高等数学（下）

李春明　张国栋　李桂范◆主编

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS
黑龍江大學出版社
HEILONGJIANG UNIVERSITY PRESS

高等数学(下)

李春明　张国栋　李桂范◆主编

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS
黑龙江大学出版社
HEILONGJIANG UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下 / 李春明, 张国栋, 李桂范主编. -- 哈尔滨 : 黑龙江大学出版社 ; 北京 : 北京大学出版社, 2013.7

ISBN 978-7-81129-639-6

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①李… ②张… ③李… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 164420 号

高等数学(下)
GAODENG SHUXUE(XIA)
李春明　张国栋　李桂范　主编

责任编辑　张永生　王选宇
出版发行　北京大学出版社　黑龙江大学出版社
地　　址　北京市海淀区成府路 205 号　哈尔滨市南岗区学府路 74 号
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　720×1000　1/16
印　　张　23.5
字　　数　465 千
版　　次　2013 年 7 月第 1 版
印　　次　2013 年 7 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-81129-639-6
定　　价　36.00 元

前言

随着科学技术的迅速发展，数学已被广泛地应用到相关的科学领域及生产实践中，微积分已成为现代数学的基石. 目前，我国的高校都将高等数学作为一门重要的基础课程，本教材是在吸收国内外同类教材精华的基础上，针对理工科相关专业的特点编写的. 它具有编排合理、语言精练、条理清晰等特点.

本教材注重了对微积分的基本思想与基本方法的介绍，力求简洁、明了；同时在编写过程中，考虑到相关学科知识结构的需要，对一些概念、方法尽可能地结合几何与物理学等知识加以解释和应用举例. 在为其他学科奠定良好基础的同时，使学生的数学素养与能力得到提高.

本书中标记 * 的内容为选讲部分，主讲教师可以根据不同专业、不同学时的授课对象的需要而适当删减. 对数学要求较高的专业，原则上可讲授本教材的全部内容.

本书第 8 章及参考答案部分由张国栋编写，第 9 章由李春明编写，第 10—11 章由李桂范编写. 全书的统稿工作由李春明完成.

本书的出版得到了黑龙江大学出版社和黑龙江大学数学科学学院有关领导的大力支持，得到了黑龙江省重点专业建设经费的资助，作者在此表示衷心感谢. 此外，作者的同事杨兴云、刘艳滨、王艳涛等同志和 2011 级硕士研究生肖金梅为本书作了部分校稿工作，在此一并致谢.

由于编者水平所限，同时编写时间也比较仓促，因此教材中难免存在不足之处，敬请广大读者给予批评与指正，以便进一步完善.

作　者

2013 年 3 月于哈尔滨

内容简介

本书分上、下两册. 上册内容包括函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、一元函数的积分学、定积分的应用、向量代数与空间解析几何简介；下册内容包括多元函数的微分学及其应用、多元函数的积分学及其应用、无穷级数、常微分方程.

本书可作为高等院校理工科 (非数学类) 及相关专业的教材，也可作为教师、学生和工程技术人员的参考书.

目录

第 8 章　多元函数的微分学及其应用

在自然科学与工程技术中，经常遇到自变量的个数是两个或两个以上的函数，称其为多元函数. 本章将在一元函数微分学的基础上，以二元函数为例讨论多元函数的微分学及其应用，二元以上的函数只类似地给出相应的结论.

8.1　多元函数的基本概念

在讨论一元函数微分学时，所涉及到的概念与理论都建立在实数集 $\mathbb{R}$ 中的两点间的距离、邻域以及区间等概念的基础上. 为了讨论多元函数的需要，我们首先将这些概念推广到实数集的积集 $\mathbb{R}^n$ 中，并给出 n 维 Euclid① 空间的概念.

8.1.1　n 维 Euclid 空间

在第 7 章第 1 节中我们知道，空间中的点 P 与有序三元实数组 (x_1, x_2, x_3) 之间可以建立一一对应关系，这样在数学上可以把有序三元实数组 (x_1, x_2, x_3) 与点 P 视为等同的. 空间中所有点构成的集合常用积集 $\mathbb{R}^3$ 表示，即

$$\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1,\ x_2,\ x_3 \in \mathbb{R}\},$$

而 $\mathbb{R}^3$ 中的元素 (x_1, x_2, x_3) 也称为点或三维向量；称坐标原点 $(0,0,0)$ 为零点或三维零向量. 为了表述方便，常将 $\mathbb{R}^3$ 中的元素 (x_1, x_2, x_3) 简记为 x, 即

$$x = (x_1, x_2, x_3).$$

此时 (x_1, x_2, x_3) 称为 x 的坐标形式.

集合 $\mathbb{R}^3$ 中的元素可以按空间解析几何中的两点间距离来定义两个元素之间的距离，即对 $\mathbb{R}^3$ 中的任意两点 $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$, 称实数

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$$

为点 x 与 y 的距离，记为 $\|x - y\|_3$ 或 $\|x - y\|$.

集合 $\mathbb{R}^3$ 中的元素可以按三维向量的加法和数乘运算来定义元素的线性运算，即对 $\mathbb{R}^3$ 中的任意两点 $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ 及任意的实数 λ, 规定加法和数乘运算为

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3),$$

$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3).$$

① Euclid, 欧几里德，约公元前 330— 公元前 275.

如果集合 $\mathbb{R}^3$ 按上述方式定义了两点间的距离及元素的线性运算，则称 $\mathbb{R}^3$ 为三维 Euclid 空间，简称为 $\mathbb{R}^3$ 空间.

类似地可定义 n 维 Euclid 空间.

设 n 是正整数，且 $n \geqslant 2$. 用 $\mathbb{R}^n$ 表示 n 元有序实数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的全体构成的集合，即

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \cdots, n\}.$$

对任意的 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, 规定两点之间的距离为

$$\|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

对任意的 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ 及 $\lambda \in \mathbb{R}$, 规定线性运算为

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n),$$

$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n).$$

如果 $\mathbb{R}^n$ 按上述方式定义了距离及线性运算，则称 $\mathbb{R}^n$ 为 n 维 Euclid 空间，简称为 $\mathbb{R}^n$ 空间.

特别地，$\mathbb{R}^1$、$\mathbb{R}^2$、$\mathbb{R}^3$ 都有明显的几何意义，分别表示数轴、平面及空间，而 $\mathbb{R}^1$、$\mathbb{R}^2$、$\mathbb{R}^3$ 的点集分别称为实数集、平面点集、空间点集. 通常将 $\mathbb{R}^1$ 记为 $\mathbb{R}$.

本教材主要在平面 $\mathbb{R}^2$ 和空间 $\mathbb{R}^3$ 上讨论问题，除特别说明外均使用几何中的表示方法，将 $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ 分别表示为

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x,\ y \in \mathbb{R}\}, \quad \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x,\ y,\ z \in \mathbb{R}\}.$$

用 $P(x, y)$ 表示 $\mathbb{R}^2$ 中以 x 为第一个分量，以 y 为第二个分量的点，记为 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ 或 $P(x, y) \in \mathbb{R}^2$, 用 $|P_1P_2|$ 或 $|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)|$ 表示 $P_1(x_1, y_1)$ 与 $P_2(x_2, y_2)$ 之间的距离，即

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

或

$$|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2};$$

用 $P(x, y, z)$ 表示 $\mathbb{R}^3$ 中以 x 为第一个分量，以 y 为第二个分量，以 z 为第三个分量的点，记为 $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ 或 $P(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. 用 $|P_1P_2|$ 或 $|(x_1, y_1, z_1) - (x_2, y_2, z_2)|$ 表示点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 与点 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 之间的距离，即

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

或

$$|(x_1, y_1, z_1) - (x_2, y_2, z_2)| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

8.1.2 $\mathbb{R}^2$ 空间中的点集

利用距离的定义，仿照实数集我们可以在 $\mathbb{R}^2$ 中定义邻域、内点、开集等概念.

定义 8.1.1 设 $P_0(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, $\delta>0$, 称集合

$$\{(x,y)\mid |(x,y)-(x_0,y_0)|<\delta\}$$

为点 P_0 的 δ 邻域或点 P_0 的邻域，记为 $U(P_0,\delta)$ 或 $U(P_0)$; 称集合

$$\{(x,y)\mid 0<|(x,y)-(x_0,y_0)|<\delta\}$$

为点 P_0 的去心 δ 邻域或点 P_0 的去心邻域，记为 $\overset{\circ}{U}(P_0,\delta)$ 或 $\overset{\circ}{U}(P_0)$.

定义 8.1.2 设 E 是 $\mathbb{R}^2$ 的子集，且 $P_0(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$.

1. 如果存在 $\delta>0$, 使得 $U(P_0,\delta)\subset E$, 则称点 P_0 为 E 的内点； E 的内点全体构成的集合称为 E 的内部，记为 E°; 如果 E 中的每一点均为 E 的内点，即 $E\subset E^\circ$, 则称 E 为 $\mathbb{R}^2$ 中的开集.

2. 如果存在 $\delta>0$, 使得 $U(P_0,\delta)\cap E=\emptyset$, 则称点 P_0 为 E 的外点.

3. 如果 P_0 既不是 E 的内点，也不是 E 的外点，则称 P_0 为 E 的边界点； E 的边界点全体构成的集合称为 E 的边界，记为 ∂E; 称 $E\cup\partial E$ 为 E 的闭包，记为 $\overline{E}$.

4. 如果 $F\subset\mathbb{R}^2$, 且 $\mathbb{R}^2-F$ 为开集，则称 F 为闭集.

5. 如果 E 内的任何两点都可以用折线连接起来，并且该折线上的点都属于 E, 则称 E 为连通集.

6. 如果 E 为非空的开集，并且是连通集，则称 E 为开区域，简称为区域；如果 E 是开区域，则称 $E\cup\partial E$ 为闭区域.

7. 如果存在 $\eta>0$, 使得 $E\subset U(0,\eta)$, 则称 E 为有界集，否则称 E 为无界集.

关于定义 8.1.2 作如下说明：

(1) $U(P_0,\delta)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的开区域，且 $U(P_0,\delta)$ 表示平面 $\mathbb{R}^2$ 上以 P_0 为圆心、以 δ 为半径的开圆 (不包含圆周的圆).

(2) 对于 $\mathbb{R}^2$ 的任意一个子集 E 来说， E 的边界点可以属于 E 也可以不属于 E, 但 E 的内点一定属于 E, E 的外点一定不属于 E.

(3) 对于 $\mathbb{R}^2$ 的任意一个子集 E 来说，显然有 $E^\circ\subset E\subset\overline{E}$. 例如， $\mathbb{R}^2$ 中开圆 $U(P_0,\delta)$ 的边界为

$$\partial U(P_0,\delta)=\{(x,y)\mid |(x,y)-(x_0,y_0)|=\delta\};$$

$U(P_0,\delta)$ 的闭包为 $\overline{U(P_0,\delta)}$(通常称 $\overline{U(P_0,\delta)}$ 为闭圆), 即

$$\overline{U(P_0,\delta)}=\{(x,y)\mid |(x,y)-(x_0,y_0)|\leqslant\delta\}.$$

(4) $\mathbb{R}^2$ 中定义的邻域、内点、开集等概念可以类似地推广到 $\mathbb{R}^n$ 空间中. 例如，设 $P_0(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$, $\delta>0$, 则称集合

$$\{(x,y,z)\mid |(x,y,z)-(x_0,y_0,z_0)|<\delta\}$$

为点 P_0 的 δ 邻域或点 P_0 的邻域，记为 $U(P_0,\delta)$ 或 $U(P_0)$; 称集合

$$\{(x,y,z)\mid 0<|(x,y,z)-(x_0,y_0,z_0)|<\delta\}$$

为点 P_0 的去心 δ 邻域或点 P_0 的去心邻域，记为 $\overset{\circ}{U}(P_0,\delta)$ 或 $\overset{\circ}{U}(P_0)$.

特别地，$U(P_0,\delta)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的开区域，且 $U(P_0,\delta)$ 表示空间 $\mathbb{R}^3$ 中以 P_0 为球心、以 δ 为半径的开球 (不包含球面的球).

下面给出 $\mathbb{R}^2$ 空间中的点列及其极限的概念.

如果 $P_n(x_n,y_n)\in\mathbb{R}^2$ $(n\in\mathbb{Z}^+)$, 则称集 $\{(x_n,y_n)\mid (x_n,y_n)\in\mathbb{R}^2,\ n\in\mathbb{Z}^+\}$ 为 $\mathbb{R}^2$ 中的点列，记为 $\{(x_n,y_n)\}$ 或 $\{P_n\}$. 如果 $P_0(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, 且

$$\lim_{n\to\infty}|P_nP_0|=\lim_{n\to\infty}|(x_n,y_n)-(x_0,y_0)|=0,$$

则称点列 $\{(x_n,y_n)\}$ 收敛于 (x_0,y_0), 记为 $(x_n,y_n)\to(x_0,y_0)$ $(n\to\infty)$, 或称点列 $\{P_n\}$ 收敛于 P_0, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n=P_0$.

由点列收敛的定义可知，$\{(x_n,y_n)\}$ 收敛于 (x_0,y_0) 的充分必要条件为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x_0,\quad \lim_{n\to\infty}y_n=y_0.$$

类似地，可以给出 $\mathbb{R}^n$ 空间中相应的概念和结论.

8.1.3　多元函数的概念

定义 8.1.3 设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 的非空子集，称映射 $f:D\to\mathbb{R}$ 为定义在 D 上的 n 元函数，记为

$$u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\ \ ((x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D),$$

其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 均称为自变量，u 称为因变量；称点集 D 为 n 元函数 f 的定义域，称数集 $f(D)$ 为 n 元函数 f 的值域；称点集

$$\{(x_1,x_2,\cdots,x_n,f(x_1,x_2,\cdots,x_n))\mid (x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D\}$$

为 n 元函数 f 的图像或图形，记为 $G_f(D)$.

关于定义 8.1.3 我们作以下的补充说明:

(1) 在定义 8.1.3 中，如果 D 中的点表示为 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 则 n 元函数 f 可写为

$$u=f(P)\ \ (P\in D).$$

(2) 定义 8.1.3 中，当 $n=1$ 时，n 元函数就是一元函数；当 $n \geqslant 2$ 时，n 元函数统称为多元函数. 特别地，当 $n=2$ 时，常用 x, y 表示自变量，z 表示对应的函数值，而把二元函数写为

$$z = f(x,y) \quad ((x,y) \in D);$$

当 $n=3$ 时，常用 x, y, z 表示自变量，而把三元函数写为

$$u = f(x,y,z) \quad ((x,y,z) \in D).$$

(3) 求多元函数的定义域的方法与一元函数是一致的. 如果给定了函数解析式，其定义域就是使该解析式有意义的点的全体构成的集合. 如果是实际问题，除使解析式有意义外，还要结合实际问题的意义来确定.

例如，函数 $V = xyz$ 的定义域为 $\mathbb{R}^3$; 而当 x、y、z 表示某一长方体的棱长，V 表示该长方体的体积时，此时 $V = xyz$ 的定义域为 $\{(x,y,z) \mid x>0,\ y>0,\ z>0\}$.

(4) 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，二元函数 $z=f(x,y)$ 的图像 (图 8.1.1) 是一个曲面，该曲面在 xOy 面上的投影就是该函数的定义域 D.

例如，二元函数

$$z = \sqrt{1-x^2-y^2} \quad ((x,y) \in D)$$

的图像 (图 8.1.2) 是上半球面，其定义域就是 xOy 面上的区域

$$D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant 1\}.$$

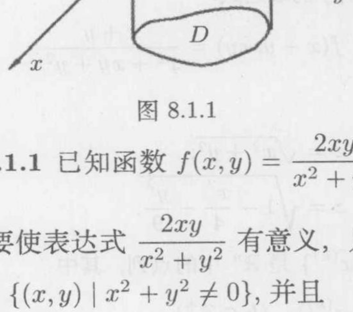

图 8.1.1

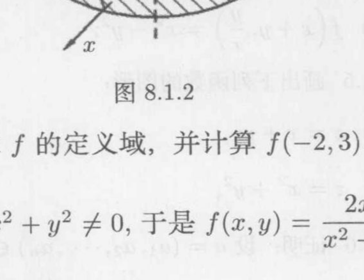

图 8.1.2

例 8.1.1 已知函数 $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$, 求 f 的定义域，并计算 $f(-2,3)$.

解 要使表达式 $\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ 有意义，只需 $x^2+y^2 \neq 0$, 于是 $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ 的定义域为 $\{(x,y) \mid x^2+y^2 \neq 0\}$, 并且

$$f(-2,3) = \frac{2 \times (-2) \times 3}{(-2)^2+3^2} = -\frac{12}{13}.$$

(5) n 元函数

$$u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad ((x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D)$$

的表达式中，不要求所有自变量 $x_i\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ 都出现．例如，三元函数

$$f(x, y, z) = \frac{2xy}{x^2 + y^2} \quad ((x, y, z) \in \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \neq 0,\ z \in \mathbb{R}\}).$$

(6) 多元初等函数是指可用一个算式表示的多元函数，该算式是由常数及具有不同自变量的一元基本初等函数经过有限次四则运算和复合运算而得到的．例如

$$x^2 + y^2 + z^2, \quad \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, \quad \ln \frac{1}{x + y}, \quad \mathrm{e}^{x^2 y \sqrt{z}}$$

等都是多元初等函数．

在今后讨论问题时，一般情况下均以二元函数或三元函数为例．

习题　8.1

8.1.1　求下列函数的定义域 D, 指出 D 是否为开集、闭集、区域 (开区域或闭区域)、有界集、无界集及 D 的边界，并画出 D 的图形：

(1) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 1)$;　　(2) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$;

(3) $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{(x - 1)(y + 1)}}$;　　(4) $z = \ln(y - x^2 + 1)$;

(5) $f(x, y, z) = \sqrt{z - x^2 - y^2}$;　　(6) $f(x, y, z) = \arcsin(x^2 + y^2 + z^2)$.　2

8.1.2　设函数 $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{2xy}$, 求 $f\left(\dfrac{x}{y}, 1\right)$.

8.1.3　设函数 $f(x, y) = A x^{\alpha} y^{1 - \alpha}$, 其中 A, α 是常数，且 $0 < \alpha < 1$, 求证对 $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$, 有

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda f(x, y).$$

8.1.4　设函数 $f(x, y)$ 满足下列条件，求 $f(x, y)$ 的表达式：

(1) $f\left(x + y, \dfrac{y}{x}\right) = x^2 - y^2$;　　(2) $f(x + y, xy) = \dfrac{x + y}{x^2 + xy + y^2}$.

8.1.5　画出下列函数的图形：

(1) $z = x + y$;　　(2) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$;

(3) $z = x^2 + y^2$;　　(4) $z = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9}}$.

8.1.6　证明：设 $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $\{x^{(k)}\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的点列，其中

$$x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)}) \quad (k \in \mathbb{Z}^+),$$

则 $\lim\limits_{k \to \infty} x^{(k)} = a$ 的充要条件是：对每一个 $i\ (i = 1, 2, \cdots, n)$, 有 $\lim\limits_{k \to \infty} x_i^{(k)} = a_i$.

8.2 多元函数的极限与连续

8.2.1 多元函数的极限

首先仿照一元函数极限的定义给出二元函数极限的定义.

定义 8.2.1 设 $f(x,y)$ 是定义在 D 上的二元函数，$(x_0,y_0)\in D'$, A 为常数. 如果对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $(x,y)\in D$, 且

$$0<\|(x,y)-(x_0,y_0)\|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

时，有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon,$$

则称 A 为 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的极限，记为

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A \text{ 或 } \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A \tag{8.2.1}$$

或

$$f(x,y)\to A\quad((x,y)\to(x_0,y_0)). \tag{8.2.2}$$

此时，也称 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 存在；否则称 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 不存在.

关于多元函数极限的定义我们作如下说明：

(1) 在定义 8.2.1 中，如果记 $P_0(x_0,y_0)$，$P(x,y)$, 并且用记号 $P\to P_0$ 来表示 $(x,y)\to(x_0,y_0)$, 则式 (8.2.1) 和式 (8.2.2) 可记为

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A \text{ 或 } f(P)\to A\ (P\to P_0).$$

(2) 仿照二元函数极限的定义可将 n 元函数极限的定义叙述如下：

设 $f(P)$ 是定义在 D 上的 n 元函数，$P_0\in D'$, A 为常数. 如果对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $P\in D$, $0<|PP_0|<\delta$ 时，有

$$|f(P)-A|<\varepsilon,$$

则称 A 为 $f(P)$ 当 $P\to P_0$ 时的极限，记为

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A \text{ 或 } f(P)\to A\ (P\to P_0).$$

为了区别于一元函数的极限，通常把 n 元函数的极限称为 n 重极限.

(3) 多元函数的极限与一元函数的极限不同的是：$\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$ 存在是指当 P 在定义域内以任意方式趋于 P_0 时，$f(P)$ 都趋于 A. 由此可知，如果当 P 在定义域内以两种不同的方式趋于 P_0 时，$f(P)$ 趋于不同的值，或当 P 在定义域内以一种方式趋于 P_0 时，$f(P)$ 的极限不存在，则 $f(P)$ 当 $P\to P_0$ 时的极限不存在.