初等数学解题思维方法纵横谈

王振群　主编

东北师范大学出版社

CHUDENG SHUXUE JIETI SIWEI FANGFA ZONG HENG TAN

初等数学解题思维方法纵横谈

王振群　主　编

东北师范大学出版社

（吉）新登字12号

初等数学解题思维方法纵横谈

王振群　主编

责任编辑：王殿国　　封面设计：李冰彬　　责任校对：魏明程

东北师范大学出版社出版　　吉林省新华书店发行

（长春市斯大林大街110号）　　长春市凯旋胶版印刷厂制版

（邮政编码：130024）　　长春市凯旋胶版印刷厂印刷

开本：850×1168毫米　1/32　　1994年1月第1版

印张：7.5　　1994年1月第1次印刷

字数：162千　　印数：0 001—3 500册

ISBN7-5602-1335-9/G·635　　定价：5.00元

前　言

纵横谈，论纵横。事物只有在纵析横览、暴露本来面目中，才能透过众多矛盾，提纲携领，把握其规律。有时，我们对某些事物认识不清，那是因为不识庐山真面目，只缘身在此山中；有时，我们对某些事物看得不透，那又是因为不识庐山真面目，只缘身在此山外。天下诸事，皆归一理。

用理智、科学、系统的观点，剖析一下初等数学题，这是一个很艰难的题目。

在数学教育受到举世瞩目的今天，人们再也不愿意把数学教育的目标集中在一道道数学习题上了。事实证明，学习数学不做题，就好比在旱地上学游泳；但只做题不探索规律，则又很难在无边的题海中，达到超越自我，自由驰骋的境界。这样，摆在我们面前一个十分严肃的课题：运用什么教育思想，采取什么教学方式，才能由演习数学习题入手，达到提高学生素质，培养能力的目的。问题难在措施要科学、实用，符合国情。

这又是一个很有用的题目。

众所周知，题海战术是我国数学教育之一大弊端，它打乱了正常的教学秩序，挫伤了学生学习的积极性，制约了学生创造性思维的发展，败坏了教育的声誉，成了社会的一大公害。不可否认，克服题海战术，需要综合治理，优化教育环境，但也和广大教师的数学修养和数学教育思想亟待提高有很大关系。试想，我们的教师，如果能够从现代教育思想出发，从更高的层次上理解数学，是不是能够更有效地抵制这股逆流呢？

出于对上面问题的思考，我们编写了此书，或许能够对这一问题的讨论起点促进作用；或许能够成为第一线工作教师们的一本进修资料；或许能够为在校的学生们提供一本课外活动读物。当

然，即使是为了高考，你也会从中受到启发的。

本书雅俗共赏，每章每节自成体系，出于某种需要，读者可以越过某些章节，阅读自己感兴趣的题目。

限于篇幅，本书不可能对与之有关的问题面面俱到，对于某些没有涉及的问题，希望读者研究时丰富补充。

我非常赞赏牛顿的一句话："如果说我比别人看得远些，那只是由于站在巨人的肩上。"作为一种尝试，本书的新意是明显的，但这正是学习他人经验的成果。在此应该感谢为本书提供资料的有关书籍和论文的作者，对于没有一一列出他们的名字，在此表示歉意。

借此机会，还要感谢对本书给予极大支持的刘清祥教授，他对本书的构思，布局提出了建设性的意见；另外，还要感谢陈飞同志，他为本书绘制了全部插图。

编　者

1993年10月14日

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　　录

第一章

数学思维的基本观点

随着生产力的发展、社会的文明和进步，作为人类文化重要组成部分的数学，从产生、发展到现在，已经成为一门枝繁叶茂，群星璀璨的学科了. 面对这一博大精深的家族，可以说，一个人要想从不同的侧面完全洞悉它是根本不可能的事. 高度的抽象性、逻辑的严谨性，既使其具有应用广泛的主要特征，同时，又成为走进这座迷宫的道道关卡. 人们青睐它的用途，追求它境界的完美，崇尚它慎密周详的推理，又为其自身结构的复杂而畏缩不前. 那么，是不是说数学这门学科就没有最基本的思维方法可言呢？答案是否定的. 事实说明，越是艰深、复杂、庞大的理论，其基本的思想和方法，往往反而显得简单而平凡，人所皆知，“常识而已”.

什么是数学思维的基本观点？对于这个问题，仁者见仁，智者见智. 我们认为，以下的三个观点：计算的观点，方程的观点和转化的观点是所有数学观点中最重要，最基本的. 数学离开这三个观点，就不称其谓数学，因此，有必要用点笔墨，大书一番.

§1·1　计算的观点

数学离不开计算，这是众所周知的事实.

计算是如此的平常，以致每个人都可轻而易举地学会计算很多题目；计算又是如此的神奇，以致那些数学大师们因非凡的计算本领而长久为人们津津乐道：

我国三国时代的伟大数学家刘徽首创“割圆术”，计算出圆周率 $\pi\approx3.14$. 100 多年后，北魏时期杰出数学家祖冲之在刘徽的基

础上继续前进，他殚精竭力，历尽艰辛，算出 $3.1415926<\pi<3.1415927$. 这是中国人在数学方面创下的一次世界纪录，并保持了大约一千年.

相传，大约在公元 1225 年，罗马帝国举行了一次宫廷学者与民间学者的数学对抗赛. 一开始，宫廷学者就来了一个下马威，抛出这样一个难题：

求一数，它的平方加 5 或减 5 仍然是平方数.

在民间学者队伍中有一个才华横溢的数学家叫菲波那契，他沉思片刻，便给出答案：所求数是分数 $\frac{41}{12}$，因为 $(\frac{41}{12})^2+5=(\frac{49}{12})^2$，$(\frac{41}{12})^2-5=(\frac{31}{12})^2$. 赛场哗然，人们为这惊人的计算能力而折服.

一个又一个例子告诉我们，古今很多数学家都具有神机妙算的本领. 他们用计算为数学的创造增辉添彩，同时也证明了：看来简单的计算其作用并不简单，它对我们学好数学是十分重要的. 事实上，计算是人类研究数学的一种最基本的方法. 在很多情况下，当我们用计算的眼光来观察问题时，就会发现问题之所在；当我们用计算的眼光来认识问题时，就会找出解决问题的途径. 本节我们主要以实例来说明上述观点.

一　试算——发现的窗口

朋友，当你面对着下面一串数字

0.39，0.72，1.00，1.52，5.20，9.54

你会想到什么呢？它们是太阳系中水星、金星、地球、火星、木星、土星这六大行星到太阳的平均距离（以日地平均距离为计量单位，即天文单位）.

乍一看，这串数字毫无规律可言. 可是，在 1766 年前后，德国的一位数学教师提丢斯经过一番试算与比较，发现了这样一个近似法则：

先写出一个等比数列：

0.3，0.6，1.2，2.4，4.8，9.6……

然后在这个数列前面加上一项 0，再将每个数字都加上 0.4，就得到：

$$0.4, 0.7, 1.0, 1.6, 2.8, 5.2, 10\cdots\cdots$$

这行数字跟各行星到太阳的平均距离十分相近.

提丢斯的发现被他的朋友、柏林天文台台长、天文学家波德知道后，认为这个数列与实际观察符合得很好，就于 1772 年把它发表了，后来人们就称之为提丢斯——波德法则.

显然，提丢斯——波德法则可用经验公式（没有满意的理论解释，而仅凭经验得到的公式）

$$0.3\times 2^n+0.4$$

来表示. 当 $n=-\infty, 0, 1, 2, 4, 5$ 时，公式分别给出水星、金星、地球、火星、木星、土星到太阳的平均距离.

当时人们只知道太阳系有六大行星，可是按提丢斯——波德法则，还有 $n=3$ 时的数值没有行星与之对应. 于是，天文学家提出大胆的预言：在火星与木星之间有一颗尚未发现的行星，它到太阳的平均距离应为 2.8 天文单位. 紧接着天文学家开始按图索骥，进行艰苦细致的搜寻. 后来，不仅在预定的空间区域发现了"小行星带"，而且还射鹿得马，在此之前发现另一颗新行星——天王星. "小行星带"到太阳的平均距离为 2.77 天文单位，天王星到太阳的平均距离为 19.19，这两个数恰是提丢斯——波德法则中 $n=3$ 和 $n=6$ 时的近似值！至此，我们足以领略到试算的神奇风采和强大威力.

一般来说，发现需要观察. 但是怎样去观察呢？从上面的例子我们不难看出：试算是观察的一条有效途径，是发现的一个明亮窗口. 下面几个例子，将会加深我们的认识.

例 1 将奇数数列：

$$1, 3, 5, 7, 9, 11\cdots\cdots$$

按下述规定分组：第一组有 1 项 1，第二组有两项 3、5，第三组有 3 项 7、9、11……那么对这种分组你有什么发现呢？试证明你的结

论.

解 先算出前4组奇数的和

$1=1$

$3+5=8$

$7+9+11=27$

$13+15+17+19=64$

不难看出：$1=1^3, 8=2^3, 27=3^3, 64=4^3$，由此我们猜测第n组奇数的和应该是$n^3$，这就是我们经试算得到的发现. 下面就来证明它：

显然，第一组，第二组，…，直到第n组共包含原数列的项数为

$$1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

设第n组的和为A_n，原数列前n项和为S_n，则有

$$A_n=S_{\frac{n(n+1)}{2}}-S_{\frac{(n-1)n}{2}}$$

$$=\frac{\frac{n(n+1)}{2}\left[1+\left(2\,\frac{n(n+1)}{2}-1\right)\right]}{2}-\frac{\frac{(n-1)n}{2}\left[1+\left(2\,\frac{(n-1)n}{2}-1\right)\right]}{2}$$

$$=n^3$$

可以看出，此题的解决关键在于经过试算发现第n组奇数的和为n^3，打开这扇窗子，眼前就一片光明.

例2 给定一个非负整数n，试求四个整数的有序数组(a,b,c,d)（其中$0\leqslant a\leqslant b\leqslant c\leqslant d\leqslant n$）的数目.

解 为了使问题明朗化，我们首先列出$n=0, n=1, n=2$时四元组的情况，以便通过试算发现数目的构成规律.

当$n=0$时，满足条件的四元组只有

(0,0,0,0)

当$n=1$时，满足条件的四元组有

(0,0,0,0),(0,0,0,1),(0,0,1,1),

(0,1,1,1),(1,1,1,1)

当 $n=2$ 时,满足条件的四元组有

(0,0,0,0),(0,0,0,1),(0,0,1,1),

(0,1,1,1),(1,1,1,1),(0,0,0,2),

(0,0,2,2),(0,2,2,2),(2,2,2,2),

(0,0,1,2),(0,1,1,2),(1,1,1,2),

(0,1,2,2),(1,1,2,2),(1,2,2,2)

上面的列举借助于树图容易得到. 若设 S_n 为四元组的数目,则 $S_0=1,S_1=5,S_2=15$. 因为从小于、等于 n 的正整数中取出满足条件的四元组容易使用我们联想到从 k 个元素中龋　个元素的组合,因此使上面三个数与组合数建立联系是自然的. 经试算 $S_0=C_4^4,S_1=C_5^4,S_2=C_6^4$,这启发我们猜测 $S_n=C_{n+4}^4$. 怎么证明呢? 事实上,给定非负整数 n,作满足条件的四元组与从集合{0,1,……,n+2,n+3}中取四个元素构成四元子集是等价的. (a,b,c,d)($0\leqslant a\leqslant b\leqslant c\leqslant d$)与集合{a,b+1,c+2,d+3}是一一对应的. 因此有序组的数目就是集合{0,1,……,n+2,n+3}中四元子集的数目,即 $S_n=C_{n+4}^4$.

例 3 欧氏平面内 n 条直线分割平面为若干个区域,试求最多分割为多少个区域.

解 为了寻找区域数目随直线数目变化的规律,试算 n=1,2,3,4,5 等特殊情况是必要的. 试算结果列成下表:

直线数	1	2	3	4	5	……
最大区域数	2	4	7	11	16	……

从表中观察发现,若设直线数为 n 时最大区域数为 A_n,则 $A_n=A_{n-1}+n$. 由平面几何知识不难证明上面的递推式,于是有

$$\begin{aligned}A_n&=A_{n-1}+n\\&=A_{n-2}+(n-1)+n\end{aligned}$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

$=\cdots=2+2+3+\cdots+(n-1)+n$

$=2+\dfrac{(n-1)(2+n)}{2}$

$=\dfrac{n^2+n+2}{2}$

例 4　a)确定所有的正整数 n,使得 2^n-1 能被 7 整除;b)证明:对于所有的正整数 n,2^n+1 不能被 7 整除.(第六届 IMO 试题)

解　显然,我们首先应当通过试算找到 2^n 除以 7 所得余数的规律.我们把试算结果列成下表:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	19	…
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	…
2^n 除以 7 的余数	2	4	1	2	4	1	2	4	1	2	…

受上表试算的启发,于是有下面的证明:

a)设 m 为非负整数,则

$2^{3m}=(2^3)^m=(7+1)^m=7M_0+1$($M_0$ 是非负整数),

$2^{3m+1}=2\cdot 2^{3m}=2(7M_0+1)=7M_1+2$($M_1$ 是非负整数),

$2^{3m+2}=4\cdot 2^{3m}=4(7M_0+1)=7M_2+4$($M_2$ 是非负整数),

所以

$$2^n-1=\begin{cases}7M_0 & \text{当 } n=3m \text{ 时}\\ 7M_1+1 & \text{当 } n=3m+1 \text{ 时}\\ 7M_2+3 & \text{当 } n=3m+2 \text{ 时}\end{cases}$$

故当且仅当正整数 n 是 3 的倍数时,2^n-1 能被 7 整除.

b)　因为

$$2^n+1=\begin{cases}7M_0+2 & \text{当 } n=3m \text{ 时}\\ 7M_0+3 & \text{当 } n=3m+1 \text{ 时}\\ 7M_0+5 & \text{当 } n=3m+2 \text{ 时}\end{cases}$$

所以对所有的正整数 n,2^n+1 不能被 7 整除.

以上几例均表明,试算是帮助我们找到问题规律性的关键所

在. 当你探索一个不熟悉的新问题时，千万别忘了，试算是一个发现的窗口.

例 5　任给一个自然数 N，如果它是偶数，就将它除以 2，即将它变成 $\frac{N}{2}$；如果它是奇数，就将它乘以 3 再加 1，即将它变为 $3N+1$. 经过有限次这种运算手续后，所得结果必然是自然数 1.

这个命题就是近几十年来风靡全球的趣味数学游戏——“冰雹猜想”或“角谷猜想”.

我们不妨任意挑选两个数来算一下：

$N=256$，按规则有 $256\to128\to64\to32\to16\to8\to4\to2\to1$.

$N=11$，按规则有 $11\to34\to17\to52\to26\to13\to40\to20\to10\to5\to16\to8\to4\to2\to1$

计算的结果也许令你难以置信，因此要用更多的数进一步试算，但是所有的试算大概都无一例外地遵循同一规律，即经过有限次计算步骤后便进入 $4\to2\to1$ 这个死循环.

整数及其运算是数学中最古老的部分，但仍然有这样令人称奇叫绝的发现. 要问是怎样发现的？答案再清楚不过了：试算.

诚然，在数学上要承认一个命题的正确性必须经过证明. 因此，尽管目前验证的最大数字已达到 1099511627776，但“冰雹猜想”还只能是个猜想而已.

二　计算——解题的利器

数学中有大量的计算题. 一般地讲，解决这些常规计算题只须对概念理解准确，对公式运用熟练就可以了. 下面这个例子虽有些技巧性，但仍属此列.

例 6　有一个整数，它的个位数码是 7，当把这个 7 移到首位数的前面，所得到的数恰好变成原来那个数的 7 倍，问具有这种有趣性质的最小数应是多少？

解　根据题意，可设所求整数删去个位数后的数是 x，则所求数为

$10x+7$,把 7 移到这个数的首位得到的数是

$7\times10^n+x$,(此处假设 x 是 n 位数)

于是得到

$$7(10x+7)=7\times10^n+x,$$

化简得

$$x=\frac{7}{69}(10^n-7)$$

因为 7 与 69 互质,所以要使 x 为整数,必须且只须 10^n-7 是 69 的倍数. 因为所求数是存在的,所以我们只要耐心地用 100…0 除以 69,直到出现余数为 7 就可以了.

计算结果是

100…0÷69=14,492,753,623,188,405,797 余 7.

$\therefore x=\frac{7}{69}(10^{21}-7)=7\times14,492,753,623,188,405,797=$ 101,449,275,362,318,840,579.

故所求数为

1,014,492,753,623,188,405,797.

用计算解决上面的问题是再自然不过的事情了,没什么好谈的. 然而,当你初次听到震古烁今的三大几何名题的最后解决竟主要是依靠方程的求根计算,一定会吃惊不小吧!

这三大几何名题都是尺规作图问题. 所谓尺规作图就是用没有刻度的直尺和圆规作出符合一定要求的图形. 这三个问题是:

(1) 将任意角三等分(三等分角问题).

(2) 求作一立方体,使其体积为一已知立方体的体积的二倍(立方倍积问题).

(3) 求作一正方形,使其面积等于一已知圆(化圆为方问题).

这三个问题,难得出奇,象三座高耸入云的山峰,横在历代数学家们面前,长达两千多年之久. 即使象"数学之神"阿基米德,"几何学之父"欧几里得这样的智慧之星,也只能是望洋兴叹,一筹莫

展.

可是当历史进入十七世纪，天才的笛卡尔创立了解析法后，情况就大不相同了.人们逐渐认识到：尺规作图是通过有限次作出直线与直线，或直线与圆，或圆与圆的交点完成的.直线与方程 $Ax+By+C=0$ 等价，圆与方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 等价，上述三种情况下的交点与下面三个方程组等价.

1） $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases}$

2） $\begin{cases} Ax+By+C=0 \\ x^2+y^2+Dx+Ey+F=0 \end{cases}$

3） $\begin{cases} x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0 \\ x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0 \end{cases}$

由于方程组1)、2)、3)的解都依赖且只依赖于每一方程的系数，它们或由方程的系数经四则运算得来，或由方程的系数经四则运算和开平方运算得来；而方程的系数完全由已知点的坐标经四则运算得到；所以全部新作出的交点坐标(即方程组的解)可由已知点的坐标经四则运算和开平方运算得出.于是，数学家明确地给出了尺规作图的可能性准则：

尺规作图可能当且仅当所求点的坐标可以由已知点的坐标经有限次加减乘除和开平方运算得出.

三大几何名题之所以令许多数学名家屡屡碰壁，无可奈何，正是因为它们都不满足尺规作图的可能性准则.也就是说，不是难得作不出，而是根本没有解.

三大几何名题的解决过程表明：当我们把作图问题化为求方程根的问题，用计算的眼光重新打量三大几何名题的时候，尽管进一步解决它仍有不少困难，但它们再也不是高不可攀的山峰了.由此可见，计算的确是一件解题利器，运用它来解题，常常可以所向披靡.

例7 设S是一集合而 * 是S上的一个二元运算，它满足下列两条法则

1)对于 S 中的一切 x，$x*x=x$；

2)对于 S 中的一切 x、y、z，$(x*y)*z=(y*z)*x$；

试证：对于 S 中的一切 x、y，有 $x*y=y*x$.

证明 对于 S 中的一切 x，y

$$
\begin{aligned}
x*y &= (x*y)*(x*y) \\
&= [y*(x*y)]*x \\
&= [(x*y)*x]*y \\
&= [(y*x)*x]*y \\
&= [(x*x)*y]*y \\
&= (y*y)*(x*x) \\
&= y*x
\end{aligned}
$$

此题的证明结果是经过一系列抽象运算 * 而得到的，证明的要点是按给定的算律进行熟练的计算.

例 8 在一平面内的线段 AB 上，任选一内点 M，然后，在直线 AB 的同一侧，分别以 AM 和 MB 为边作正方形 AMCD 和 MBEF. 这两正方形的外接圆依次为⊙P 和⊙Q，当点 M 在线段 AB 上变动时，确定线段 PQ 中点的轨迹.（第一届 IMO 试题第五题的第三部分）

解 建立平面直角坐标系(如图 1.1.1)，则 A(0,0)，B(b,0) 为已知. 设点 M 的坐标为 M(m,0)，显然 m 在 0 与 b 之间变化.

因为 AMCD 和 MBEF 都是正方形，所以它们的中点依次为 P$(\frac{m}{2},\frac{m}{2})$，Q$(\frac{b+m}{2},\frac{b-m}{2})$. 于是 PQ 的中点坐标为

$$x=\frac{1}{2}(\frac{m}{2}+\frac{b+m}{2})=\frac{b+2m}{4}$$

$$y=\frac{1}{2}(\frac{m}{2}+\frac{b-m}{2})=\frac{b}{4}$$

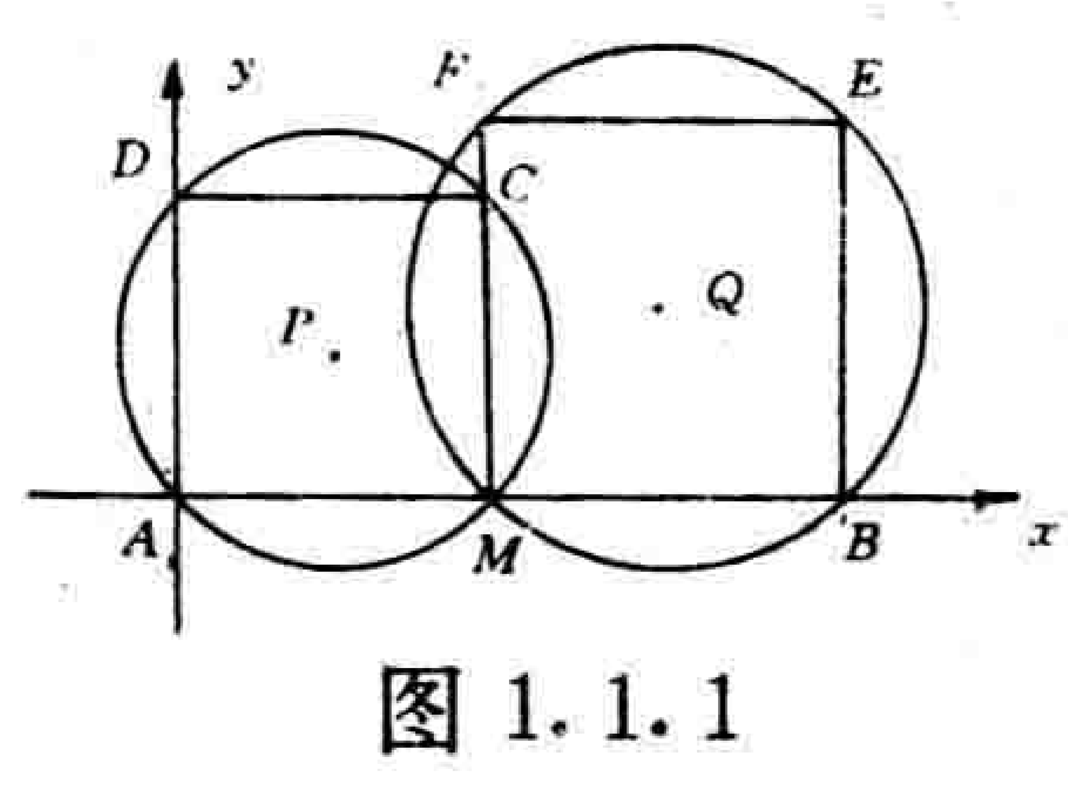

图 1.1.1

由此可知，当 m 在 0 与 b 之间变化时，PQ 中点的轨迹是：点$(\frac{b}{4}$，

$\frac{b}{4}$)与点($\frac{3b}{4}$,$\frac{b}{4}$)间的线段(不包括两个端点).

此题看上去是个较难的几何问题,然而建立坐标系后,用计算来解就显得十分简便了.这种情况在数学中是屡见不鲜的,有些题目貌似艰难,其实看透了,无非是算算而已.当然,用计算解几何题,并不一定非建立坐标系不可.请看下例:

例 9 △ABC 的外接圆 K 的半径为 R,内角平分线分别交圆 K 于 A'、B'、C',证明不等式

$$16Q^3 \geqslant 27R^4P$$

其中 Q、P 分别为△A'B'C' 与△ABC 的面积.(第三十届 IMO 预选题,捷克斯洛伐克)

证明 设△ABC 的内角为 α,β,γ,则

$$P=\frac{1}{2}R^2(\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma)$$

由于△A'B'C' 的内角为$\frac{\beta+\gamma}{2}$,$\frac{\alpha+\gamma}{2}$,$\frac{\alpha+\beta}{2}$,所以

$$Q=\frac{1}{2}R^2(\sin(\beta+\gamma)+\sin(\alpha+\gamma)+\sin(\alpha+\beta))$$

由算术——几何平均不等式

$$\begin{aligned}
16Q^3 &= 2R^6(\sin(\beta+\gamma)+\sin(\alpha+\gamma)+\sin(\alpha+\beta))^3\\
&\geqq 2R^6\cdot 27\sin(\beta+\gamma)\sin(\alpha+\gamma)\sin(\alpha+\beta)\\
&=27R^6(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta+2\gamma))\sin(\alpha+\beta)\\
&=27R^6(\cos(\alpha-\beta)+\cos\gamma)\sin(\alpha+\beta)\\
&=\frac{27}{2}R^6(\sin(\alpha+\beta+\gamma)+\sin(\alpha+\beta-\gamma)+\sin 2\alpha+\sin 2\beta)\\
&=\frac{27}{2}R^6(\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma)\\
&=27R^4P
\end{aligned}$$

此题的证明主要是靠三角函数的计算.其实,用计算解几何证明题有多种方法,例如用向量计算和复数计算解几何证明题都是具有实用价值的方法,有兴趣的读者可参阅席根伟、张明的《向量

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com