

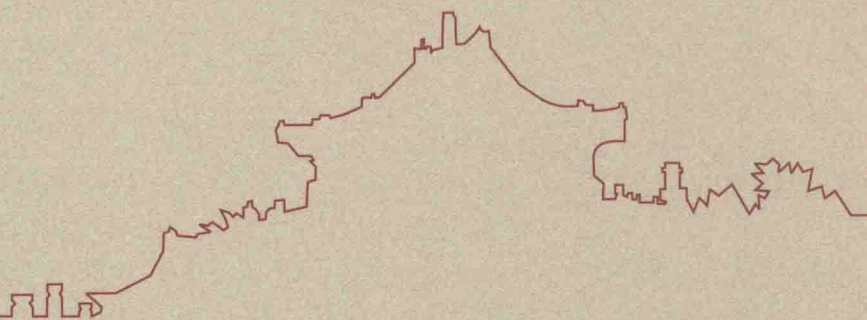
武汉大学优秀博士学位论文文库



实流形在复流形中的 全纯不变量

Holomorphic Invariants of Real Submanifolds in Complex Manifolds

尹万科 著



WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学出版社

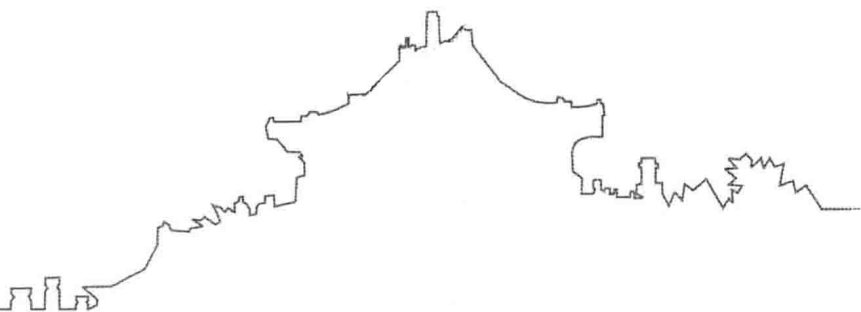
武汉大学优秀博士学位论文文库



实流形在复流形中的 全纯不变量

Holomorphic Invariants of Real Submanifolds in Complex Manifolds

尹万科 著



WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

实流形在复流形中的全纯不变量/尹万科著. —武汉: 武汉大学出版社, 2014. 1
武汉大学优秀博士学位论文文库
ISBN 978-7-307-12152-2

I. 实… II. 尹… III. 多复变函数 IV. O174.56

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 273848 号

责任编辑:顾素萍 责任校对:汪欣怡 版式设计:马 佳

出版发行: 武汉大学出版社 (430072 武昌 珞珈山)
(电子邮件: cbs22@whu.edu.cn 网址: www.wdp.com.cn)

印刷:湖北恒泰印务有限公司

开本: 720 × 1000 1/16 印张:7.5 字数:104 千字 插页:2

版次:2014 年 1 月第 1 版 2014 年 1 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-307-12152-2 定价:18.00 元

版权所有, 不得翻印; 凡购我社的图书, 如有质量问题, 请与当地图书销售部门联系调换。

总 序

创新是一个民族进步的灵魂,也是中国未来发展的核心驱动力。研究生教育作为教育的最高层次,在培养创新人才中具有决定意义,是国家核心竞争力的重要支撑,是提升国家软实力的重要依托,也是国家综合国力和科学文化水平的重要标志。

武汉大学是一所崇尚学术、自由探索、追求卓越的大学。美丽的珞珈山水不仅可以诗意栖居,更可以陶冶性情、激发灵感。更为重要的是,这里名师荟萃、英才云集,一批又一批优秀学人在这里砥砺学术、传播真理、探索新知。一流的教育资源,先进的教育制度,为优秀博士学位论文的产生提供了肥沃的土壤和适宜的气候条件。

致力于建设高水平的研究型大学,武汉大学素来重视研究生培养,是我国首批成立有研究生院的大学之一,不仅为国家培育了一大批高层次拔尖创新人才,而且产出了一大批高水平科研成果。近年来,学校明确将“质量是生命线”和“创新是主旋律”作为指导研究生教育工作的基本方针,在稳定研究生教育规模的同时,不断推进和深化研究生教育教学改革,使学校的研究生教育质量和知名度不断提升。

博士研究生教育位于研究生教育的最顶端,博士研究生也是学校科学研究的重要力量。一大批优秀博士研究生,在他们学术创作最激情的时期,来到珞珈山下、东湖之滨。珞珈山的浑厚,奠定了他们学术研究的坚实基础;东湖水的灵动,激发了他们学术创新的无限灵感。在每一篇优秀博士学位论文的背后,都有博士研究生们刻苦钻研的身影,更有他们的导师的辛勤汗水。年轻的学者们,犹如在海边拾贝,面对知识与真理的浩瀚海洋,他们在导师的循循善诱下,细心找寻着、收集着一片片靓丽的贝壳,最终把它们连成一串串闪闪夺

目的项链。阳光下的汗水,是他们砥砺创新的注脚;面向太阳的远方,是他们奔跑的方向;导师们的悉心指点,则是他们最值得依赖的臂膀!

博士学位论文是博士生学习活动和研究工作的主要成果,也是学校研究生教育质量的凝结,具有很强的学术性、创造性、规范性和专业性。博士学位论文是一个学者特别是年轻学者踏进学术之门的标志,很多博士学位论文开辟了学术领域的新思想、新观念、新视阈和新境界。

据统计,近几年我校博士研究生所发表的高质量论文占全校高水平论文的一半以上。至今,武汉大学已经培育出 18 篇“全国百篇优秀博士学位论文”,还有数十篇论文获“全国百篇优秀博士学位论文提名奖”,数百篇论文被评为“湖北省优秀博士学位论文”。优秀博士结出的累累硕果,无疑应该为我们好好珍藏,装入思想的宝库,供后学者慢慢汲取其养分,吸收其精华。编辑出版优秀博士学位论文文库,即是这一工作的具体表现。这项工作既是一种文化积累,又能助推这批青年学者更快地成长,更可以为后来者提供一种可资借鉴的范式亦或努力的方向,以鼓励他们勤于学习,善于思考,勇于创新,争取产生数量更多、创新性更强的博士学位论文。

武汉大学即将迎来双甲华诞,学校编辑出版该文库,不仅仅是为百廿武大增光添彩,更重要的是,当岁月无声地滑过 120 个春秋,当我们正大踏步地迈向前方时,我们有必要回首来时的路,我们有必要清晰地审视我们走过的每一个脚印。因为,铭记过去,才能开拓未来。武汉大学深厚的历史底蕴,不仅在于珞珈山的一草一木,也不仅仅在于屋檐上那一片片琉璃瓦,更在于珞珈山下的每一位学者和学生。而本文库收录的每一篇优秀博士学位论文,无疑又给珞珈山注入了新鲜的活力。不知不觉地,你看那珞珈山上的树木,仿佛又茂盛了许多!

李晓红

2013 年 10 月于武昌珞珈山

创新性简介

Bishop 曲面的概念是由 Bishop 在他 1965 年的一个著名工作中首先提出来的, Bishop 本人以及 Moser 和 Webster 等著名数学家对这一曲面进行了极其深入的研究. 其中, 对于 Bishop 不变量为 0 的椭圆情形, Moser 在其 1985 年的工作中研究了其中的一种特殊情况, 并提出了两个问题, 其中第一个关于曲面局部全纯凸包的问题由 Huang-Krantz 在他们 1995 年的工作 [HK95] 中所解决.

本文的内容是基于我和我的导师黄孝军教授分别在 2007 年 3 月和 2008 年 2 月合作完成的文章 [HY07] 和 [HY08], 我们的主要工作之一就是对于 Moser 提出的第二个问题给出了一个否定的答案. 下面介绍一下我们的创新点:

首先, 我们引入了一个不同于以往的 weight 理论, 即定义 $z, \bar{z}$ 的 weight 分别为 1 和 $s - 1$. 与以往 (如 [CM74]、[MW83] 和 [Mos85] 等) 处理这类问题不同的是, 我们不再以二次曲面 $w = |z|^2$ 为模型空间, 取而代之的是 $w = |z|^2 + z^s$. $|z|^2 + z^s$ 不是一个齐次函数, 但在上述 weight 系统下, 是一个 s 次齐次 weight 多项式. 正是利用这一新的模型空间, 我们能够把上述正规型问题转化为无穷个线性方程的求解问题, 进而得到了 Bishop 不变量为 0 的 Bishop 曲面的形式正规型. 然后我们利用这一正规型, 得到了 Moser 问题的一个否定答案. 在证明 $\lambda = 0$, $s \neq \infty$ 时 Bishop 曲面与代数曲面间一般不双全纯等价的过程中, 我们主要运用了 Baire 范畴定理, 其思想本质上来自于 Poincaré^[Po1907].

其次, 在证明等价分类问题中, 我们利用了 Moser-Webster [MW83] 的投影化思想, 但与他们的不同之处在于, 我们不再利用一对对合变换, 我们的出发点是 Huang-Krantz 的平坦化定理,

由此构造了一簇贴于表面上的圆盘, 进而在 Bishop 不变量为 0、Moser 不变量为某个固定 s 的 Bishop 曲面上建立了曲面的双曲几何. 根据这些双曲几何性质, 我们证明了两个 Bishop 不变量为 0、Moser 不变量为某个固定 s 的 Bishop 曲面双全纯等价当且仅当它们形式等价, 从而给出了这一曲面的全纯等价分类问题. 在上述 Bishop 曲面上建立双曲几何并由此证明此类曲面的全纯等价分类问题, 据我所知, 以前从来没有出现过.

最后, 我们把 Moser 的定理 [Mos85] 推广到了 $\mathbb{C}^{n+1} (n \geq 2)$ 中的一类余维数为 2 的 CR 奇异子流形上. 在给出了它的拟正规型后, 还得到了拟正规型能平坦化的充要条件; 这与一维情形 [Mos85] 有着本质的区别, 因为在一维情形, 曲面的拟正规型总可以平坦化. 在证明模型空间 $w = |z|^2$ 的自同构群时, 我们利用贴于表面上的圆盘, 把上述自同构问题转化为单位球上的自同构问题. 最后在证明上述子流形能双全纯等价于一个二次曲面当且仅当它们形式等价时, 如同 [Mos85] 中一样, 我们主要运用了著名的 KAM 快速迭代法.

摘 要

多复变函数论是当今数学中一个非常重要的分支,这一学科由 Poincaré、Hartogs、E. Levi 和 E. Cartan 等著名数学家在 20 世纪初创立,且其后一直备受关注.在多复变的众多基本问题中,有一类重要的问题是实流形在复流形中的双全纯等价性.在这一研究领域,由于包括 Cartan、Moser、Bishop、陈省身和 Webster 等一流数学家在内的许多人的共同努力,已经取得了相当大的进展;然而直到现在,这一领域仍有许多基本的问题没有解决.

本文是基于我和我的导师黄孝军教授分别在 2007 年 3 月和 2008 年 2 月合作完成的两篇文章 [HY07] 和 [HY08]. 我们主要研究了 Bishop 曲面在复空间中的双全纯等价问题. 本文的第一部分包括第二章和第三章,研究的是 $\mathbb{C}^2$ 中 Bishop 不变量为 0 的椭圆 Bishop 曲面,这一工作可以看成是 Moser-Webster 在 1983 年的著名工作 [MW83] 和其后 Moser 在 1985 年的著名工作 [Mos85] 的继续,我们解决了 Moser 在 1985 年的工作 [Mos85] 中提出的著名问题,这一部分来自于我和我的导师黄孝军教授合作的文章 [HY07]; 论文的第二部分为第四章,我们把 Moser 的工作 [Mos85] 推广到高维的情形,利用 KAM 快速迭代法,证明了一个余维数为 2 的实解析子流形与一个对称模型双全纯等价当且仅当它们形式等价,这一部分内容来自于我和我的导师黄孝军教授合作的文章 [HY08].

具体说来,本文由下面四章组成:

在第一章中,介绍了多复变中的一些整体和局部双全纯等价问题,详细介绍了 Bishop 曲面研究的发展过程,直至最新的进展;然后介绍了 $\mathbb{C}^{n+1}(n \geq 2)$ 中复切点的 CR 维数大于或等于 2 的实子流形的最新发展状况;最后对本文的主要工作进行了综述.

在第二章中, 引入了一个不同于以往的 weight 理论, 这就使得我们可以成功地求解一个复杂的非线性方程, 最终得到 Bishop 不变量为 0 的 Bishop 曲面的形式正规型, 进而得到了此类曲面在形式变换群下的完全不变量. 特别地, 我们证明了当 Bishop 不变量为 0、Moser 不变量为某个固定的 s 时, 其模空间是一个无穷维 Fréchet 空间. 由此马上可以得到 Moser 问题的一个否定答案, 即 Bishop 不变量为 0 时 Bishop 曲面不能被其 Taylor 展开的一个有限截断所决定. 结合 Poincaré [Po1907] 中的证明思想, 我们得到 $\lambda = 0, s \neq \infty$ 时 Bishop 曲面一般不能双全纯等价于一个代数曲面.

在第三章中, 首先对所研究的曲面进行复化, 利用 Moser-Webster [MW83] 的投影化思想和 Huang-Krantz [HK95] 中的平坦化定理, 得到了一簇贴于表面上的圆盘, 从而建立了 Bishop 不变量为 0、Moser 不变量为某个固定 s 的 Bishop 表面上的双曲几何. 接着我们证明了两个 Bishop 不变量为 0、Moser 不变量为某个固定 s 的 Bishop 曲面双全纯等价当且仅当它们的形式正规型经过一个旋转变换 $(z, w) \mapsto (e^{i\theta}z, w)$, $e^{i\theta s} = 1$ 后相同, 从而解决了这一曲面的全纯等价分类问题. 最后我们研究了一类特殊 Bishop 表面的一些等价性质.

在第四章中, 我们研究了 Moser 定理的一个高维推广. 对于 $\mathbb{C}^{n+1} (n \geq 2)$ 中的一类余维数为 2 的奇异 CR 子流形, 给出了它的拟正规型, 同时得到了拟正规型能平坦化的充要条件. 然后运用著名的 KAM 快速迭代法, 证明了如果这个子流形能双全纯等价于正规型中一个对称的二次曲面当且仅当它们形式等价.

关键字: Bishop 曲面, CR 奇异流形, 消失的 Bishop 不变量, 全纯等价, 正规型

Abstract

Several complex variables is an important branch of modern mathematics. The subject started with the work of Poincaré, Hartogs, E. Levi, E. Cartan, and others at the beginning of the 20th century. Since then, it has attracted much attention. Among many fundamental problems in Several Complex Variables is the biholomorphic equivalence problem for real submanifolds in a complex manifold. Along these lines of research, much progress has been made due to the important work of many leading mathematicians of their time, that include at least E. Cartan, Moser, Bishop, Chern, Webster, etc. However, there are still many basic problems left unsolved.

This thesis, based on my two joint papers with my advisor Professor Xiaojun Huang completed in March 2007 [HY07] and February 2008 [HY08], will study the biholomorphic equivalent problem for Bishop submanifolds in a complex space.

The first part of this dissertation consists of Chapter two and Chapter three, which is to study the non-degenerate elliptic Bishop surfaces with a vanishing Bishop invariant in $\mathbb{C}^2$. Our work here can be viewed as the continuation of the celebrated work of Moser-Webster [MW83] in 1983 and the late famous work of Moser [Mos85] in 1985. Among many things, we will present a solution to a well-known problem of Moser. The mathematics in this part is taken from my joint paper with Professor Xiaojun Huang in [HY07].

The second part of the thesis is the fourth chapter, which is

to establish a result of Moser [Mos85] to higher dimensions. We will show that a real analytic submanifold of codimension two with a symmetric model is biholomorphic to the model if it is formally equivalent to the model, by applying the KAM theory. The mathematics in this part is taken from my joint paper with Professor Xiaojun Huang in [HY08].

More precisely, the dissertation is organized as follows:

In the first chapter, we discuss some global and local biholomorphic equivalent problems in several complex variables. We will give a through description of the history and new development of the research on the Bishop surfaces. Next we discuss the new development of the real submanifolds in $\mathbb{C}^{n+1}$ ($n \geq 2$) with the codimension at the complex tangent points greater than or equal to two.

In the second chapter, we derive a formal normal form for a Bishop surface near a vanishing Bishop invariant, by introducing a quite different weighting system. Next we obtain a complete set of invariants under the action of the formal transformation group. We show, in particular, that the modular space for Bishop surfaces with a vanishing Bishop invariant and with a fixed (finite) Moser invariant s is an infinitely dimensional manifold in a Fréchet space. This then immediately provides an answer, in the negative, to Moser's problem concerning the determination of a Bishop surface with a vanishing Bishop invariant from a finite truncation of its Taylor expansion. Furthermore, it can be combined with some ideas of Poincaré [Po1907] to show that most Bishop surfaces with $\lambda = 0$, $s \neq \infty$ are not holomorphically equivalent to algebraic surfaces.

In the third chapter, we discuss the complexification of the surface under consideration, by making use of the Moser-Webster [MW83] polarization and the Huang-Krantz [HK95] flattening theorem. We then obtain a family of holomorphic discs attached to the

surface. Starting with these discs, we introduce a new hyperbolic geometry. Based on the obtained geometry, we show that two Bishop surfaces with $\lambda = 0$ and $s < \infty$ are biholomorphically equivalent if and only if their formal normal forms are the same up to a trivial rotation of the form: $(z, w) \mapsto (e^{i\theta}z, w)$ with $e^{i\theta s} = 1$. Hence, the formal normal form that we derive provides a solution to the equivalence problem also in the holomorphic category. At last we derived some equivalence properties of a family of Bishop surfaces.

In the fourth chapter, we generalize the work of Moser to the higher dimensional case. For a certain codimension two CR singular submanifold in $\mathbb{C}^{n+1}$ ($n \geq 2$), we first derive a pseudo-normal form for M near the origin, then use it to give a necessary and sufficient condition when $(M, 0)$ can be formally flattened. Finally we prove that $(M, 0)$ is holomorphically equivalent to the quadric $(M_\infty : w = |z|^2, 0)$ if and only if it can be formally transformed to $(M_\infty, 0)$ by using the famous KAM rapid iteration theorem.

Key words: Bishop surfaces, CR singular manifolds, Vanishing Bishop invariant, Holomorphic equivalence, Normal forms.



武汉大学优秀博士学位论文文库

已出版：

- 基于双耳线索的移动音频编码研究 / 陈水仙 著
- 多帧影像超分辨率复原重建关键技术研究 / 谢伟 著
- Copula函数理论在多变量水文分析计算中的应用研究 / 陈璐 著
- 大型地下洞室群地震响应与结构面控制型围岩稳定研究 / 张雨霆 著
- 迷走神经诱发心房颤动的电生理和离子通道基础研究 / 赵庆彦 著
- 心房颤动的自主神经机制研究 / 鲁志兵 著
- 氧化应激状态下维持黑素小体蛋白低免疫原性的分子机制研究 / 刘小明 著
- 实流形在复流形中的全纯不变量 / 尹万科 著
- MITA介导的细胞抗病毒反应信号转导及其调节机制 / 钟波 著
- 图书馆数字资源选择标准研究 / 唐琼 著
- 年龄结构变动与经济增长：理论模型与政策建议 / 李魁 著
- 积极一般预防理论研究 / 陈金林 著
- 海洋石油开发环境污染法律救济机制研究 / 高翔 著
——以美国墨西哥湾漏油事故和我国渤海湾漏油事故为视角
- 中国共产党人政治忠诚观研究 / 徐霞 著
- 现代汉语属性名词语义特征研究 / 许艳平 著
- 论马克思的时间概念 / 熊进 著
- 晚明江南诗学研究 / 张清河 著

目 录

第一章 综述	1
1.1 一些整体和局部等价问题的研究概况.....	1
1.2 本文的主要工作	7
第二章 具有消失 Bishop 不变量的 Bishop 曲面的 形式理论	14
2.1 近似正规型间形式映射的唯一性	14
2.2 具有消失 Bishop 不变量的 Bishop 曲面的完 全形式不变量.....	32
2.3 具有消失 Bishop 不变量的 Bishop 曲面的代 数等价性	39
第三章 具有消失 Bishop 不变量的 Bishop 曲面的 双曲几何和等价分类问题	45
3.1 具有消失 Bishop 不变量的 Bishop 曲面上的 双曲几何性质.....	45
3.2 具有消失 Bishop 不变量的 Bishop 曲面的等 价分类问题.....	53
3.3 一类特殊 Bishop 曲面的一些等价性质	59
第四章 一类余维数为 2 且形式等价于一个二次曲面的 CR 奇异流形	68
4.1 一些记号和背景介绍	68
4.2 一类余维数为 2 的 CR 奇异流形的拟正规型	69

4.3 用二次曲面的自同构对全纯映照正规化.....	80
4.4 主要定理的收敛性证明	87
参考文献.....	99
致谢.....	104

第一章 综 述

1.1 一些整体和局部等价问题的研究概况

在本文中,我们将研究一些带有 CR 奇性曲面的局部等价问题. 假设 M 是 $\mathbb{C}^n$ 中的一个子流形, p 是 M 中的一个点, 我们定义 $\text{CR}(p)$ 是 M 在 p 点的 **CR 维数**, 也就是说, 是 $T_p^{(0,1)}M$ 的复维数. p 被称为 **CR 点**, 如果对于任意的 $q(\in M) \approx p$, 都有

$$\text{CR}(q) = \text{CR}(p);$$

否则, p 被称为 **CR 奇异点**. 在多复变函数论中, 我们称两个芽 $(M, p), (M', p')$ **局部等价**, 如果 p, p' 分别存在在 M, M' 中的一个邻域 U, U' , 以及一个从 U 到 U' 的双全纯等价映射 F , 满足

$$F(p) = p'.$$

研究这类问题, 我们总是试图找到曲面在这一固定点的完全全纯不变量. 一般说来, 曲面在 CR 点和 CR 奇异点的几何性质间存在很大的差异.

1. 一些整体等价和 CR 流形间的局部等价问题

Poincaré、Cartan 最先研究了 CR 流形间的局部等价问题. 早在 20 世纪初, Poincaré 在 [Po1907] 中证明了双圆盘与二维复球之间的不双全纯等价性, 从而得到了与单复变函数论中的黎曼映照定理截然不同的现象, 同时从一个侧面说明了多复变函数论中区域的整体等价问题的复杂性. 同时, 他注意到 $\mathbb{C}^n (n \geq 2)$ 中区域的内部复结构与区域边界的复结构, 即边界的 CR 结构紧密相关, 这就启发我们试图通过研究区域边界 CR 结构的局部等价问题来研究部分

区域的整体等价问题. 事实上, C. Fefferman^[Fe74] 和 Bochner (参见 [Ho73] 或 [Kr82]) 在他们著名的工作中, 证明了两个有界的光滑强拟凸域是双全纯等价的当且仅当它们的边界是 CR 等价的. 进一步, Pinchuk^[Pi75] 和 Lewy^[Le77] 证明了如果上述两个区域的边界是实解析的, 那么区域间的全纯等价映射可解析延拓到区域的一个邻域内, Webster 在 [Web77] 中则得到了相应的一个代数结果. 有许多进一步的事实证明了区域边界的 CR 性质在决定区域的双全纯等价性中扮演着非常重要的角色, 有兴趣的读者可参见 [CJ96], [HJ98], 或综述性文章 [BER00b], [IK99] 及它们后面的参考文献.

下面讨论双全纯等价问题中的局部理论. 首先, 对于 CR 流形中的一类重要曲面, 即 Levi 非退化的实解析超曲面情形, Chern-Moser 在著名的 [CM74] 一文中给出了这类曲面的正规型, 得到了它们的完全不变量 (早期的工作参见 [Ca32a], [Ca32b], [Ta62], [Ta67]). 在第二章和第四章中, 我们将把我们得到的正规型与 [CM74] 中的正规型进行类比, 事实上, 这些正规型间存在一些类似之处 (详见注 2.2.1 和注 4.2.1 (1)). 因此在这里, 我们有必要简要叙述一下 Chern-Moser 理论.

假设 M 为 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中的一个 Levi 非退化的实解析超曲面, $p_0 \in M$. 经过一个双全纯变换, p_0 被映到 0 点, 且在坐标 $(z, w) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ 下, M 在 0 点附近可由下式定义:

$$\operatorname{Im}(w) = zBz^* + F(z, \bar{z}, \operatorname{Re}(w)), \quad (1.1.1)$$

这里 $()^*$ 表示 Hermit 转置, 即 $z^* = \bar{z}^t$, B 是一个对角矩阵且前面 p 个元为 1, 后面 $q = n - p$ 个元为 -1 , $F(z, \bar{z}, \operatorname{Re}(w))$ 是一个实解析的实值函数. 如果定义 $z, \bar{z}$ 的权均为 1, $\operatorname{Re}(w)$ 的权为 2, 那么在此权系统下, F 还满足 $F = O(3)$. 记 $\mathcal{F}$ 为所有满足上述性质的 F , 且把 $F \in \mathcal{F}$ 分解成 (k, l) 型, 即记

$$F(z, \bar{z}, s) = \sum_{k, l=0}^{\infty} F_{kl}(z, \bar{z}, s),$$

其中 F_{kl} 为 (k, l) 型, 即满足

$$F_{kl}(t_1 z, t_2 \bar{z}, s) = t_1^k t_2^l F_{kl}(z, \bar{z}, s), \quad t_1, t_2 > 0.$$