Weijifen

微积分

上册

主 编 林举翰

编 者 詹涌强 吴丽镐 陈妙玲

杨春侠 黄业文 卢 珍 杨荣领

华南理工大学出版社

SOUTH CHINA UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

微 积 分

（上 册）

主　编　林举翰

编　者　詹涌强　吴丽镐　陈妙玲

　　　　杨春侠　黄业文　卢　珍

　　　　杨荣领

华南理工大学出版社

SOUTH CHINA UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

·广州·

图书在版编目(CIP)数据

微积分(上册)/林举翰主编. —广州：华南理工大学出版社，2013. 8
ISBN 978-7-5623-4032-4

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①林… Ⅲ. ①微积分—高等学校—教材 Ⅳ. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 204363 号

微积分(上册)
林举翰 主编

出 版 人：韩中伟
出版发行：华南理工大学出版社
(广州五山华南理工大学 17 号楼，邮编 510640)
http://www.scutpress.com.cn E-mail:scutc13@scut.edu.cn
营销部电话：020-87113487 87111048 (传真)
责任编辑：欧建岸
印 刷 者：广东省农垦总局印刷厂
开 本：787mm×960mm 1/16 **印张**：13 **字数**：248 千
版 次：2013 年 8 月第 1 版 2013 年 8 月第 1 次印刷
印 数：1～5 000 册
定 价：25.00 元

前　言

本《微积分》教材的内容包括一元函数微积分及其应用、多元函数微积分及其应用、常微分方程和无穷级数等。本教材适用于独立学院经济类与管理类专业文、理科本科生，为学生今后学习各类专业后继课程和进一步扩大数学知识奠定必要的数学基础。

本教材参照2003年教育部数学基础课教学指导委员会重新修订的全国“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，结合我们最近七八年间教学实践的状况，根据经管类培养“应用型”、“创新型”人才的需要，对原有的《微积分》教材进行了一些具体的改革。其要点如下：

1. 本教材在讨论微积分的研究对象——函数的过程中，概括给出学习微积分常用的初等数学知识，加强中学数学与大学数学的衔接，能增强入学新生学习微积分的信心。

2. 本教材以微积分从诞生到严密化的发展进程为主线，系统介绍了微积分的基本概念、基本理论和基本运算方法及微积分在经管类专业的应用，体现了数学研究的对象决定了它的两个基本特点，即高度抽象性和应用的广泛性。这也是对培养应用型人才的必然要求。

3. 一般而论，研究型人才应具有较扎实的数学理论基础，而应用型人才应把重点放在数学内容的数学思想和数学方法层面上，并且通过多思考、多讨论、多练习和多总结的学习方法使应用数学思想方法分析和解决实际问题的能力获得提升。例如，通过学习极限的思想方法、学习定积分的的元素法、学习无穷级数概念的思想由来，等等，就能起到提升分析和解决实际问题的能

力的作用。

4. 本教材每节配有习题，每章有总复习题。习题中不仅有常规的用来检查“学、思、使”是否到位的问题，也有一些包括要求有某种程度的独立见解、有能动性或创造精神的问题。

全书分为上、下两册共8章，讲课时数共约96学时，讲课与复习及作业时数比为1∶2左右。

本书由林举翰主编，负责全书统稿、定稿。参加编写的人员有第一章黄业文、杨荣领；第二章卢珍；第三章吴丽镐；第四章杨春侠；第五章詹涌强；第六章黄业文、陈妙玲；第七章陈妙玲、杨春侠、卢珍；第八章詹涌强、杨荣领、吴丽镐。

华南理工大学广州学院领导关心和支持学校教材建设，多次派出数学教师参加本省的数学教学经验交流会和全国的大学数学课程报告论坛学习。华南理工大学出版社为本书的出版付出了辛勤的劳动。在此，我们一并表示诚挚的谢意。

由于编者水平有限，书中一定存在不妥或错误之处，恳请读者批评指正。

编　者

2013年8月

目 录

第一章　函数、极限与连续

初等函数的研究对象是不变的量，而微积分的研究对象是变动的量。所谓函数就是变量之间的一种确定的关系。极限是微积分最基本的概念之一，它的思想是深入研究函数的变化性态的有力工具。

本章将学习函数、极限与连续的基本概念、性质、运算法则及应用等。

第一节　函数概念

一、实数与数轴

本课程所研究的数主要是实数。实数由有理数和无理数组成。每一个有理数都可以表示为$\frac{p}{q}$，而无理数不能表示为$\frac{p}{q}$(p，q 为整数，$q\neq0$)。因此，有理数可以用有限十进制小数或无限十进制循环小数表示，而无理数为无限十进制不循环小数。

规定了原点、正方向和单位长度的直线称为数轴。于是，任一实数都对应数轴上唯一的一点；反之，数轴上每一点也唯一地代表一个实数，全体实数与数轴上的点是一一对应的。在下面的叙述中，我们对“实数 a”与“点 a”不加区别，看作是相同的意思。

二、常量与变量

在日常生活和生产实践中，我们常常会遇到各种各样变化着的量，如一昼夜的温度、生产中产品的成本、曲边梯形的高，等等。这种在某一过程中可以取不同数值的量叫做变量。与此相反，在某一过程中保持相对不变的数值，如等速运动的速度、矩形的高，等等，这种量叫做常量。

一个量是常量还是变量，并不是绝对的。同一个量在某种条件下是常量，而在另一种条件下可能是变量。例如，一根钢轨的长度，在温度变化不大时，由于热胀冷缩而引起钢轨长度的变化是微小的，通常可以忽略不计，这时我们把它看作常量。但在铺设钢轨时，就要考虑一年四季气温变

化对钢轨长度的影响，此时钢轨长度的变化较大，不能忽略不计，就应该把钢轨的长度看作变量，各根钢轨接头之间要适当地留一段空隙。可见，一个量是常量还是变量，要具体情况具体分析。

通常用字母 a，b，c，x_0…等表示常量，用 x，y，t…等表示变量。

三、集合、区间与邻域

1. 集合概念

集合是指所考察的具有确定性质的对象的总体，简称集。组成集合的每一个对象称为该集合的元素。通常用大写字母 A，B，C，…表示集合，用小写字母 a，b，c，…表示集合的元素。若 x 属于 A，记作 $x\in A$；若 x 不属于 A，记作 $x\notin A$，或 $x \overline{\in} A$。

设 A，B 是两个集合，则集合

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$$
$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}$$
$$A\setminus B=\{x\mid x\in A \text{ 但 } x\notin B\}$$

分别称为 A，B 的并集、交集及差集。

2. 区间

所谓区间就是介于某两点之间的一切点所构成的集合，这两个点称为区间的端点。如果两个端点都是定数，则称此区间为有限的，否则称为无限的。常见的有限区间如：设 a，$b\in\mathbf{R}$，且 $a<b$，集合 $\{x\mid a<x<b\}$ 称为开区间，记作 (a, b)，如图 1－1a 所示；集合 $\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为闭区间，记作 $[a, b]$，如图 1－1b 所示；集合 $\{x\mid a<x\leqslant b\}$ 称为左开右闭区间，记作 $(a, b]$，如图 1－1c 所示。对于无限区间，例如 $\{x\mid x>a\}$，记作 $(a, +\infty)$，记号“$+\infty$”读作正无穷大，如图 1－1d 所示。类似地，还有区间 $(-\infty, b]$，记号“$-\infty$”读作负无穷大。无限区间也可以称为无穷区间。

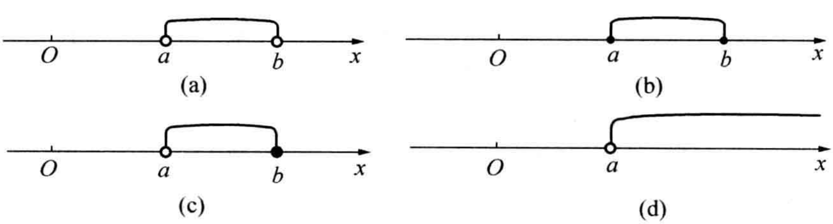

图 1－1

3. 点 a 的 δ 邻域

以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的邻域，记作 $U(a)$。

设 δ 是任一正数，则开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ 就是点 a 的一个邻域，这个邻域称为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a, \delta)$，即

$$U(a, \delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}$$

点 a 称为这个邻域的中心，δ 称为这个邻域的半径(图 1－2)。

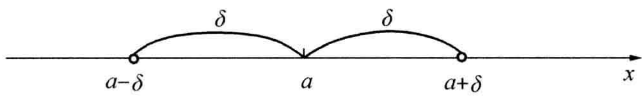

图 1－2

由于 $a-\delta<x<a+\delta$ 相当于 $|x-a|<\delta$，因此

$$U(a, \delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}$$

因为 $|x-a|$ 表示点 x 与点 a 间的距离，所以 $U(a, \delta)$ 表示与点 a 的距离小于 δ 的一切点 x 的全体。

有时候用到的邻域需要把邻域中心去掉。点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后，称为点 a 的去心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(a, \delta)$，即

$$\mathring{U}(a, \delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$$

这里 $0<|x-a|$ 就表示 $x \neq a$。

四、函数定义

在同一个自然现象或技术过程中往往有几个变量在同时变化着。这几个变量并不是孤立地在变，而是相互联系并遵循着一定的变化规律。下面就两个变量的情况举几个例子。

例 1　某气象台用自动温度记录仪记录一昼夜的温度变化情况。温度记录仪在坐标纸上描出一条反映温度变化的曲线，如图 1－3 所示。

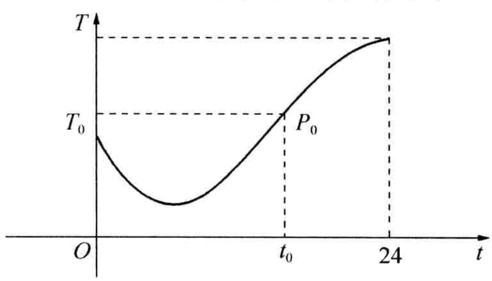

图 1－3

图中横坐标是时间 t(h)，纵坐标是温度 T(℃)，曲线形象地反映在时间区间[0，24]内，温度 T 随时间 t 的变化而变化的规律。对任一时刻 $t_0 \in [0, 24]$，图中曲线上有唯一的点 P_0 与之对应。

例 2 在自由落体运动中，物体下落的位移 s(m)与时间 t(s)的关系为

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

其中重力加速度 $g = 9.8\text{m/s}^2$。假定物体着地的时间 $t = T$，那么当时间 t 在闭区间[0，T]上任取一个数值时，由上式就可以确定 s 的相应数值。

例 3 根据国家统计局公布的统计数据，我国 2006～2010 年的国内生产总值(GDP)如下表所示：

t(年份)	2006	2007	2008	2009	2010
GDP(亿元)	216 314. 4	265 810. 3	314 045. 4	340 903. 1	397 983

从表中可清楚地看出，随着年份 t 的增加我国 GDP 不断增长。对任一年份 $t \in \{2006, 2007, 2008, 2009, 2010\}$，从表中可以确定该年唯一的 GDP。

究竟什么是函数？17 世纪人们所理解的函数基本上就是曲线。直到 18 世纪，占统治地位的思想仍然认为函数是用一个公式表示的。然而，由于科学技术的发展，不断出现新的类型的函数。数学家们认为必须为函数下一个一般性的定义，这对数学本身的发展和应用都是十分必要的。经过几个世纪的探索，直至 1837 年，德国数学家狄利克雷(1805—1859)才对函数给出了一个与现代十分接近的定义。他说，如果对于给定区间上的每一个 x 的值，有唯一的 y 值与其对应，则 y 就是 x 的一个函数。狄利克雷还强调指出，在整个区间上，y 是否按一种或多种规律依赖于 x，以及 y 依赖于 x 的方式能否用数学表达式来表达，都是无关紧要的。下面给出现代常用的函数定义。

定义 设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集。如果对于每个数 $x \in D$，变量 y 按照一定的法则总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y = f(x)$。数集 D 叫做这个函数的定义域，x 叫做自变量，y 叫做因变量。

当 x 取数值 $x_0 \in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$。当 x 取遍 D 的各个数值时，对应的函数值全体组成的数集称为函数的值域。

函数 $y=f(x)$ 中的 f 表示自变量与因变量的对应关系（或法则）。记号 f 也可以用其他字母，如 φ，F 或 y……这时函数就相应记作 $y=\varphi(x)$，$y=F(x)$ 或 $y=y(x)$，等等。

在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义确定的。在例 1 中定义域 $D=[0, 24]$，在例 2 中定义域 $D=[0, T]$，在例 3 中定义域 $D=\{2006, 2007, 2008, 2009, 2010\}$。

在数学中，有时不考虑函数的实际意义，而抽象地研究用算式表达的函数。这时我们约定：函数的定义域就是自变量所能取的使算式有意义的一切实数值。例如，函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域是闭区间 $[-1, 1]$，函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域是开区间 $(-1, 1)$。

如果自变量在定义域内任取一个数值时，对应的函数值总是只有一个，这种函数叫做单值函数，否则叫做多值函数。例 1、例 2 和例 3 中的函数都是单值函数。后面凡是没有特别说明时，函数都是指单值函数。

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，对于任意取定的 $x\in D$，对应的函数值为 $y=f(x)$。这样，以 x 为横坐标，y 为纵坐标就在 xOy 平面确定了一点 (x, y)。当 x 遍取 D 上的每一个数值时，就得到点 (x, y) 的一个集合 C：

$$C=\{(x, y)\mid y=f(x), x\in D\}$$

这个点集 C 称为函数 $y=f(x)$ 的图形（图 1－4）。图中的 W 表示函数 $y=f(x)$ 的值域。

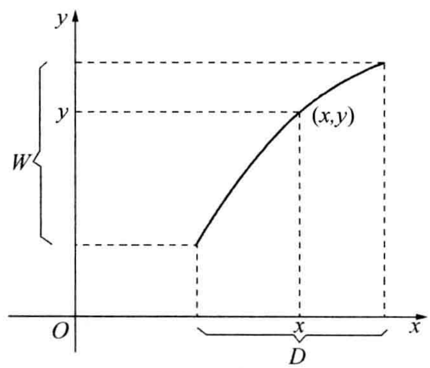

图 1－4

下面再举几个函数的例子。

例 4　函数 $y=2$ 的定义域 $D=(-\infty, +\infty)$，值域 $W=\{2\}$，它的图形是一条平行于 x 轴的直线，如图 1－5 所示。

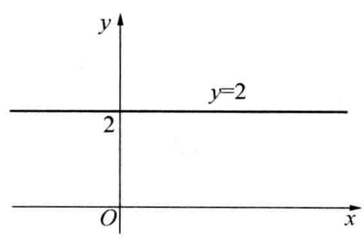

图 1－5

例 5　求函数

$$y=\frac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+3}$$

的定义域。

解 为使函数有定义，这里对于$\frac{1}{1-x^2}$，要求$1-x^2\neq 0$，即$x\neq\pm 1$；对于$\sqrt{x+3}$，要求$x+3\geqslant 0$，即$x\geqslant -3$。

因此，所求函数的定义域为$[-3,\ -1)\cup(-1,\ 1)\cup(1,\ +\infty)$，如图 1-6 所示。

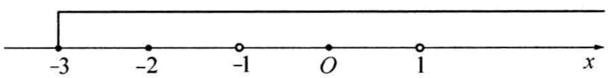

图 1-6

例 6 求函数

$$y=\frac{\sqrt{9-x^2}}{\lg(x+2)}$$

的定义域。

解 这个函数的定义域要求分子的被开方数$9-x^2\geqslant 0$，即$-3\leqslant x\leqslant 3$；分母对数的真数$x+2>0$且$\lg(x+2)\neq 0$，即$x>-2$且$x\neq -1$。所以，所求函数的定义域为$(-2,\ -1)\cup(-1,\ 3]$，如图 1-7 所示。

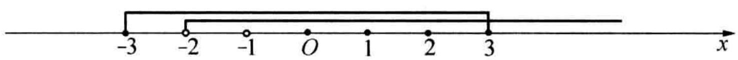

图 1-7

有时一个函数在其定义域的不同部分，对应法则用不同的式子，这种函数叫做分段函数。

例如，函数

$$y=|x|=\begin{cases}x & (x\geqslant 0)\\ -x & (x<0)\end{cases}$$

的定义域为$(-\infty,\ +\infty)$，它的图形如图 1-8 所示。这样的函数称为绝对值函数。

又如，函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & (0\leqslant x<1)\\ 3-x & (1\leqslant x<3)\\ 0 & (3\leqslant x\leqslant 4)\end{cases}$$

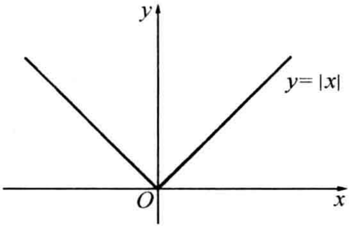

图 1－8

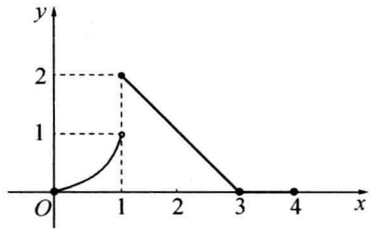

图 1－9

也是一个分段函数，它的定义域为$[0,4]$。当$0\leqslant x<1$时，函数的表达式为x^2；当$1\leqslant x<3$时，函数的表达式为$3-x$；当$3\leqslant x\leqslant 4$时，函数的表达式为0，如图1－9所示。

注意，分段函数在整个定义域上是一个函数，而不是几个函数。

分段函数在实际中也是常见的。如按规定旅客随身携带的物品重量不超过20kg时不收费，若超过20kg每超过1kg收费0.2元。运费y就是物品重量x的一个分段函数，即

$$y=f(x)=\begin{cases}0 & (0\leqslant x\leqslant 20)\\ 0.2(x-20) & (x>20)\end{cases}$$

五、函数的几种特性

1. 函数的有界性

设函数$y=f(x)$在区间I上有定义，如果存在正数M，使得对于所有$x\in I$,都有

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称函数$f(x)$在I上有界。如果这样的正数M不存在，则称函数$f(x)$在I上无界。

例如，$y=\sin x$在区间$(-\infty,+\infty)$内有界，因为对所有的$x\in(-\infty,+\infty)$，$|\sin x|\leqslant 1$。

又如，$y=\dfrac{1}{x}$在$[1,+\infty)$上有界，因为当$x\in[1,+\infty)$时，$\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$。但是，$y=\dfrac{1}{x}$在区间$(0,1)$内无界，因为不存在正数$M$，使得$(0,1)$内的所有的$x$都有$\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$。

2. 函数的单调性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果对于任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加(图 1－10)；如果对于任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调减少(图 1－11)。单调增加和单调减少的函数，统称为单调函数。

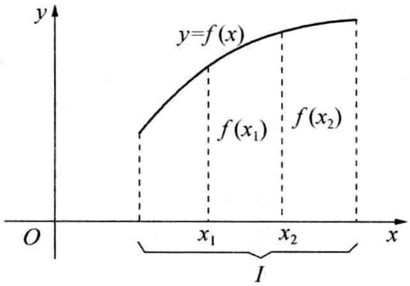

图 1－10

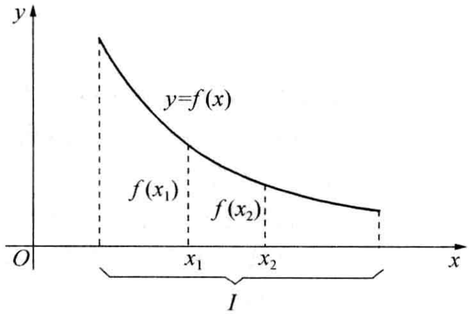

图 1－11

例如，函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调增加，在区间 $(-\infty,0]$ 上单调减少，在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内函数 $f(x)=x^2$ 不是单调的(图 1－12)。

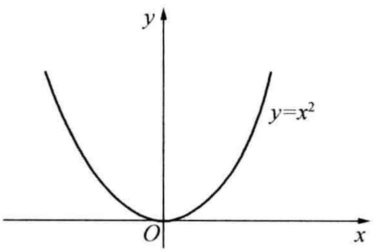

图 1－12

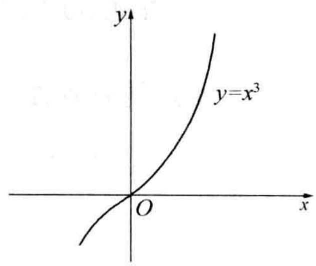

图 1－13

又如，函数 $f(x)=x^3$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加(图 1－13)。

3. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对于任一点 $x\in D$，

$$f(-x)=f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为偶函数；如果对于任一点 $x\in D$，

$$f(-x)=-f(x)$$