\mathbf{A}}_1(\underline{u}) \\ \underline{\mathbf{A}}_2(\underline{u}) \\ \vdots \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \underline{f}_1(\underline{x}, t) \\ \underline{f}_2(\underline{x}, t) \\ \vdots \end{Bmatrix} = 0, \quad \underline{x} \in \Omega \quad (1-1)$$

式中, $\underline{\mathbf{A}}$ 为微分方程中对于基本未知函数 $\underline{u}$ 的微分算子。

例如,波动方程的形式为:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \cdot \Delta u = 0$$

其中,微分算子 Δ 表示为:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

这些控制微分方程应当满足给定的边界条件和初始条件。一般而言,边界条件可以分为:

- (1) 本质边界条件或者狄里克雷边界条件 (essential boundary condition);
- (2) 自然边界条件或黎曼边界条件 (natural boundary condition);
- (3) 混合边界条件或者柯西边界条件。

对于自然边界条件,一般在积分表达式中可自动得到满足。以位移为基本未知量的弹性力学有限元方法中,自然边界条件可以表示为基本未知函数 $\underline{u}$ 在指定边界处的值为已知:

$$\underline{u} - \bar{u} = 0, \quad \underline{x} \in \Gamma_u \quad (1-2)$$

式中, Γ_u 为在边界 Γ 上位移函数值已经指定的边界段。

对于本质边界条件,基本未知函数 $\underline{u}$ 在指定边界处对于基本变量 $\underline{x}$ 的导数值为已知:

$$\underline{\mathbf{B}}(\underline{u}) + \underline{g}(\underline{x}, t) = \begin{Bmatrix} \underline{\mathbf{B}}_1(\underline{u}) \\ \underline{\mathbf{B}}_2(\underline{u}) \\ \vdots \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \underline{g}_1(\underline{x}, t) \\ \underline{g}_2(\underline{x}, t) \\ \vdots \end{Bmatrix} = 0, \quad \underline{x} \in \Gamma_B \quad (1-3)$$

式中, $\underline{\mathbf{B}}$ 为微分算子, 在边界 Γ_B 上, 函数的导数值指定。

1.2.2 微分方程的等效积分形式

方程式(1-1)、式(1-2)和式(1-3)在域内与权函数 $\underline{\mathbf{V}}$ 相乘, 在边界上与权函数 $\overline{\underline{\mathbf{V}}}$ 相乘, 就得到等效积分形式:

$$\int_{\Omega} \underline{\mathbf{V}}^T \underline{\mathbf{A}}(\underline{\mathbf{u}}) d\Omega + \int_{\Gamma} \overline{\underline{\mathbf{V}}}^T \underline{\mathbf{B}}(\underline{\mathbf{u}}) d\Gamma = 0 \quad (1-4)$$

进一步对式(1-4)进行分部积分, 就得到等效积分的“弱形式”(weak form):

$$\int_{\Omega} \underline{\mathbf{C}}^T(\underline{\mathbf{V}}) \underline{\mathbf{D}}(\underline{\mathbf{u}}) d\Omega + \int_{\Gamma} \underline{\mathbf{E}}(\overline{\underline{\mathbf{V}}})^T \underline{\mathbf{F}}(\underline{\mathbf{u}}) d\Gamma = 0 \quad (1-5)$$

所谓“弱形式”, 是指分步积分后, 算子 $\underline{\mathbf{D}}$ 导数阶次较原来的算子 $\underline{\mathbf{A}}$ 导数阶次降低, 这样对于基本未知变量 $\underline{\mathbf{u}}$ 的连续性要求降低, 也就是对其连续性起到了弱化作用的等效积分形式。应当注意, 将原控制微分方程转化为弱形式, 这个“弱”并不是弱化对方程解的结果, 而是弱化对方程的要求, 具体就是弱化基本未知变量 $\underline{\mathbf{u}}$ 的连续性要求。当然这种弱化是以提高权函数 $\underline{\mathbf{V}}$ 和 $\overline{\underline{\mathbf{V}}}$ 的连续性要求为代价的。

例如, 二维稳态热传导问题的微分方程:

$$A(T) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + Q = 0, \quad x, y \in \Omega \quad (1-6)$$

式中, T 为温度; k_x 和 k_y 分别为 x 和 y 方向的热传导系数; Q 为热源密度。

热边界条件为:

$$B(T) = \begin{cases} T - \bar{T} = 0 & (\text{在 } \Gamma_T \text{ 上}) \\ k_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y - \bar{q} = 0 & (\text{在 } \Gamma_q \text{ 上}) \end{cases} \quad (1-7)$$

式中, $\bar{T}$ 和 $\bar{q}$ 分别为边界 Γ_T 和 Γ_q 上温度和热流通量的指定值; n_x 和 n_y 分别为边界沿 x 和 y 方向的外法线方向余弦。

式(1-6)与式(1-7)的等效积分形式为:

$$\int_{\Omega} \underline{\mathbf{V}}^T \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + Q \right] d\Omega + \int_{\Gamma_q} \overline{\underline{\mathbf{V}}}^T \left[k_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y - \bar{q} \right] d\Gamma = 0 \quad (1-8)$$

式中, $\underline{\mathbf{V}}$ 和 $\overline{\underline{\mathbf{V}}}$ 分别为域内和边界上的权函数, 同时还在边界上满足条件:

$$T - \bar{T} = 0 \quad (1-9)$$

经分步积分运算, 可以得到等效的积分弱形式为:

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \underline{\mathbf{V}}^T}{\partial x} k_x \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \underline{\mathbf{V}}^T}{\partial y} k_y \frac{\partial T}{\partial y} - \underline{\mathbf{V}} Q \right) d\Omega + \int_{\Gamma} \overline{\underline{\mathbf{V}}}^T \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y \right) d\Gamma + \\ & \int_{\Gamma_q} \overline{\underline{\mathbf{V}}}^T \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y - \bar{q} \right) d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (1-10)$$