

中师数学函授教材

平面几何

江西省赣州师范函授处

一九八一年一月

编 印 说 明

《平面几何》是根据昆明师范学院函授教材翻印的。在翻印时我们对原书内容作了一些变动。本书由我处刘秀英、王鹤鸣、胡运铤、任万安老师负责选编校对。由于我们的水平不高，错误和缺点在所难免，敬请批评指正！

本书供我区中师数学函授学员第三学年上学期作教材用，要求在八一年九月至八二年一月前学完。

赣州师范学校函授处

一九八一年四月

第一章 符 号

圆和弧、角

$=$	等于 等积于	$\sin$	正弦
$\neq$	不等于	$\cos$	余弦
$\approx$	约等于、近似于	tg	正切
$>$	大于	ctg	余切
$<$	小于	$\sec$	正割
$\leq$	小于或等于	$\csc$	余割
$\geq$	大于或等于		
$\therefore$	因为		
$\therefore$	所以		
$\perp$	垂直于		
$\parallel$	平行于		
$\cong$	全等		
$\sim$	相似于		
$\angle$	角		
$\triangle$	三角形		
$\square$	平行四边形		
$\odot$	圆		
$\frown$	弧		

线段如果两端无限延长，就称为射线（或半直线）。

这个名称中射线包含它的由来，星球射出的光线。

目 录

第一章 线段、射线、直线、圆和弧、角

1.1	线段、射线、直线.....	(1)
1.2	度量线段的工具、长度单位.....	(2)
1.3	圆和圆弧.....	(4)
1.4	角和角的度量.....	(7)
1.5	角的分类.....	(14)
1.6	作已知角平分线、等角、过已知点作已知直线的垂线.....	(15)
1.7	对顶角.....	(17)

第二章 三角形

2.1	三角形.....	(20)
2.2	有关三角形的名词释义.....	(20)
2.3	等腰三角形.....	(21)
2.4	轴对称图形.....	(25)
2.5	全等三角形判定定理.....	(28)
2.6	有关三角形的不等量定理.....	(37)
2.7	垂线和斜线.....	(43)
2.8	直角三角形全等判定定理.....	(46)
2.9	轨迹.....	(48)

第三章 平行线

3.1	平行线	(55)
3.2	平行线的画法	(58)
3.3	平行线的判定与性质	(61)
3.4	三角形的内角和	(66)

第四章 多边形

4.1	多边形的对角线	(72)
4.2	多边形的内角和	(72)
4.3	平行四边形和它的性质	(74)
4.4	平行四边形的判定	(78)
4.5	几种特殊的平行四边形——矩形、菱形、 正方形	(81)
4.6	平行线等分线段定理	(84)
4.7	三角形的中位线和重心	(86)
4.8	梯形和它的中位线	(88)
4.9	矩形的面积	(93)
4.10	平行四边形、梯形、三角形的面积	(95)
4.11	就积变形	(97)
4.12	勾股定理	(99)
4.13	长度单位的诱导单位、面积和应用	(101)
4.14	土地丈量	(105)

第五章 圆

5.1	通过不在一直线上的三点可作一个圆，也只可	
-----	----------------------	--

作一个圆	(114)
5.2 由圆的对称性得出的结论	(116)
5.3 同圆或等圆中, 圆心角, 它所对的弧, 弧 所对的弦心距诸量间的关系	(117)
5.4 圆的切线	(121)
5.5 和圆相交的两直线所形成的角	(123)
5.6 两圆的相关位置	(128)
5.7 几个作图题	(131)
5.8 连接	(140)
5.9 用轨迹法解作图题	(149)

第六章 相 似 形

I. 成比例的线段

6.1 线段的度量和两条线段的比	(153)
6.2 成比例的线段(一)	(156)
6.3 成比例的线段(二)	(168)

II. 相似形

6.4 三角形的相似	(179)
6.5 位似和相似	(194)
6.6 相似多边形	(208)
6.7 圆周长和圆面积	(220)
6.8 直角三角形中成比例的线段	(223)
6.9 勾股定理的推广	(228)
6.10 三角形中几条重要线段的计算	(230)
6.11 在圆中的比例线段	(237)
6.12 用代数法解作图题	(245)

6.13 正多边形的作法.....	(252)
-------------------	-------

第七章 解直角三角形

I. 锐角三角函数

7.1 三角比.....	(262)
--------------	-------

7.2 三角函数的线值表示.....	(264)
--------------------	-------

II. 解直角三角形及其应用

7.3 解直角三角形、等腰三角形、等腰梯形.....	(269)
----------------------------	-------

7.4 解直角三角形应用举例.....	(275)
---------------------	-------

第一章 线段、射线、直线、 圆和弧、角

1.1 线段、射线、直线

几何学是研究客观世界物体的形状、位置和大小的科学。这里先介绍平面几何，即是说，首先只讨论在同一个平面上的图形，而且从最简单的图形——直线形开始。以后凡无特别声明，都指平面图形。

木工师傅在开始使用斧、锯、刨这些工具之先，要利用墨斗弹上一条墨线，就是介于两个定点间的一段笔直的线。牛头刨刨刀尖所走的就是一段笔直的线。建筑工人砌墙时，利用标线检查墙砌的是否合格。贫下中农在平整土地以后，利用拉紧的绳子把田埂搞得笔直。

我们把介于两点之间笔直的线，称为（直）线段。这两

点称为线段的端点。以A、



图 1—1

B为端点的线段就记为“线段AB”（线段BA）。有时也以一个小写字母例如a表示（图1—1）。

线段如果只许超出一端无限延长，就称为射线（或半直线）。这个名词本身暗示它命名的由来：星球射出的光线，

就是射线。要表示射线，通常用两个字母，第一个表示它起始的端点，第二个可以是射线上任一点。图 1—2 的射线记为“射线 AB”。

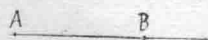


图 1—2

将线段超出两个端点无限延长，就得出直线。这是由拉紧了线、纸的折痕等等抽象出来的概念。直线用它上面两点来表示它，也可以用一个小写字母来表示。

线段有两个端点，射线有一个端点。前者有起有止，后者有起无止。直线没有端点，没有起止。

在纸上画直线利用直线板，在工件上画直线利用画线规。

通过一已知点，可以引无数条直线。但是

通过两已知点 A 和 B，可以引一条也只有一条直线 AB。

两条不同的直线如果相交，只能交于一点。因为如果有两个公共点，它们就将重合成一条直线了。



图 1—3

由一些线段依次尾、首（最初的起点和最末线段的终点除外）相联结组成的图形称为折线。除直线和折

线以外的一切线称为曲线（图 1—3）。

平面的所谓平，表现在那里呢？——任一条直线只要有两点落在平面上，那么该直线上的点点都落在平面上。

1.2 度量线段的工具、长度单位

两点 A、B 之间（图 1—3）以直线段、折线和曲线相

连，通过度量和直观，最短的是线段。经验启示我们，两点之间，直线段最短。这最短的直线段的长度，称为两点间的距离。

距离用什么来量呢？在没有工具可以利用的条件下，用手上的“虎口”，用两手伸直的“一托”，用“步幅”，都可以作粗略的度量。贫下中农丈量土地，使用步弓（图 1—4）（两脚尖间的距离固定，例如 6 尺、5 尺或 3 尺）测绳、皮尺。木工师傅使用折尺或钢卷尺。工厂里一般使用卡钳配合钢尺，游标卡尺，千分卡尺等等。现代科学技术发达到这样的程度，小到微观世界核子之微，大到宏观世界宇宙星球之广，都可设法测定长度。

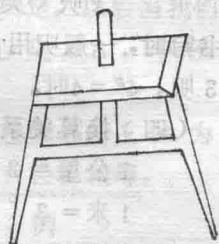


图 1—4

度量长度，我国采用公制作为基本计量制度，也采用市制，有的地方还采用英制。国际上通用公制和英制。现将这几种长度单位及换算关系列下，以便查考。

（一）公制

1 公里(km) = 1000 米,

1 米(m) = 10 分米,

1 分米(dm) = 10 厘米,

1 厘米(cm) = 10 毫米。

1 毫米(mm) = 100 忽米或丝(cmm)。

（二）市制

1 里 = 150 丈

1 丈 = 10 尺

1 尺 = 10 寸
1 寸 = 10 分

(三) 英制

1 哩 (海里) = 6080 呎 (英呎),
1 哩 (英里) = 5280 呎,
1 码 = 3 呎,
1 呎 (英呎) = 12 吋 (英寸)。

在书写时,一般呎用 “'” 表示,吋用 “” 表示。例如: 3' = 3 呎, 4” = 4 吋。

(四) 换算关系

1 公里 = 2 (市) 里,
1 米 = 3 (市) 尺 = 3.2808 呎,
1 哩 = 1.853 公里,
1 哩 = 1.609 公里,
1 吋 = 25.4 毫米。

各种不同的实践需用不同的单位长度。一般讲来,农业上用米,工厂里用毫米,建筑工人用厘米,科学上用厘米,交通上用公里,航海往往用哩或涅,天文学上用光年,(注意:年是时间单位,光年是长度单位。光速是每秒 30 万公里,光一年传播的距离叫做一光年。例如北极星距地球的距离是 54 光年) 等等。

1.3 圆和圆弧

人类从自然界中提取几何的形式,月亮的圆形和镰刀形启发人们制作了大量的圆形和圆弧形生产工具和生活用具。利用车轮在地上滚动,为劳动人民不知节约了多少劳

力，创造了多少财富。

画圆使用两脚规即圆规。固定的脚尖是中心或圆心，移动脚尖就画出了一个圆周，简称为圆。圆是这样一个平面图形，它上面的一切点到平面上一个定点的距离是定长。这定点就是圆心而圆心和圆周上任一点的连线段称为半径。同一圆的半径都相等。

圆由它中心的位置和半径的大小所决定。以后当我们说“作 $\odot A(r)$ ”时，表明作一个圆，圆心是点A，半径等于r。

圆上两点的连线段称为圆的弦，通过圆心的弦称为直径。直径等于半径的两倍。因而同圆的直径都相等。

工厂里惯常用希腊字母 φ 表示直径，例如JO—324电动机的转轴记着 $\varphi 28$ （图1—5），就表明直径为28毫米的圆钢。

请自己说明：直径是最长的弦。



图 1—5

如果两圆半径相等，当它们的中心重合时，这两圆就点点重合。这样的两个圆称为等圆。等圆的半径相等，等圆的直径相等。

两个图形如果能移动其位置，使点点重合，即是说，如果能把它们迭合起来，就叫做全等图形。两个全等图形可以看为同一个图形在空间所占的两个位置。长度相等的线段是全等图形；半径相等的圆是全等图形。它们是可以互相迭合的，或者说得更确切一些，它们都可以移动使在空间占同一位置。

圆周上任意两点间的部份，称为圆弧，这两点称为弧的

端点，以A、B为端点

的弧记作 $\widehat{AB}$ 或 $\widehat{BA}$ 。

图1—6上有两条弧以A、B为端点，为了区别它们，一条记为

$\widehat{AMB}$ ，一条记为 $\widehat{ANB}$ 。

前者小于半圆周，称为劣弧；后者大于半圆周，称为优弧。

圆弧和相应的弦所组成的图形称为弓形，图1—7中， $\widehat{AMBA}$ 是弓形。圆弧和通过它端点的两条半径所组成的图形称为扇形，如图1—7里的 $\widehat{ANCOA}$ 。



图1—8

古人射箭用的弓就是弓形，工厂里的月牙键的断面也是弓形（图1—8）。打油用的漏斗，烟囱的顶盖，就是用扇形的铁板做成的。

习题

1. 给了两个线段，怎样用圆规比较它们的大小（长短）？

2. 自己画三个线段a、b、c，使 $a > b > c$ （读作a大于b，b大于c）。试利用直尺和圆规作下列线段：

（1） $a - b + c$ ；（2） $a - (b - c)$ 。然后用圆规比较这两个线段的大小，从比较过程得出什么规律？

3. 中国政府和人民积极支持中小国家和人民争取两百万领海的斗争，你具体说200哩是多少里？

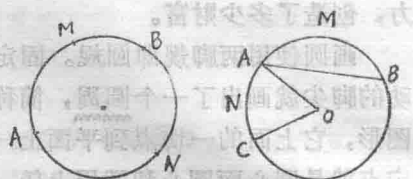


图1—6

图1—7

4. 地球半径是6370公里，合多少哩？

5. 昆明到首都北京的航空距离约为2100公里，这实际上不是直线距离而是通过北京昆明两地和地球中心表面交截地球所得的大圆弧。试表明这个长度约等于地球大圆长度的

$\frac{1}{19}$ 。（计算时，取地球半径 $r=6400$ 公里，圆周率 $\pi=\frac{22}{7}$ ）

6. 一根尺子用什么办法检查它的边缘是不是直的？

7. 木工师傅刨木板，怎样检查刨平了没有？根据是什么？

8. 月球和地球的距离是384000km，日球和地球的距离是1.5亿km，光速是每秒30万km，试计算光由月球、日球传到地球各需时多少？

9. 在地面附近2000m范围内，平均每升高12m，气压计的水银柱下降1mm。已知海平面处达水银柱高为760mm，称为1标准气压（温度0℃）。昆明的海拔为1892m（即高出海平面1892m）。问昆明的气压约为多少？（毫米水银柱）（这个例子告诉我们，利用气压计可以粗略地测知一个地方的高度）。

10. 设M为线段AB的中点，若C在这线段上，则CM等于CA、CB差的一半；若C在这线段的延长线上，则CM等于CA、CB和的一半。试证之。

这个命题的后半在钳工划线和加工过程中是常用的。

1.4 角和角的度量

一、角

我们把从一点引出的两条射线所构成的图形称为角。图

1—9中，点O称为角的顶点，射线OA和OB称为角的两边，这个角以符号 $\angle AOB$ （或 $\angle BOA$ ）表示，规定把表示顶点的字母写在中间，如果只有一个角以O为顶点，就把它简写为 $\angle O$ ，有时也以数码字或其它字母表示角，如图1—10。

两个角如果有公共的顶点和一条公共边，而且各在公共边的一侧，则称为邻角，图1—10中 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 是邻角，而 $\angle 1$ 和 $\angle 3$ 则不是邻角。

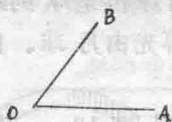


图 1—9

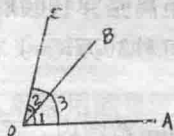


图 1—10

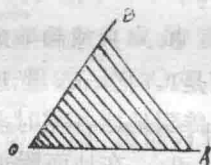


图 1—11

我们也把角看成是由一条射线绕着它的顶点旋转得来的（图1—11），角的两边就是这射线起始和终止的位置。平面上介于角的两边间的（无限）部分，其中一部分称为角的内部，其它部分称为外部。如果在角的两边上各任取一点，此两点的连线如全部容纳在平面的一部分内，通常就把这一部分作为角的内部。

两个角只有公共的顶点和边缘，没有公共的内部点，如图1—10中的 $\angle 3$ 称为 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 的和， $\angle 2$ 称为 $\angle 3$ 和 $\angle 1$ 的差，写作

$$\angle 3 = \angle 1 + \angle 2 \quad (\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC)$$

$$\angle 2 = \angle 3 - \angle 1 \quad (\angle BOC = \angle AOC - \angle AOB)$$

两个角如果能迭合（顶点与顶点重合，边与边重合），

就称为等角。

要比较两个角的大小，我们移动其中一个使与另一个角有共同的顶点，并有一条公共边，而且位于这公共边的同侧，如图 1—10 的 $\angle AOB$ 和 $\angle AOC$ 那样。放在这种位置， $\angle AOB$ 的边 OB 在 $\angle AOC$ 内部，就说

$$\angle AOB < \angle AOC \text{ (或 } \angle AOC > \angle AOB \text{)}$$

小于号“ $<$ ”和角的符号“ $\angle$ ”要注意写清楚， $\angle AOB$ 是 $\angle AOC$ 的一部分，全量大于其部分。

对于两线段大小的比较，同圆或等圆上两弧大小的比较，都有与此完全类似的办法，请各自注意。

二、角的度量

现在转入角的度量，并把角的度量与圆弧的度量相提并论。

给了一个 $\angle AOB$ (图 1—12)，以顶点 O 为圆心，任意长为半径作圆，以 A 、 B 表示圆和角的两边的交点

$\angle AOB$ 称为 $\widehat{AB}$ 所对的圆心角。(或扇形 $ABOA$ 的中心角) $\widehat{AB}$ 称为 $\angle AOB$ 所对的弧。容易看出，把角扩大(或缩小)几倍，它所对的弧也跟着扩大(或缩小)同样的倍数。

如果把角看成是射线绕始点 O 旋转而成的，初始位置是 OA 让射线向一个方向旋转，角逐渐加大。

当终边落在射线 OA 的反向延长线 OA' 上时， $\widehat{ABA'}$ 是半圆(周)，它所对的圆心角 $\angle AOA'$ 称为平角。让射线

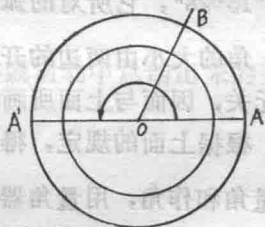


图 1—12

继续旋转，直至回到初始位置OA，即整整旋转了一周，所得的角称为周角。周角等于平角的两倍。

要计量角，得有个单位。不同实践活动采取不同的单位，一般用度做量角的单位，科学上也采用弧度，军队里采用密位。

1 密位 = $\frac{1}{6000}$ 周角。此地介绍“度”和“弧度”。

(一) 度分秒制或六十分制

分周角成360等份，每份称为1度，取作量角的单位。

又把1度分成60等份，每份称为1分，1分分为60等份，每份称为1秒取为量角的辅助单位。度、分、秒分别以符号°、′、″表示即

$$1^{\circ} = 60', \quad 1' = 60''$$

$$\text{周角} = 360^{\circ} = 21600' = 1296000''.$$

以角顶为中心作圆，那么一度角所对的弧称为一度弧。前者取为量角的单位，后者取为量弧的单位。一个角含 $20^{\circ}15'28''$ ，它所对的弧就是 $20^{\circ}15'28''$ 的弧。

角的大小由两边的开度（张开的大小）决定，与边的长短无关，因而与上面所画的圆半径无关。

根据上面的规定，得出：圆心角以它所对的弧来量。为了量角和作角，用量角器（图1—13）。木工用角尺、活动角尺。机床上有刻度盘，可以让刀具或工件旋转一个角度，符合图纸上规定的加工要求。