



2014^年

李正元·李永乐

考研数学 ⑨

数学

数学三

全真模拟经典400题

● 主编 北京大学 李正元
清华大学 李永乐
北京大学 范培华



2014 年李正元 · 李永乐考研数学

数学

数学三

全真模拟经典400题

主 编 北 京 大 学 李正元
清 华 大 学 李永乐
北 京 大 学 范培华

编 者 (以姓氏笔画为序)

北 京 大 学 刘西垣
北 京 大 学 李正元
清 华 大 学 李永乐
北 京 大 学 范培华



中国政法大学出版社

2013 · 北京

图书在版编目(CIP)数据

2014 年李正元、李永乐考研数学. 数学全真模拟经典 400 题. 数学. Ⅲ. 李正元, 李永乐, 范培华主编. —北京: 中国政法大学出版社, 2013. 9

ISBN 978-7-5620-4933-3

I. ①2… II. ①李… ②李… ③范… III. ①高等数学-研究生-入学考试-题解 IV. ①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 182867 号

书 名	2014 年李正元、李永乐考研数学 数学全真模拟经典 400 题: 数学三
作 者	李正元 李永乐 范培华
责任编辑	魏 星
出版发行	中国政法大学出版社(北京市海淀区西土城路 25 号) 北京 100088 信箱 8034 分箱 邮编 100088 fada_sf@sohu.com http://www.cuplpress.com (网络实名: 中国政法大学出版社) (010)58908433(编辑部) 58908325(发行部) 58908334(邮购部)
承 印	北京朝阳印刷厂有限责任公司
规 格	787mm × 1092mm 1/16
印 张	10.75
字 数	284 千字
版 本	2013 年 9 月第 1 版 2013 年 9 月第 1 次印刷
书 号	ISBN 978-7-5620-4933-3
定 价	23.00 元

- 声 明
1. 版权所有, 侵权必究。
 2. 如有缺页、倒装问题, 由印刷厂负责退换。

前 言

Solid Edge 是 Siemens PLM Software 公司旗下的一款三维 CAD 应用软件,采用 Siemens PLM Software 公司自己拥有专利的 Parasolid 作为软件核心,将普及型 CAD 系统与世界上最具领先地位的实体造型引擎结合在一起,是基于 Windows 平台、功能强大且易用的三维 CAD 软件。Solid Edge 支持自顶向下和自底向上的设计思想,其建模核心、钣金设计、大装配设计、产品制造信息管理、生产出图(工程图)、价值链协同、内嵌的有限元分析和产品数据管理等功能遥遥领先于同类软件,已经成功应用于机械、电子、航空、汽车、仪器仪表、模具、造船、消费品等诸多行业。Solid Edge ST5 是目前推出的最新的版本,它构建于 Solid Edge 成熟技术之上,新增了许多功能,使其技术水准又上了一个新的台阶。

本书是学习 Solid Edge ST5 的快速入门与提高指南,其特色如下:

- 内容全面。涵盖了产品设计的零件创建(含钣金设计、曲面造型)、产品装配和工程图制作的全过程。
- 范例丰富。对软件中的主要命令和功能,先结合简单的范例进行讲解,然后安排一些较复杂的综合范例帮助读者深入理解、灵活应用。
- 讲解详细,条理清晰。保证自学的读者能独立学习和实际运用 Solid Edge ST5 软件。
- 写法独特。采用 Solid Edge ST5 中真实的对话框、操控板和按钮等进行讲解,使初学者能够直观、准确地操作软件,从而大大地提高学习效率。
- 附加值高。本书附带 2 张多媒体 DVD 学习光盘,制作了 304 个 Solid Edge 应用技巧和具有针对性的实例教学视频并进行了详细的语音讲解,时间长达 13 个小时(780 分钟),2 张 DVD 光盘教学文件容量共计 6.2GB,可以帮助读者轻松、高效地学习。

本书是根据北京兆迪科技有限公司给国内外一些著名公司(含国外独资和合资公司)的培训教案整理而成的,具有很强的实用性。本书的主编和主要参编人员主要来自北京兆迪科技有限公司,该公司专门从事 CAD/CAM/CAE 技术的研究、开发、咨询及产品设计与制造服务,并提供 Solid Edge、UG、Ansys、Adams 等软件的专业培训及技术咨询。

本书由展迪优主编,参加编写的人员还有王焕田、刘静、雷保珍、刘海起、魏俊岭、任慧华、詹路、冯元超、刘江波、周涛、赵枫、邵为龙、侯俊飞、龙宇、施志杰、詹棋、高政、孙润、李倩倩、黄红霞、尹泉、李行、詹超、尹佩文、赵磊、王晓萍、陈淑童、周攀、吴伟、王海波、高策、冯华超、周思思、黄光辉、党辉、冯峰、詹聪、平迪、管璇、王平、李友荣。本书已经多次校对,如有疏漏之处,恳请广大读者予以指正。

电子邮箱: zhanygjames@163.com

②为了提高考生数学分析和解决问题的能力,本书所编题目难度较大,有的题目涉及3个以上的考点,综合运用性比较高,概念运用性较强,如果考生在做本书试题感到棘手时,请不要着急,更不能泄气,应静下心来,仔细分析题目所考查的是哪些知识点,回忆《数学复习全书》所介绍的解题方法,然后再动手做题。

在本书的编写、编辑和成书过程中，由于时间紧、任务重，尽管我们认真对待和严格要求，仍难免有不尽如意的地方，诚请广大读者和同行批评指正。

2013 年 9 月

目 录

模拟试卷	卷 (一)		(1)
模拟试卷	卷 (二)		(7)
模拟试卷	卷 (三)		(13)
模拟试卷	卷 (四)		(19)
模拟试卷	卷 (五)		(25)
模拟试卷	卷 (六)		(31)
模拟试卷	卷 (七)		(37)
模拟试卷	卷 (八)		(43)
模拟试卷	卷 (九)		(49)
模拟试卷	卷 (十)		(55)
模拟试卷	卷 (一)	答案及详解	(61)
模拟试卷	卷 (二)	答案及详解	(72)
模拟试卷	卷 (三)	答案及详解	(82)
模拟试卷	卷 (四)	答案及详解	(93)
模拟试卷	卷 (五)	答案及详解	(105)
模拟试卷	卷 (六)	答案及详解	(114)
模拟试卷	卷 (七)	答案及详解	(126)
模拟试卷	卷 (八)	答案及详解	(135)
模拟试卷	卷 (九)	答案及详解	(144)
模拟试卷	卷 (十)	答案及详解	(153)

模拟试卷 卷(一)

一、选择题:1~8小题,每小题4分,共32分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 函数 $f(x) = x^3 - 3x + k$ 只有一个零点,则 k 的取值范围为

- (A) $|k| > 2$. (B) $|k| > 1$. (C) $|k| < 1$. (D) $|k| < 2$.

(2) 设函数 $f(x) = \frac{x}{4x^2 - 8x + 3}$, 则 $f^{(10)}(1) =$

- (A) $10! \times 2^{10}$. (B) $11! \times 2^{11}$. (C) $-10! \times 2^{10}$. (D) $-10! \times 2^{11}$.

(3) 在反常积分

① $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx$

② $\int_0^{+\infty} (xe^{-x^2} + \sin x) dx$

③ $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$

④ $\int_0^1 \frac{1+\ln x}{x} dx$

中收敛的是

- (A) ①, ②. (B) ①, ③. (C) ②, ④. (D) ③, ④.

(4) 下列级数中属于条件收敛的是

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n} \right]$.

(B) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{n^{3/2}} + \frac{1}{(n+1)^2} \right]$.

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{(n+1)\sqrt{n+2}} \tan \frac{1}{\sqrt{n}}$.

(D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \ln(n+1)}$.

(5) 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 且方程组 $Ax = b$ 有解, 则

- (A) 当 $Ax = b$ 有唯一解时, 必有 $m = n$.
 (B) 当 $Ax = b$ 有唯一解时, 必有 $r(A) = n$.
 (C) 当 $Ax = b$ 有无穷多解时, 必有 $m < n$.
 (D) 当 $Ax = b$ 有无穷多解时, 必有 $r(A) < m$.

(6) 下列矩阵中不能相似对角化的是

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

(B) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(D) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

(7) 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-\frac{x-1}{\theta}}, & x \geq 1, \quad k > 0, \theta > 0, \\ 0, & x < 1. \end{cases}$$

且已知 $P\{X > 2\} = \frac{1}{3}$, 则 $\theta =$

- (A) 3. (B) $\ln 3$. (C) $\frac{1}{\ln 3}$. (D) $\frac{1}{3}$.

(8) 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x+3)^2}{4}},$$

则下列服从标准正态分布的随机变量是

- (A) $Y = \frac{1}{2}(X + 3)$. (B) $Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - 3)$
(C) $Y = \frac{1}{2}(X - 3)$. (D) $Y = -\frac{1}{\sqrt{2}}(X + 3)$

二、填空题: 9 ~ 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 极限 $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x^{\frac{1}{x}} - 1)}{\ln x} =$ _____.

(10) 设 $u(x, y) = y^2 F(3x + 2y)$, 若 $u\left(x, \frac{1}{2}\right) = x^2$, 则 $\frac{\partial u}{\partial x} =$ _____.

(11) 反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx (a > 0) =$ _____.

(12) 设 $f(x) = \int_0^{x^2} e^{t^2} dt$, $g(x)$ 在 $x = 0$ 连续且满足 $g(x) = 1 + 2x + o(x) (x \rightarrow 0)$. 又 $F(x) = f[g(x)]$, 则 $F'(0) =$ _____.

(13) 已知 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^5 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^4$, 则 $A^{-1} =$ _____.

(14) 设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_{12}$ 独立同分布且方差存在, 则随机变量 $U = X_1 + X_2 + \dots + X_7, V = X_6 + X_7 + \dots + X_{12}$ 的相关系数 $\rho_{UV} =$ _____.

三、解答题:15 ~ 23 小题,共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

$$\text{设 } f(x) = \begin{cases} e^{-x} + e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$

(I) 求证: $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续;

(II) 求 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 的单调性区间;

(III) 求 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 的最大值与最小值.

(16) (本题满分 10 分)

求 $f(x, y, z) = 2x + 2y - z^2 + 5$ 在区域 $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$ 上的最大值与最小值.

(17) (本题满分 10 分)

计算 $I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, 其中 D 是由曲线 $y = \sqrt{4 - x^2}$, $y = \sqrt{2x - x^2}$ 及直线 $y = -x$ 所围平面图形.

(18) (本题满分 10 分)

求微分方程 $(x - 2xy - y^2)y' + y^2 = 0, y(0) = 1$ 的特解.

(19) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上具有二阶连续导数, 且 $f(0) = f(1) = 0, f(x) \neq 0 (x \in (0, 1))$, 证明:

$$\int_0^1 \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx > 4.$$

(20) (本题满分 11 分)

已知 $\alpha_1 = (1, 3, 5, -1)^T, \alpha_2 = (2, 7, a, 4)^T, \alpha_3 = (5, 17, -1, 7)^T$,

(I) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 求 a 的值;

(II) 当 $a = 3$ 时, 求与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 都正交的非零向量 α_4 ;

(III) 当 $a = 3$ 时, 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 可表示任一个 4 维列向量.

(21) (本题满分 11 分)

已知 A 是 3 阶矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是线性无关的 3 维列向量, 满足 $A\alpha_1 = -\alpha_1 - 3\alpha_2 - 3\alpha_3$, $A\alpha_2 = 4\alpha_1 + 4\alpha_2 + \alpha_3$, $A\alpha_3 = -2\alpha_1 + 3\alpha_3$.

(I) 求矩阵 A 的特征值;

(II) 求矩阵 A 的特征向量;

(III) 求矩阵 $A^* - 6E$ 的秩.

(22) (本题满分 11 分)

设二维连续型随机变量 (X, Y) 服从区域 D 上的均匀分布, 其中

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq x \leq 2 - y\}.$$

试求: (I) $X + Y$ 的概率密度;

(II) X 的边缘概率密度;

(III) $P\{Y \leq 0.2 \mid X = 1.5\}$.

(23) (本题满分 11 分)

设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本, X 的概率密度为

$$f(x) = ae^{-\frac{|x|}{\lambda}}, \quad -\infty < x < +\infty, \lambda > 0 \text{ 是未知参数.}$$

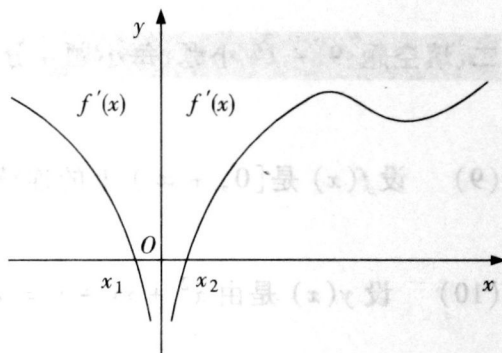
(I) 求 λ 的矩估计量 $\hat{\lambda}_1$;

(II) 求 λ 的最大似然估计量 $\hat{\lambda}_2$, 并求 $E\hat{\lambda}_2$.

模拟试卷 卷(二)

一、选择题:1 ~ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的. 请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

- (1) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续,其导函数 $y = f'(x)$ 的曲线如图所示,则 $f(x)$ 有



- (A) 两个极小值点,一个极大值点,三个拐点.
(B) 一个极小值点,一个极大值点,两个拐点.
(C) 一个极小值点,一个极大值点,三个拐点.
(D) 一个极小值点,两个极大值点,三个拐点.

- (2) 函数 $f(x) = \cos x + x \sin x$ 在 $(-2\pi, 2\pi)$ 内的零点个数为

- (A) 1 个. (B) 2 个. (C) 3 个. (D) 4 个.

- (3) 设 $z = f[\cos(x^2 + y^2) - 1, \ln(1 + x^2 + y^2)]$, 其中 f 有连续的一阶偏导数, 则

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \Big|_{(0,0)} =$$

- (A) $4f'_2(0,0)$. (B) $f'_1(0,0) + f'_2(0,0)$.
(C) 0. (D) 不存在.

- (4) 设 $f(x)$ 在 $[-\delta, \delta]$ 有定义,且 $f(0) = f'(0) = 0, f''(0) = a > 0$, 又 $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n^p}\right)$ 收敛, 则 p 的取值范围是

- (A) $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$. (B) $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$. (C) $(1, +\infty)$. (D) $[1, +\infty)$.

- (5) 设 A, B, C 是 n 阶矩阵, 并满足 $ABAC = E$, 则下列结论中不正确的是

- (A) $A^T B^T A^T C^T = E$. (B) $BAC = CAB$.
(C) $BA^2C = E$. (D) $ACAB = CABA$.

- (6) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, 则下列矩阵中与矩阵 A 等价、合同但不相似的是

- (A) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$. (B) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. (C) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$. (D) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

- (7) 设随机变量 X 与 Y 独立同分布, $X \sim N\left(0, \frac{1}{2}\right)$, 则 $D|X - Y| =$ _____

- (A) 1. (B) $\frac{2}{\pi}$. (C) $1 - \frac{2}{\pi}$. (D) $1 + \frac{2}{\pi}$.

- (8) 设随机变量 X_1, X_2, X_3, X_4 相互独立且都服从标准正态分布 $N(0, 1)$, 已知 $Y = \frac{X_1^2 + X_2^2}{X_3^2 + X_4^2}$, 对给定的 $\alpha (0 < \alpha < 1)$, 数 y_α 满足 $P\{Y > y_\alpha\} = \alpha$, 则有
- (A) $y_\alpha y_{1-\alpha} = 1$. (B) $y_\alpha y_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1$.
 (C) $y_{\frac{\alpha}{2}} y_{1-\alpha} = 1$. (D) $y_{\frac{\alpha}{2}} y_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1$.

二、填空题: 9 ~ 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

- (9) 设 $f(x)$ 是 $[0, +\infty)$ 上的连续函数, 且 $\int_0^{x(1+x)} f(t) dt = x^2$ 当 $x \geq 0$ 时成立, 则 $f(x) =$ _____.
- (10) 设 $y(x)$ 是由 $x^2 + xy + y = \tan(x - y)$ 确定的隐函数, 且 $y(0) = 0$, 则 $y''(0) =$ _____.
- (11) 将抛物线 $y = x^2 - x$ 与 x 轴及直线 $x = c (c > 1)$ 所围成平面图形绕 x 轴旋转一周, 所得旋转体的体积 V_x 等于弦 op (p 为抛物线与直线 $x = c$ 的交点) 绕 x 轴旋转所得锥体的体积 $V_{\text{锥}}$, 则 c 的值为 _____.
- (12) 设平面区域 $D = \{(x, y) \mid x^3 \leq y \leq 1, -1 \leq x \leq 1\}$, $f(x)$ 是定义在 $[-a, a] (a \geq 1)$ 上的任意连续函数, 则 $\iint_D 2y[(x+1)f(x) + (x-1)f(-x)] dx dy =$ _____.
- (13) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & a & 0 \end{bmatrix}$, B 是 3 阶非零矩阵, 满足 $BA = 0$, 则矩阵 $B =$ _____.
- (14) 设试验的成功率 $p = 20\%$, 现在将试验独立地重复进行 100 次, 则试验成功的次数介于 16 次和 32 次之间的概率 $\alpha =$ _____. ($\Phi(1) = 0.8413$, $\Phi(3) = 0.9987$)

三、解答题: 15 ~ 23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

- (15) (本题满分 10 分)

$$\text{设 } f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

- (I) 求 $f'(x)$ 并讨论其连续性;
 (II) 讨论 $f(x)$ 的单调性.

(16) (本题满分 10 分)

(I) 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{4}{4+x^2}, & x \leq 0, \\ e^{-3x}, & x > 0, \end{cases}$ 求 $\int f(x) dx$;

(II) 求 $\int \frac{dx}{1 + \cos^2 x}$.

(17) (本题满分 10 分)

设平面区域 $D = \{(x, y) \mid \frac{1}{2} \leq |x| + |y| \leq 1\}$, 求 $\iint_D e^{\frac{|y|}{|x|+|y|}} d\sigma$.

(18) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 满足方程

$$f(x) = \cos x + 2 \sin x - \int_0^x (x-t)f(t) dt$$

求函数 $f(x)$.

(19) (本题满分 10 分)

(12) 证明推广的积分中值定理: 设 $F(x)$ 与 $G(x)$ 都是区间 $[a, b]$ 上的连续函数, 且 $G(x) \geq 0, G(x) \neq 0$, 则至少存在一点 $\xi \in [a, b]$ 使得

$$\int_a^b F(x) G(x) dx = F(\xi) \int_a^b G(x) dx.$$

(13) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(14) 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

17 次之的初等函数。

(15) (本题满分 10 分)

$$\text{设 } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x}, & x \neq 0 \\ -1, & x = 0 \end{cases}$$

(I) 求 $f'(x)$ 并讨论其连续性。

(II) 讨论 $f(x)$ 的单调性。

(20) (本题满分 11 分)

设 A 是 n 阶反对称矩阵,

(I) 证明: A 可逆的必要条件是 n 为偶数; 当 n 为奇数时, A^* 是对称矩阵;

(II) 举一个 4 阶不可逆的反对称矩阵的例子;

(III) 证明: 如果 λ 是 A 的特征值, 那么 $-\lambda$ 也必是 A 的特征值.

(21) (本题满分 11 分)

已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -a \\ 2 & a & -2 \\ -a & -1 & 1 \end{bmatrix}$, 求 A 的特征值与特征向量, 并指出 A 可以相似对角化的条件.