学第一 考第一 永远争第一

学考第1

教材同步点拨

·北师大课标版·

数学

八年级（上）

主编／于军生

东北师范大学出版社

学第一 考第一 永远争第一

学考第1

教材同步点拨

·北师大课标版·

数学

八年级（上）

主编／于军生

东北师范大学出版社·长春

□本册主编：于军生
□编　　者：于军生　夏文玲　于秋生　于培冰　王　瑛　孙　杰　张　晔
孙永艳　郭　洁　初晓明　柳国光　衣美青　任　喆　蒋声华
于建春　孙奎波　宫明义　孙景晓　孙春红

图书在版编目（CIP）数据

学考第一．教材同步点拨．八年级数学．上：北师大课标版 / 于军生主编. —长春：东北师范大学出版社，2005.4
ISBN　7-5602-4069-0

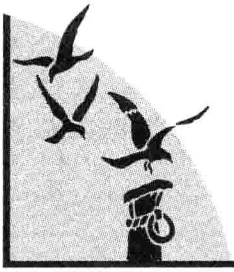
Ⅰ. 学...　Ⅱ. 于...　Ⅲ. 数学课—初中—教学参考资料　Ⅳ. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 019604 号

□总策划：第二编辑室
□责任编辑：汲　明　□封面设计：魏国强
□责任校对：邢　娜　□责任印制：张允豪

东北师范大学出版社出版发行
长春市人民大街 5268 号（130024）
电话：0431—5695744　5688470
传真：0431—5695734
网址：http：//www.nenup.com
电子函件：sdcbs@mail.jl.cn
广告许可证：吉工商广字 2200004001001 号
东北师范大学出版社激光照排中心制版
延边新华印刷有限公司印装
吉林省延吉市河南街 818 号（133001）
2005 年 6 月第 1 版　2005 年 6 月第 1 次印刷
幅面尺寸：185 mm×260 mm　印张：14　字数：416 千
印数：00 001—20 000 册

定价：16.80 元



目录





第一章 勾股定理

1 探索勾股定理

基础知识归纳

1. 勾股定理

直角三角形两直角边的平方和等于斜边的平方,即 $c^2=a^2+b^2$(a,b 为直角边,c 为斜边).

2. 勾股定理的表达式

在 Rt△ABC 中,$\angle C=90^\circ$,$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对边分别为 a、b、c,则有(1)$c^2=a^2+b^2$;(2)$a^2=c^2-b^2$;(3)$b^2=c^2-a^2$;(4)$c=\sqrt{a^2+b^2}$;(5)$a=\sqrt{c^2-b^2}$;(6)$b=\sqrt{c^2-a^2}$((4)、(5)、(6)是开方形式,第二章要学到).

±

3. 勾股定理的应用

勾股定理反映了直角三角形三边之间的数量关系,是直角三角形的重要性质之一.其主要应用有:

(1)已知直角三角形的两边求第三边;

(2)已知直角三角形的一边以及另两边之间的关系,求直角三角形的另两边;

(3)利用勾股定理可以证明线段平方关系的问题;

(4)利用勾股定理,可作出长为 $\sqrt{n}$ 的线段(第二章要讲到).

4. 勾股定理的证明

勾股定理的验证方法据说已有 400 种之多,其中大多数是用面积的方法来证明的,下面选取勾股定理众多证明方法中的几个代表:

(1)将四个全等的直角三角形拼成如图 1-1-1 所示的正方形,

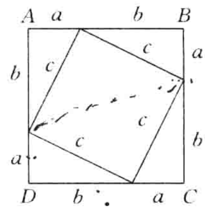


图 1-1-1

则 $S_{正方形ABCD}=(a+b)^2=c^2+4\times\frac{1}{2}ab$,

$\therefore a^2+b^2=c^2$.

(2)(三国时期吴国赵爽的证明)将四个全等的直角三角形拼成如图 1-1-2 所示的正方形,

则 $S_{正方形EFGH}=c^2=(b-a)^2+4\times\frac{1}{2}ab$,

$\therefore c^2=a^2+b^2$.

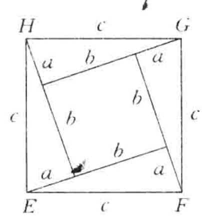


图 1-1-2

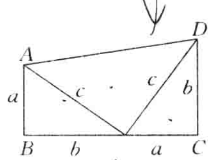


图 1-1-3

(3)(美国第二十任总统加菲尔德的证明)如图 1-1-3,将两个直角三角形拼成直角梯形,则

$S_{梯形ABCD}=\frac{(a+b)(a+b)}{2}=2\times\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}c^2$,

$\therefore a^2+b^2=c^2$.

典型例题

例 1 在$\triangle ABC$中,$\angle C=90°$.

(1)已知$AC=6$,$BC=8$,求AB的长;

(2)已知$AB=17$,$AC=15$,求BC的长;

(3)如果$a:b=3:4$,$c=40$,求a,b的长.

解析 (1)$\because \angle C=90°$,$AC=6$,$BC=8$,

$\therefore AB^2=AC^2+BC^2=6^2+8^2=100$,

$\therefore AB=10$.

(2)$\because \angle C=90°$,$AB=17$,$AC=15$,

$\therefore BC^2=AB^2-AC^2=17^2-15^2=64$,

$\therefore BC=8$.

(3)$\because \angle C=90°$,$\therefore a^2+b^2=c^2$.

$\because c=40$,$\therefore a^2+b^2=1600$.

$\because a:b=3:4$,设$a=3k$,$b=4k$,

$\therefore (3k)^2+(4k)^2=1600$,

$\therefore k^2=64$,即$k=8$,$\therefore a=24$,$b=32$.

例 2 直角三角形的两条直角边的长分别为 5 cm 和 12 cm,求斜边上的高.

解析 根据勾股定理,得$c^2=a^2+b^2=5^2+12^2=169$,$\therefore c=13$,

$\therefore$斜边上的高为$\frac{5\times 12}{13}=\frac{60}{13}$(cm).

评注 本题关键是用两种方式来表示这个三角形的面积,即三角形的面积$=\frac{1}{2}\times$直角边$\times$另一条直角边$=\frac{1}{2}\times$斜边$\times$斜边上的高.

教材例题习题的变形题

例 **(P6 习题第 3 题)**已知一个直角三角形的两边长分别是 3 和 4,求第三边长的平方.

解析 (1)若已知的两边是直角边,则第三边是斜边.

根据勾股定理,斜边$c^2=a^2+b^2=3^2+4^2=25$,

所以第三边(斜边)长为 5,其平方为 25.

(2)若已知的两边是一条直角边和斜边,则较大的是斜边,第三边是另一条直角边.

根据勾股定理,有$c^2=a^2+b^2$,

则$b^2=c^2-a^2=4^2-3^2=7$.

所以第三边长的平方为 7.

综上知,第三边的平方为 25 或 7.

综合应用题

例 1 为了丰富少年儿童的业余文化生活,某社区要在如图 1-1-4 所示AB所在的直线上建一图书阅览室,本社区有两所学校,所在的位置在点C和点D处,$CA\perp AB$于A,$DB\perp AB$于B,已知$AB=25$ km,$CA=15$ km,$DB=10$ km,试问:阅览室E应建在距点A多远处,才能使它到C、D两所学校的距离相等?

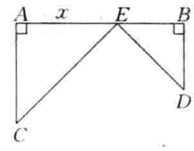


图 1-1-4

解析 设阅览室E到A的距离为x km,即$AE=x$ km,则$BE=(25-x)$ km.

在 Rt$\triangle EAC$和 Rt$\triangle EBD$中,

$CE^2=AE^2+AC^2=x^2+15^2$,

$DE^2=EB^2+DB^2=(25-x)^2+10^2$.

$\because CE=DE$,$\therefore CE^2=DE^2$,

$\therefore x^2+15^2=(25-x)^2+10^2$,

$\therefore x=10$.

$\therefore$阅览室E应建在距点A 10 km 处.

例 2 某宾馆装修,需在台阶上铺上地毯,已知台阶宽 2.8 m,其剖面图如图 1-1-5 所示.计算一下需要购买多少平方米的地毯才能铺满所有台阶.

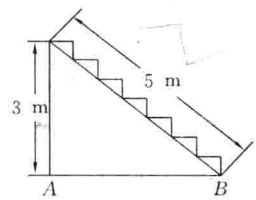


图 1-1-5

解析 根据勾股定理得

$AB^2=5^2-3^2=16$,

$\because AB>0$,$\therefore AB=4$ m,

$\therefore$地毯的面积为$(4+3)\times 2.8=19.6(m^2)$.

评注 我们可以将每一个小台阶看成一个小直角三角形,而地毯的长就是所有小三角形的两条直角边的和,其中竖的直角边的和为整个台阶的高.即大直角三角形中的竖直的直角边,横的直角边的和为剖面图中大直角三角形中水平的直角边,可通过勾股定理求出.

创新题

例 1 **(探究题)** 如图 1-1-6,以 Rt△ABC 的三边为直径分别作三个半径圆,已知以 AC 为直径的半圆的面积为 S_1,以 BC 为直径的半圆的面积为 S_2,求以 AB 为直径的半圆的面积 S.

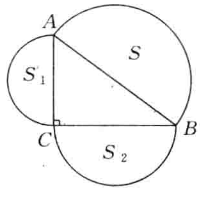


图 1-1-6

解析 $\because S_1=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}AC\right)^2=\frac{1}{8}\pi AC^2$,

$S_2=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}BC\right)^2=\frac{1}{8}\pi BC^2$,

又在 Rt△ABC 中,$AB^2=AC^2+BC^2$,

$\therefore S=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}AB\right)^2=\frac{1}{8}\pi AB^2$

$=\frac{1}{8}\pi(AC^2+BC^2)$

$=\frac{1}{8}\pi AC^2+\frac{1}{8}\pi BC^2=S_1+S_2$.

例 2 **(探究题)** 如图 1-1-7 所示,在四边形 $ABCD$ 中,$\angle B=90°$,$AB=3$,$BC=4$,$CD=5$,$AD=6$,求四边形 $ABCD$ 的面积.

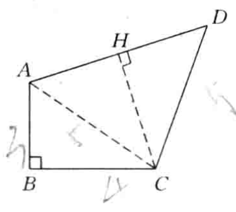


图 1-1-7

解析 连结 AC,过 C 作 $CH\perp AD$ 于 H.

$\because \angle B=90°, AB=3, BC=4$,

$\therefore AC^2=AB^2+BC^2=3^2+4^2=25$,

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AB=\frac{1}{2}\times4\times3=6$,

$\therefore AC=5$.

$\because CD=5, \therefore AC=CD$.

又 $\because CH\perp AD, \therefore AH=\frac{1}{2}AD$.

$\because AD=6, \therefore AH=3$.

$\because CH\perp AD, AC=5$,

$\therefore CH^2=AC^2-AH^2=5^2-3^2=16$,

$\therefore CH=4$.

$\therefore S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}AD\cdot CH=\frac{1}{2}\times6\times4=12$,

$\therefore S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD}=6+12=18$.

评注 本题利用割补法求不规则图形面积,把构造直角三角形运用勾股定理求线段长度,以及等腰三角形的三线合一等融合在一起,综合性很强.

中考题

例 1 **(2003 年聊城)** 2002 年 8 月,在北京召开的国际数学家大会会标取材于我国古代数学家赵爽的《勾股圆方图》,它是由四个全等的直角三角形与中间的小正方形拼成的一个大正方形(如图 1-1-8 所示). 如果大正方形的面积是 13,小正方形的面积是 1,直角三角形较短的直角边为 a,较长的直角边为 b,那么 $(a+b)^2$ 的值为(　　).

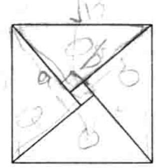


图 1-1-8

A. 13　　B. 19　　C. 25　　D. 169

解析 由题意,得 $a^2+b^2=13$, $a^2+b^2=c^2$.

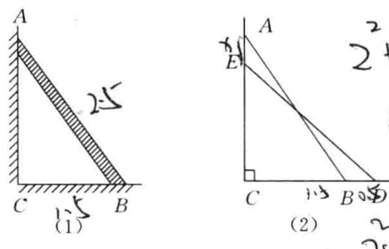
$\frac{1}{2}ab\times4+1=13$,即 $2ab=12$,

$\therefore (a+b)^2=a^2+2ab+b^2=13+12=25$.

答案 C

评注 本题主要考查完全平方公式、勾股定理、直角三角形面积公式的综合应用,直角三角形中两直角边的平方和等于斜边的平方,而斜边的平方恰好等于大正方形的面积.

例 2 **(2003 年吉林)** 如图 1-1-9,一个梯子 AB 长 2.5 m,顶端 A 靠在墙 AC 上,这时梯子下端 B 与墙角 C 的距离为 1.5 m,梯子滑动后停在 DE 的位置上,如图(2),测得 BD 的长为 0.5 m,求梯子顶端 A 下落了多少米?



$2^2+(A-h)^2=(2.5)^2$

$AC=2$

$2^2+(2-h)^2=2.5^2$

图 1-1-9

解析 在 Rt△ABC 中,根据勾股定理,得

$AC^2=AB^2-BC^2=2.5^2-1.5^2=4=2^2$,

$\therefore AC=2$ m.

在 Rt△DEC 中,根据勾股定理,得

$CE^2=ED^2-CD^2=ED^2-(CB+BD)^2$

$=2.5^2-(1.5+0.5)^2=2.5^2-2^2$

$=2.25=1.5^2$,

$\therefore CE=1.5$ m,

$\therefore AE=AC-CE=2-1.5=0.5$(m).

即梯子顶端 A 下落了 0.5 m.

同步测试

教材基础知识针对性训练●●●

一、选择题.

1. 如图 1-1-10 所示,其阴影部分是一个正方形,则此正方形的面积是(　　).

A. 100　B. 200　C. 150　D. 300

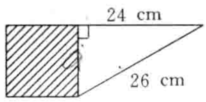


图 1-1-10

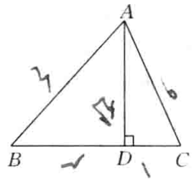


图 1-1-11

2. 如图 1-1-11 所示,△ABC 中,$AB=3$,$AD\perp BC$,且 $DB=2$,$DC=1$,则 AC^2 的值为(　　).

A. 3　B. 4　C. 5　D. 6

3. 如图 1-1-12 所示,$\angle A=\angle D=90°$,AC 与 BD 交于 O,$AB=CD=4$,$AO=3$,则 BD 的长为(　　).

A. 6　B. 7

C. 8　D. 10

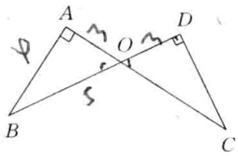


图 1-1-12

4. Rt△ABC 中,$\angle C=90°$,$CD\perp AB$ 于 D,$AC=6$,$BC=8$,则 CD 为(　　).

A. 4.8　B. 2.4　C. 6.4　D. 14

二、填空题.

1. △ABC 中,$\angle C=90°$,$c=10$,$a:b=3:4$,则 $a=$________.

2. 如图 1-1-13,$AC\perp BC$,$AB=13$,$BC=12$,阴影部分为半圆,则阴影部分的面积为______.

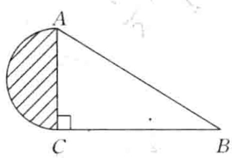


图 1-1-13

3. 放学以后,小红和小颖从学校分手,分别沿东南方向和西南方向回家,若小红和小颖行走的速度都是 40 m/min,小红用 15 min 到家,小颖用 20 min 到家,则小红和小颖家的直线距离为________.

4. 直角三角形的周长为 24,斜边长为 10,则其面积为________.

三、解答题.

1. 如图 1-1-14,直角梯形 $ABCD$ 中,$AD\parallel BC$,$\angle C=90°$,若 $AB=5$,$AD=3$,$BC=6$,求 $S_{梯形ABCD}$.

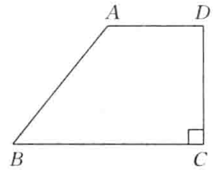


图 1-1-14

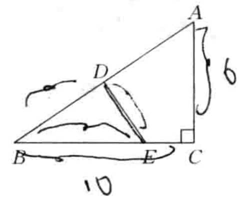


图 1-1-15

2. 如图 1-1-15,已知 $\angle C=90°$,$BC=10$ cm,$AC=6$ cm,DE 是 AB 的垂直平分线,求 CE 的长.

探究应用拓展性训练●●●

1. (**学科内综合题**)如图 1-1-16,AC 平分 $\angle DAB$,$AB>AD$,$CB=CD$,$CE\perp AB$ 于 E 点.

(1)试说明:$AB=AD+2EB$;

(2)若 $AD=9$,$AB=21$,$BC=10$,求 AC 的长.

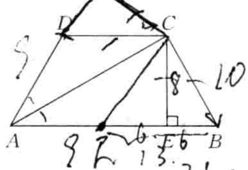


图 1-1-16

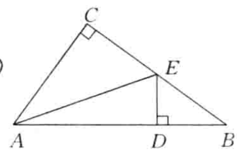


图 1-1-17

2. (**探究题**)如图 1-1-17,△ABC 中,$\angle C=90°$,AE 是 BC 边上的中线,$ED\perp AB$ 于 D.试说明:$AD^2-BD^2=AC^2$.

3. (**与现实生活联系的应用题**)如图 1-1-18 所示,甲轮船以 16 海里/小时的速度离开港口 O 向东南方向航行,乙轮船在同时同地向西南方向航行,已知它们离开港口一个半小时后分别到 B,A 两点,且知 $AB=30$ 海里,问乙轮船每小时航行多少海里.

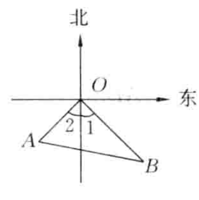


图 1-1-18

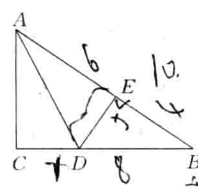


图 1-1-19

4. (**2002 年南通**)如图 1-1-19 所示,一块直角三角形的纸片,两直角边 $AC=6$ cm,$BC=8$ cm.现将直角边 AC 沿直线 AD 折叠,使它落在斜边 AB 上,且与 AE 重合,则 $CD=$(B).

A. 2 cm　B. 3 cm　C. 4 cm　D. 5 cm

$(8-x)^2-16=x^2$

2 能得到直角三角形吗

基础知识归纳

1. 勾股定理的逆定理(直角三角形的判别条件)

如果三角形的三边长 a,b,c 满足 $a^2+b^2=c^2$，那么这个三角形是直角三角形.

2. 勾股数

(1)满足 $a^2+b^2=c^2$ 的三个正整数，称为勾股数.

(2)勾股数中各数的相同的整数倍，仍是勾股数. 如，3，4，5 是勾股数，6，8，10 也是勾股数.

(3)常见的勾股数有：①3，4，5；②5，12，13；③8，15，17；④7，24，25；⑤10，24，26；⑥9，40，41.

重点知识讲解

直角三角形的判别是把数转化为形，通过计算判别一个三角形是否为直角三角形，其方法步骤为：

(1)首先确定最长边；

(2)计算最长边的平方，其余两边的平方和；

(3)比较最长边的平方与其余两边的平方和.

若相等，则此三角形为直角三角形；若不相等，则此三角形不是直角三角形.

说明：当最长边的平方与其余两边的平方和不相等时，有两种情况：

(1)当最长边的平方大于其余两边的平方和时，此三角形为钝角三角形；

(2)当最长边的平方小于其余两边的平方和时，此三角形为锐角三角形.

$a+b>c$

$(a+b)^2>c^2$

$a^2+b^2+2ab>c^2$

易混知识辨析

勾股定理与逆定理的异同

相同点：(1)两者都与三角形三边关系 $a^2+b^2=c^2$ 有关；

(2)两者都与直角三角形有关.

不同点：勾股定理是以“一个三角形是直角三角形”为条件，进而得到这个直角三角形的三边数量关系，即 $a^2+b^2=c^2$.

勾股定理逆定理是以“一个三角形的三边满足 $a^2+b^2=c^2$”为条件，进而得到这个三角形是直角三角形，是判断一个三角形是不是直角三角形的有效方法.

典型例题

例 判断满足下列条件的三角形是否直角三角形.

(1)在△ABC 中，$\angle A=15°$，$\angle B=75°$；

(2)在△ABC 中，$AC=12$，$AB=20$，$BC=16$；

(3)一个三角形三边 a,b,c 满足 $a^2-b^2=c^2$.

解析 (1)∵ $\angle A=15°$，$\angle B=75°$，$\angle A+\angle B+\angle C=180°$，

∴ $15°+75°+\angle C=180°$，∴ $\angle C=90°$，

∴△ABC 是直角三角形.

(2)∵ $AC=12$，$AB=20$，$BC=16$，

∴ $AC^2+BC^2=12^2+16^2=400$，

$AB^2=20^2=400$，

∴ $AC^2+BC^2=AB^2$，

∴△ABC 是直角三角形.

(3)∵ $a^2-b^2=c^2$，∴ $a^2=b^2+c^2$，

∴以 a,b,c 为三边的三角形是直角三角形.

评注 (1)到目前为止，判定一个三角形是不是直角三角形有两种方法：

① 利用定义，如果已知条件与角度有关，可借助三角形内角和求出其中一个角是直角，得到直角三角形；

② 利用勾股定理的逆定理，利用这一方法的题目一般是给定或者能通过计算推导出三角形中三边的数量关系(即 $a^2+b^2=c^2$).

(2)在利用勾股定理逆定理判断一个三角形

是否为直角三角形时，需要首先找出谁是最长边，然后通过计算看两较短边的平方和是否等于较长边的平方.

教材例题习题的变形题

例 (**P11 随堂练习**)若$\triangle ABC$的三边a,b,c满足条件$a^2+b^2+c^2+338=10a+24b+26c$，判断$\triangle ABC$的形状.

解析 由$a^2+b^2+c^2+338=10a+24b+26c$，可得

$(a-5)^2+(b-12)^2+(c-13)^2=0$，

$\therefore a=5, b=12, c=13$，

$\therefore a^2+b^2=5^2+12^2=169, c^2=169$，

$\therefore a^2+b^2=c^2$，$\therefore \triangle ABC$为直角三角形.

评注 本题用到了非负数性质：$a^2+b^2=0 \Rightarrow a=b=0$；本题在对等式进行配方时，对常数项拆项的依据是一次项系数的一半的平方.

学科内综合题

例 如图 1-2-1，已知正方形$ABCD$，E是BC的中点，F在AB上，且$BF=\frac{1}{4}AB$，猜想EF与DE的位置关系，并说明理由.

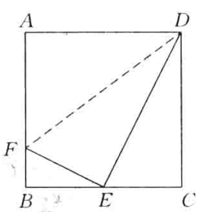


图 1-2-1

解析 EF与DE的位置关系是$EF \perp DE$.

理由：连结DF，设正方形的边长为a.

$\because E$是BC的中点，$\therefore BE=EC=\frac{1}{2}a$.

又$\because BF=\frac{1}{4}AB$，$\therefore BF=\frac{1}{4}a$.

在$Rt\triangle DEC$中，根据勾股定理，得

$DE^2=DC^2+EC^2=a^2+\left(\frac{1}{2}a\right)^2=\frac{5}{4}a^2$.

同理，在$Rt\triangle BFE$中，

$EF^2=\left(\frac{1}{2}a\right)^2+\left(\frac{1}{4}a\right)^2=\frac{5}{16}a^2$.

在$Rt\triangle AFD$中，$AF=a-\frac{1}{4}a=\frac{3}{4}a$，

$\therefore DF^2=a^2+\left(\frac{3}{4}a\right)^2=a^2+\frac{9}{16}a^2=\frac{25}{16}a^2$.

$\because \frac{5}{4}a^2+\frac{5}{16}a^2=\frac{25}{16}a^2$，$\therefore DE^2+EF^2=DF^2$.

由勾股定理逆定理，知$\angle DEF=90^\circ$，

$\therefore EF \perp DE$.

综合应用题

例 已知某开发区有一块四边形的空地$ABCD$，如图 1-2-2 所示，现计划在该空地上种植草皮，经测量，$\angle A=90^\circ$，$AB=3$ m，$BC=12$ m，$CD=13$ m，$DA=4$ m，若每平方米草皮需要 200 元，问需要多少投入.

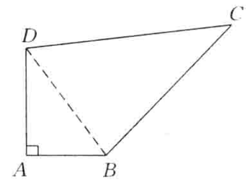


图 1-2-2

解析 连结BD.

$\because \angle A=90^\circ$，$\therefore \triangle ABD$是直角三角形.

在$Rt\triangle ABD$中，根据勾股定理，得

$BD^2=AB^2+DA^2=3^2+4^2=25$，$\therefore BD=5$.

又$\because$在$\triangle BCD$中，

$BC=12, CD=13, BD=5$，

$\therefore BC^2+BD^2=12^2+5^2=169=13^2=CD^2$，

$\therefore \triangle BCD$是以DC为斜边的直角三角形，

$\therefore S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCD}$

$=\frac{1}{2}\times 3\times 4+\frac{1}{2}\times 5\times 12$

$=36(m^2)$，

$\therefore$需投入的总资金为$36\times 200=7200$(元).

创新题

例 1 (**探究题**)如图 1-2-3 所示，如果只给你一把带刻度的直尺，你是否能检验$\angle MPN$是不是直角？简述你的作法，并说明理由.

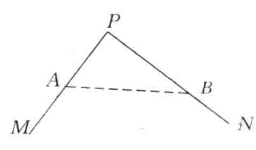


图 1-2-3

作法 (1)在射线PM上量取$PA=3$ cm，确定A点，在射线PN上量取$PB=4$ cm，确定B点；

(2)连结AB，得$\triangle PAB$；

(3)用刻度尺量取AB的长度，如果AB恰为

37

5 cm,则说明$\angle P$是直角,否则$\angle P$不是直角.

理由:$PA=3$ cm,$PB=4$ cm,

$PA^2+PB=3^2+4^2=5^2$.

若$AB=5$ cm,则$PA^2+PB^2=AB^2$,

根据勾股定理的逆定理,$\triangle PAB$是直角三角形,$\angle P$是直角.

评注 只有一把刻度尺,只能用这把刻度尺量取线段的长度.若$\angle P$是一个直角,$\angle P$所在的三角形必是个直角三角形,这就提示我们把$\angle P$放在一个三角形中,利用勾股定理的逆定理来解决此题.

例 2 **(探究题)** 如图 1-2-4,在$\triangle ABC$中,D是AB的中点,若$AC=15$,$BC=8$,$CD=8.5$,试说明:$\triangle ABC$是直角三角形.

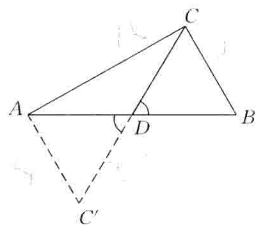


图 1-2-4

解析 延长CD至C',使$C'D=CD$,连结AC'.

$\because D$是AB的中点,$\therefore AD=DB$.

又$\because C'D=CD$,$\angle ADC'=\angle BDC$,

$\therefore \triangle ADC'\cong\triangle BDC$(SAS),

$\therefore AC'=BC$,$\angle C'=\angle C'CB$.

$\because BC=8$,$\therefore AC'=8$.

$\because CC'=2CD$,$CD=8.5$,

$\therefore CC'=17$.又$\because AC=15$,

$\therefore AC'^2+AC^2=8^2+15^2=289$,

$CC'^2=17^2=289$,

$\therefore AC'^2+AC^2=CC'^2$,

$\therefore \triangle CAC'$是直角三角形,且$\angle CAC'=90°$.

$\therefore \angle ACB=\angle ACD+\angle DCB=\angle ACD+\angle C'=90°$,

$\therefore \triangle ACB$是直角三角形.

评注 本题的解题关键是延长中线的一倍,来构造全等三角形,将已知的三条线段转化到一个三角形中.

同步测试

教材基础知识针对性训练

一、选择题.

1. 下列三角形不是直角三角形的是(　　).

A. 三角形中有一边上的中线等于这边的一半

B. 三角形三边长分别为 5,12,13

C. 三角形的三个内角比为 1∶2∶3

D. 三角形的三边之比为 2∶2∶3

2. 将直角三角形的三边扩大 3 倍后,得到的三角形为(　　).

3 4 5

9 12 15

A. 直角三角形　　B. 锐角三角形

C. 钝角三角形　　D. 无法确定

3. 已知:如图 1-2-5,在$\triangle ABC$中,$AB=12$,$BC=5$,$AC=13$,I是$\angle ABC$,$\angle ACB$平分线交点,$ID\perp BC$,则ID长为(　　).

A. 2　　B. $\frac{35}{13}$

C. $\frac{7}{4}$　　D. 3

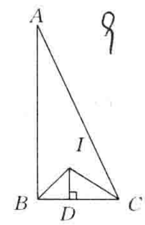


图 1-2-5

4. 设直角三角形的两条直角边分别为a,b,斜边为c,斜边上的高为h,则以h,$c+h$,$a+b$为边构成的三角形是(　　).

A. 直角三角形

B. 锐角三角形

C. 钝角三角形

D. 不能以a,b,c的大小确定三角形的形状

二、填空题.

1. 以下列各组线段为边长,能构成三角形的是________,能构成直角三角形的是________(填序号).①3,4,5;②1,3,4;③4,4,6;④6,8,10;⑤5,7,2;⑥13,5,12;⑦7,25,24.

2. 已知$|x-12|+|y-13|+(z^2-10z+25)=0$,则以$x$,$y$,$z$为三边的三角形是________.

3. $\triangle ABC$中,a,b,c为三边长,若$a^2+b^2=25$,$a^2-b^2=7$,又$c=5$,则最大边上的高为________.

4. 有一个三角形的两边长为 4 和 5,要使三角形为直角三角形,则第三边长的平方为________.

三、解答题.

如图 1-2-6 所示,四边形$ABCD$中,$AB\perp BC$,且$AB=9$,$BC=12$,$CD=17$,$AD=8$,求四边形$ABCD$的面积.

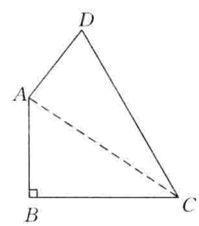


图 1-2-6

探究应用拓展性训练

1. **(学科内综合题)** 如图 1-2-7 所示,在$\triangle ABC$

中，$AB=13$，$BC=10$，BC 边上的中线 $AD=12$. 试说明：$AB=AC$.

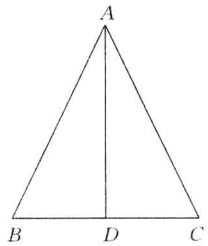


图 1-2-7

2.（学科内综合题） 已知△ABC 为等腰三角形，底边 $BC=20$，D 为 AB 上一点，且 $CD=16$，$BD=12$，求△ABC 的周长.

3.（与现实生活联系的应用题） 一艘在海上朝正北方向航行的轮船，航行 240 海里时方位仪坏了，凭经验，船长指挥船左转 90°，继续航行了 70 海里，则距出发地有 250 海里，你能判断船转弯后，是否朝正西方向航行吗？

3 蚂蚁怎样走最近

基础知识归纳

二维、三维图形的转化

"立体图形"中路线最短的问题，往往要把立体图形的表面展开，得到平面图形之后，利用勾股定理或直角三角形的判别条件解决. 此类问题与图形的展开与折叠联系密切，如圆柱侧面展开为长方形，圆锥侧面展开为扇形，正方体沿某一条棱展开为长方形等.

重点知识讲解

立体图形中的勾股定理

(1) 在立体几何中，许多长度的计算需要利用勾股定理，一般情况下是在立体图形中，找到直角三角形所在的平面即可，如图 1-3-1，在圆锥中过顶点和底面直径的截面中就存在直角三角形，连结 AO，BO，则△AOB 是直角三角形，$\angle AOB=90°$.

(2) 若长方体的长为 a，宽为 b，高为 c，如图 1-3-2，则此长方体中连结长方体的两顶点的最长线段 d 与 a，b，c 之间有如下关系：$d^2=a^2+b^2+c^2$，这就是勾股定理在空间的拓展.

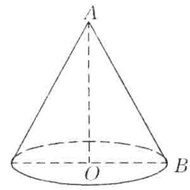


图 1-3-1

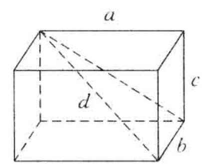


图 1-3-2

典型例题

例 1 已知 a，b，c 为△ABC 的三边，且满足 $a^2c^2-b^2c^2=a^4-b^4$，试判定△ABC 的形状.

解析 ∵ $a^2c^2-b^2c^2=a^4-b^4$，

∴ $c^2(a^2-b^2)=(a^2+b^2)(a^2-b^2)$，

∴ $(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2)=0$，

∴ $a^2+b^2=c^2$ 或 $a^2=b^2$，即 $a=b$，

∴△ABC 为直角三角形或等腰三角形.

评注 本题中，$c^2(a^2-b^2)=(a^2+b^2)(a^2-b^2)$，两边同时除以 a^2-b^2，只有在 $a^2-b^2\neq 0$ 的条件下才成立，但 a^2-b^2 可能为 0，因此不能盲目约分.

例 2 如图 1-3-3 所示，圆柱形玻璃容器，高 18 cm，底面周长为 60 cm，在外侧距下底 1 cm 的点 S 处有一蜘蛛，与蜘蛛相对的圆柱形容器的上口外侧距开口处 1 cm 的点 F 处有一苍蝇，试求急

于捕获苍蝇充饥的蜘蛛，所走的最短路线的长度.

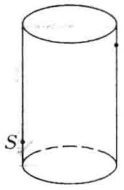


图 1 - 3 - 3

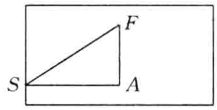


图 1 - 3 - 4

解析 如图 1 - 3 - 4，是圆柱形玻璃容器的侧面展开图，线段 SF 是蜘蛛由 S 到 F 的最短路程. 由题意，得

$FA=18-1-1=16(\text{cm})$，

$SA=\frac{1}{2}\times 60=30(\text{cm})$，由勾股定理，

$SF^2=SA^2+FA^2=30^2+16^2=1156=34^2$，

$\therefore SF=34$ cm，

∴蜘蛛所走的最短路线的长度为 34 cm.

评注 曲面上的最短路线问题，一般均可以通过展开而转化为平面上的最短路线问题.

教材例题习题的变形题

例 **(P13 例题)** 如图 1 - 3 - 5 所示，一只螳螂在树干的 A 点处，发现它的正上方 B 点处有一只小虫子，螳螂想捕到这只虫子，但又怕被发现，于是绕到虫子后面吃掉它. 已知树干的半径为 10 cm，A，B 两点的距离为 45 cm(π 取 3)，求螳螂绕行的最短距离.

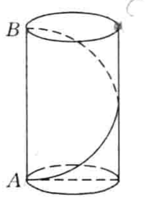


图 1 - 3 - 5

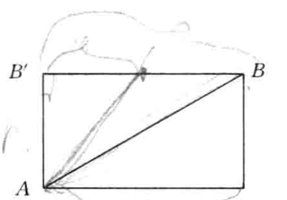


图 1 - 3 - 6

解析 如图 1 - 3 - 6，将圆柱体(树干)的侧面展开，$\therefore AB'=45$ cm，

$B'B=2\pi r=2\times 3\times 10=60(\text{cm})$，

$\therefore AB^2=AB'^2+B'B^2=45^2+60^2=75^2$，

$\therefore AB=75$ cm.

答案 螳螂绕行的最短距离为 75 cm.

评注 本题与例题非常类似，但也有不同之处. 如图 1 - 3 - 6 所示，$B'B$ 不再是底面周长的一半，而是底面的整个周长，因为螳螂需绕树干一周，才能从虫子后面吃掉它.

学科内综合题

例 如图 1 - 3 - 7，一只蚂蚁如果沿长方体的表面从 A 点爬到 B' 点，那么沿哪条路最近？最短路程是多少？已知长方体的长 2 cm，宽为 1 cm，高为 4 cm.

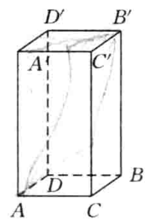


图 1 - 3 - 7

解析 根据题意，如图 1 - 3 - 8 所示，最短路径有下列三种情况：

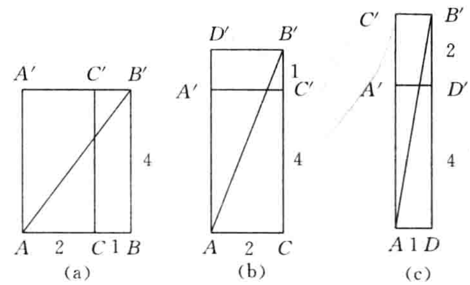


图 1 - 3 - 8

(1)沿 AA'，$A'C'$，$C'B'$，$B'B$ 剪开，得图(a)，

$AB'^2=AB^2+B'B^2=(2+1)^2+4^2$
$=3^2+4^2=25$.

(2)沿 AC，CC'，$C'B'$，$B'D'$，$D'A'$，$A'A$ 剪开，得图(b)，

$AB'^2=AC^2+CB'^2=2^2+(4+1)^2$
$=4^2+5^2=29$.

(3)沿 AD，DD'，$B'D'$，$C'B'$，$C'A'$，$A'A$ 剪开，得图(c)，

$AB'^2=AD^2+B'D^2=1^2+(2+4)^2$
$=1+6^2=37$.

综上所求，最短路径应为图(a)所示.

$\therefore AB'^2=25$，即 $AB'=5$ cm.

答案 最短路径为图(a)所求，为 5 cm.

评注 长方体中的最短路径问题要比圆柱体中的最短路径问题复杂. 本题要求蚂蚁爬行的最短路径，需要将空间图形转化成平面图形，但展开图并非只有一种，而是有三种，需要利用"两点之间，线段最短"来一一求出线段的长度，然后比较三种情况的结果，找出最短路径.