南海何崇禮編

立體之部

中等教育幾何學教科書

科學會編譯部出版

商務印書館發行

中華民國六年六月八版

此書有著作權翻印必究

中等教育
幾何學教科書
立體之部

每冊定價大洋
伍角
外埠酌加運費匯費

編纂者　南海何崇禮

發行者　商務印書館

印刷所　上海北河南路北首寶山路
商務印書館

總發行所　上海棋盤街中市
商務印書館

分售處　北京天津保定奉天吉林長春龍江濟南東昌太原
開封洛陽西安南京杭州蘭谿吳興安慶蕪湖南昌
饒州九江漢口武昌長沙寶慶常德衡州成都重慶
福州廈門廣州潮州韶州汕頭澳門香港桂林梧州
雲南貴陽石家莊哈爾濱新嘉坡
商務印書分館

三二一七

例　言

本書爲立體幾何學之部。續余向所編中等教育幾何學教科書平面部而編纂者也。

本書之編纂。仍以日本長澤氏之立體幾何學爲底本。至斟酌損益。每有變易。以求合於我國中學第四年程度爲務。

本書編纂之體裁。定名之準則。皆倣平面之部。其旨已詳於平面部例言。玆不再贅。閱者諒之。

本書所載問題。尤加意斟酌。信無躐等誤謬之弊。

本書付梓時。余友陳君文方在東京。爲余任校對。余所深謝。

編者識

目　次

第一編　平面

第二編　多面體

第三編　論體積

第四編　球

幾何學教科書

第一編

平面

平面內之直線及點

定義 1. 平面 面內任取兩點。以直線聯合之。此線處處在面內者。是爲平面。

2. **平面之垂線** 一直線與平面內之諸直線相遇成直角。即爲此面之垂線。亦稱**法線**而此直線與平面互相垂直。

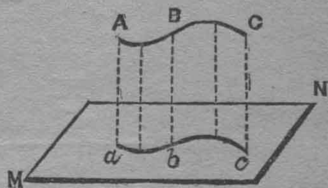
3. **平面之平行直線** 一直線兩端任引延之。與平面終不相遇。即爲此面之平行線。

4. **平行平面** 二平面四周任引延之。終不相遇。即爲平行平面。

5. **點之射影** 由一點至平面內引

一垂線。此垂線之趾。爲此點之射影。

6. **線之射影** 由線中各點至平面內引諸垂線。其趾之軌跡。爲此線之射影。

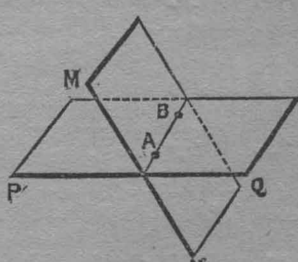


例於平面MN內。A點之射影爲a。ABC線之射影爲abc。

7. **直線與平面之角** 一直線在平面內與其射影所成之角。爲直線與平面之角。

8. **二直線之角.** 由任意一點引二直線各與不相交兩直線平行。所引直線間角。爲不相交二直線之角。

定理1. 過二定點可作無數平面。



解 命A,B爲二定點.

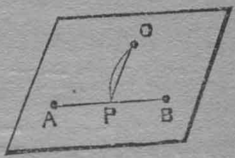
題言可作無數平面過A,B。

證 以函直線AB之

一平面爲軸。旋轉一周。則順次諸位置。可成無數平面。

定理2. 非同在一直線上有三定點。必有一平面函之。然以一爲限。

解 命A,B,C爲三定點。非同在一直線上。題言函A,B,C之平面必有一。然以一爲限。



證 試以AB爲軸。旋轉一周。則成一平面。面內必能兼函有C。故題言可作一平面函有A,B,C。

試更證明此平面以一爲限。假設此平面有二。則由C引兩直線CP。至AB直線中之任意P點。必兩皆函在各平面內。

然C與P之間不能引兩直線。故題言云云。〔平*.公理3〕

系1. 相交兩直線。可作一平面函之。然以一爲限。

2. 一直線與線外一點。可作一平面函之。然以一爲限。

定理3. 二平面相交。其交線必爲直線。

---

*平者指余所編之中等教育平面幾何學教科書也。餘仿此。

解　命MN及PQ爲二平面。題言其交線必爲直線。

〔定理1之圖〕

證　試於二平面之交線內任取A,B兩點。作直線聯合之。

則引長AB直線及其兩端。皆在二平面MN,PQ內。

〔定義1〕

故直線AB爲二平面MN,PQ之交線也。

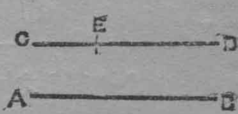
定義9.　二面角　二平面間之角。稱爲二面角。

由二平面之相交直線中任取一點。引二直線至各平面內。使垂直於此相交直線。取其所成之角測度二面角。

定理4.　平行兩直線。可作一平面函之。然以一爲限。

解　命AB,CD爲平行線。題言可作一平面函有AB,CD。然以一爲限。

證　兩平行線AB,CD必同在一平面內。　〔平定義18〕



然此平面以一爲限。何則。此兩平行線之一線AB與

他一線CD中任取一點E。作一平面函之。亦以一爲限故也。〔定理2系2〕

注意 由此觀之。以下四事。若得其一。即可確定平面之所在。

(1) 有三點非同在一直線內者。

(2) 有相交兩直線者。

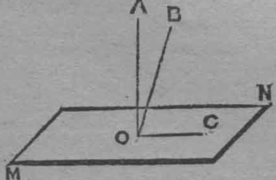
(3) 有一直線及線外一點者。

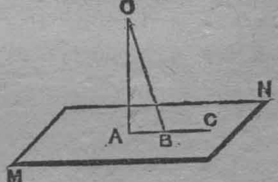
(4) 有平行兩直線者。

平面之垂線

定理5. 由已知之平面內一點。或由其外一點。至此平面可引一垂線。然以一爲限。

解 命MN爲已知之平面。O爲已知之點。題言由O至平面MN可引一垂線。然以一爲限。





證 若謂不然。OA,OB俱爲平面MN內之垂線。

夫OA, OB各所在之平面。可與平面MN交於一直線。

〔定理3〕

由是OA, OB各各爲此交線之垂線。且同在一平面內矣。其背理可據平面幾何學之定理證明之。

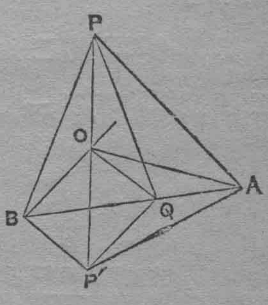
〔平.1.定理1系.2及定理13系3〕

然OA,OB與直線OC相交。必有一爲垂線。

故題言由O至平面MN可引一垂線。然以一爲限。

定理6.　居二直線交點之垂線。亦即二交線所在之平面之垂線。

解　命OA,OB爲兩交線。OP爲居其交點O之垂線。題言OP亦必爲函二交線之平面之垂線。



證　試於函OA,OB之平面內。由O任引一直線。令與AB相交於Q。

又引延PO至P′。令OP′=OP。聯合A,Q,B於P,P′。

夫AO爲PP′之垂線而交於中點。故

$$AP=AP',$$

同理 $BP=BP'$,

又 $AB=AB$,

故 $\triangle APB\equiv\triangle AP'B$. 〔平.1.定理19〕

由是$\triangle AP'B'$以AB爲軸而旋轉。令$\triangle AP'B$之平面落於$\triangle APB$之平面上。則P'落於P點上。QP'落於QP上。

$$\therefore\ QP'=QP.$$

由是於 $\triangle QOP$, $\triangle QOP'$

其三邊各與他三邊等。故

$\angle QOP=\angle QOP'$ 〔平.1.定理19〕

$\therefore$ $\angle QOP$爲直角。

即PO爲平面AOB中過O之各直線之垂線。

故題言PO爲平面AOB之垂線。 〔定義2〕

系1. 自一點至一定平面作諸直線。諸線中以垂線爲最短。又兩斜線與平面相交之點距垂線趾等。則彼此等。反之亦合於理。

證 第一 $PP'<PB+BP'$,

$$\therefore\ PO<PB.$$

若又 $OA=OB$

則 $\triangle POA\equiv\triangle POB$ 〔平.1.定理9〕

故 $PA=PB$.

第二　PO乃自P至平面AOB所引之最短線。PO爲平面AOB之垂線。

何則。若謂PO非平面AOB之垂線。而謂其垂線爲PO'。則由前證

$$PO' < PO.$$

則與原設PO爲自P至平面AOB所引之最短線不符由是PO爲平面AOB之垂線。

又若謂　$PB=PA.$

則於直角三角形POB,POA內,

$OB=OA$　〔平1.定理23系2〕

系2.　自兩定點至等距離點之軌跡即垂直平分兩定點間直線之平面。*

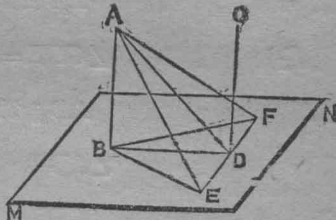
3.　一直線垂直截取他定直線於其定點。則此直線之軌跡爲一平面。

注意　由是已得一點及於其點之平面之法線。則可確定平面之所在。

定理7.　二直線彼此平行。若一線爲一平面之垂線。則他一線亦必爲此平面之垂線。反之亦合理。

*此處於平面內擴張軌跡之語。

解　命 AB,CD 為平行線。AB 為平面 MN 之垂線。題言 CD 亦必為平面 MN 之垂線。



證　試聯合 AD,BD。且於平面 MN 內引 EDF 與 BD 成直角。而令 DE=DF。復聯合 BE,BF,AE,AF。即於 $\triangle BDE$,$\triangle BDF$,

邊 BD,DE 各各=邊 BD,DF,

及　$\angle BDE=\angle BDF$〔各=R.∠〕

故　$BE=BF$,　〔平 1.定理 9〕

又 AE,AF 乃由 A 引至平面 MN 之斜線。且 BE=BF。故

$AE=BF$　〔定理 6 系 1〕

然　$DE=BF$　〔作圖〕

及　AD 為 $\triangle AED$,$\triangle AFD$ 所公有,

故　$\angle ADE=\angle ADF$,　〔平.1.定理 19〕

由是　$\angle ADE=R.\angle$.

即　$ED\perp DA$.

又　$ED\perp BD$.　〔作圖〕

故　ED 為平面 ADB 之垂線,　〔定理 6〕

然　$AB\parallel DC$

故平面ADB必函直線DC。

故　$ED \perp DC$　〔定理6〕

由是　$\angle CDE = R.\angle$.

又　$AB \parallel CD$

而　$\angle ABD = R.\angle$　〔原設〕

故　$\angle CDB = R.\angle$.

由是　CD與BD, DE所成之角均爲直角,

故CD乃函有DB, DE之平面之垂線。亦即平面MN之垂線。　〔定理6〕

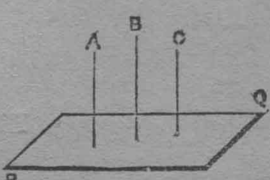
反之。若AB及CD俱爲平面MN之垂線。

題言　$AB \parallel CD$.

何則。過D而與直線AB平行之直線。以一爲限。又過D而爲平面MN之垂線亦以一爲限。則由前證。平行線必爲垂線。故垂線亦必爲平行線。

定理8.　兩直線各與他直線平行。則彼此平行。

解　命直線A及B各與直線C平行。



題言　$A \parallel B$.

證　設垂直於C之平面爲PQ。

既　　　A∥C

故　　　A爲平面PQ之垂線。　　〔定理7〕

又　　　B=C

故　　　B爲平面PQ之垂線。　　〔定理7〕

而A及B同爲平面PQ之垂線。故

A=B.　　〔定理7〕

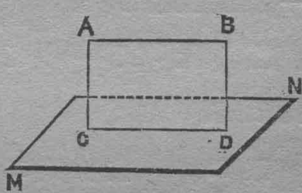
平面之平行直線

定理9.　若直線與已知之平面內一直線平行。則此直線亦必與該平面平行或函於該平面內。

解　命直線AB與平面MN內所有直線CD平行。題言AB亦與平面MN平行。或函於平面MN內。

證　試畫一平面。函有AB及CD。若此平面與平面MN合成一面。則

AB在平面MN內。



若非合成一面。則此平面截取平面MN於直線CD。

而AB與CD平行。故AB與CD不相交。