【國家古籍整理出版基金資助項目】

天學初函

編器

（中）

明 李之藻 編
黃曙輝 點校

上海交通大學出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

【國家古籍整理出版基金資助項目】

明 李之藻 編
黃曙輝 點校

天學初函

器編

（中）

上海交通大學出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

幾何原本第五卷之首

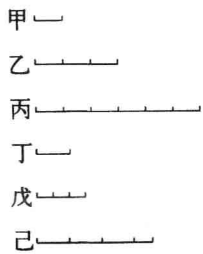
泰西利瑪竇口譯
吴淞徐光啓筆受

界説十九則

前四卷所論，皆獨幾何也，此下二卷所論，皆自兩以上多幾何同例相比者也，而本卷則總説完幾何之同例相比者也。諸卷中獨此卷以虚例相比，絶不及線、面、體諸類也。第六卷則論線、論角、論圜界諸類，及諸形之同例相比者也。今先解向後所用名目，爲界説十九。

第一界

分者，幾何之幾何也。小能度大，以小爲大之分。



以小幾何度大幾何，謂之分。曰幾何之幾何者，謂非此小幾何，不能爲此大幾何之分也。如一點無分，亦非幾何，即不能爲線之分也；一線無廣狹之分，非廣狹之幾何，即不能爲面之分也；一面無厚薄之分，非厚薄之幾何，即不能爲體之分也。曰能度大者，謂小幾何度大幾何，能盡大之分者也。如甲爲乙、爲丙之分，則甲爲乙三分之一，爲丙六分之一，無贏、不足也。若戊爲丁之一即贏，爲二即不足；己爲丁之三即贏，爲四即不足。是小不盡大，則丁不能爲戊、己之分也。以數明之，若四于八、于十二、于十六、于二十諸數，皆能盡分，無贏、不足也。若四于六、于七、于九、于十、于十八、于三十八諸數，或贏或不足，皆不能盡分者也。本書所論，皆指能盡分者，故稱爲分。若不盡分者，當稱幾分幾何之幾。如四于六爲三分六之二，不得正名爲分，不稱小度大也，不爲大幾何内之小幾何也。

第二界

若小幾何能度大者，則大爲小之幾倍。

如第一界圖。甲與乙能度丙，則丙爲甲與乙之幾倍；若丁、戊不能盡己之分，則己不爲丁、戊之幾倍。

第三界

比例者，兩幾何以幾何相比之理。

兩幾何者，或兩數、或兩線、或兩面、或兩體，各以同類大小相比，謂之比例。若線與面、或數與線相比，此異類，不爲比例。又若白線與黑線、熱線與冷線相比，雖同類，不以幾何相比，亦不爲比例也。

比例之説，在幾何爲正用。亦有借用者，如時、如音、如聲、如所、如動、如稱之屬，皆以比例論之。

凡兩幾何相比，以此幾何比他幾何，則此幾何爲前率，所比之他幾何爲後率。如以六尺之線比三尺之線，則六尺爲前率，三尺爲後率也。反用之，以三尺之線比六尺

之線，則三尺爲前率，六尺爲後率也。

比例爲用甚廣，故詳論之如左。

凡比例有二種，有大合，有小合。以數可明者爲大合，如二十尺之線比十尺之線是也；其非數可明者爲小合，如直角方形之兩邊與其對角線可以相比，而非數可明者是也。

如上二種，又有二名，其大合線，爲有兩度之線。如二十尺比八尺，兩線爲大合，則二尺、四尺皆可兩度之者是也。如此之類，凡數之比例皆大合也。何者？有數之屬，或無他數可兩度者，無有一數不可兩度者。若七比九，無他數可兩度之，以一則可兩度之也。其小合線，爲無兩度之線。如直角方形之兩邊與其對角線爲小合，即分至萬分，以及無數，終無小線可以盡分、能度兩率者是也。此論詳見十卷末題。

小合之比例，至十卷詳之。本篇所論，皆大合也。

凡大合有兩種，有等者，如二十比二十、十尺之線比十尺之線是也；有不等者，如二十比十、八比四十、六尺之線比二尺之線是也。

如上等者，爲相同之比例。其不等者，又有兩種：有以大不等，如二十比十是也；有以小不等，如十比二十是也。大合比例之以大不等者，又有五種：一爲幾倍大，

二爲等帶一分，三爲等帶幾分，四爲幾倍大帶一分，五爲幾倍大帶幾分。

一爲幾倍大者，謂大幾何内有小幾何，或二、或三、或十、或八也。如二十與四，是二十内爲四者五；如三十尺之線與五尺之線，是三十尺内爲五尺者六。則二十與四，名爲五倍大之比例也；三十尺與五尺，名爲六倍大之比例也。倣此爲名，可至無窮也。

二爲等帶一分者，謂大幾何内既有小之一，別帶一分。此一分，或元一之半，或三分之一、四分之一，以至無窮者是也。如三與二，是三内既有二，別帶一，一爲二之半；如十二尺與九尺之線，是十二内既有九，別帶三，三爲九三分之一，則三與二，名爲等帶半也；十二尺與九尺，名爲等帶三分之一也。

三爲等帶幾分者，謂大幾何内既有小之一，別帶幾分，而此幾分，不能合爲一盡分者是也。如八與五，是八内既有五，別帶三一，每一各爲五之分，而三一不能合而爲五之分也。他如十與八，其十内既有八，別帶二一，雖每一各爲八之分，與前例相似，而二一却能爲八四分之一，是爲帶一分，屬在第二，不屬三也。則八與五，名爲等帶三分也。又如二十二與十六，即名爲等帶六分也。

四爲幾倍大帶一分者，謂大幾何内既有小幾何之二、之三、之四等，別帶一分，此

一分，或元一之半，或三分、四分之一，以至無窮者是也。如九與四，是九内既有二四，别帶一，一爲四之分之一，則九與四，名爲二倍大帶四分之一也。五爲幾倍大帶幾分者，謂大幾何内既有小幾何之二、之三、之四等，别帶幾分，而此幾分，不能合爲一盡分者是也。如十一與三，是十一内既有三三，别帶二一，每一各爲三之分，而二一不能合而爲三之分也，則十一與三，名爲三倍大帶二分也。

大合比例之以小不等者，亦有五種，俱與上以大不等五種相反爲名：一爲反幾倍大，二爲反等帶一分，三爲反等帶幾分，四爲反幾倍大帶一分，五爲反幾倍大帶幾分。

凡比例諸種，如前所設諸數，俱有書法，書法中有全數、有分數。全數者，如一、二、三、十、百等是也；分數者，如分一以二、以三、以四等是也。書全數，依本數書之，不必立法；書分數，必有兩數，一爲命分數，一爲得分數。如分一以三而取其二，則爲三分之二，即三爲命分數，二爲得分數也；分一爲十九而取其七，則爲十九分之七，即十九爲命分數，七爲得分數也。

書以大、小、不等各五種之比例。其一，幾倍大，以全數書之，如二十與四爲五倍大之比例，即書五是也；若四倍，即書四；六倍，即書六也。其反幾倍大，即用分

數書之，而以大比例之數爲命分之數，以一爲得分之數。如大爲五倍大之比例，則此書五之一是也；若四倍，即書四之一；六倍，即書六之一也。

其二，等帶一分之比例有兩數，一全數、一分數，其全數恒爲一，其分數則以分率之數爲命分數，恒以一爲得分數。如三與二，名爲等帶半，即書一，别書二之一也。其反等帶一分，則全用分數，而以大比例之命分數爲此之得分數，以大比例之命分數加一爲此之命分數。如大爲等帶二之一，即此書三之二也；又如等帶八分之一，反書之，即書九之八也；又如等帶一千分之一，反書之，即書一千〇〇一之一千也。

其三，等帶幾分之比例亦有兩數，一全數、一分數，其全數亦恒爲一，其分數亦以分率之數爲命分數，以所分之數爲得分數。如十與七，名爲等帶三分，即書一，别書七之三也。其反等帶幾分，亦全用分數，而以大比例之命分數爲此之得分數，以大比例之命分數加大之得分數爲此之命分數。如大爲等帶十之三，命數七，得數三，七加三爲十，即書十之七也；又如等帶二十之三，反書之，二十加三，即書二十三之二十也。

其四，幾倍大帶一分之比例，則以幾倍大之數爲全數，以分率之數爲命分數，恒以

一爲得分數。如二十二與七，二十二内既有三七，别帶一。一爲七分之一，名爲三倍大帶七分之一，即以三爲全數，七爲命分數，一爲得分數，書三，别書七之一也。其反幾倍大帶一分，則以大比例之命分數爲此之得分數，以大之命分數乘大之倍數加一爲此之命分數。如大爲三帶七之一，即以七乘三得二十一，又加一，爲命分數，書二十二之七也；又加五帶九之一，反書之，九乘五得四十五，加一爲四十六，即書四十六之九也。

其五，幾倍大帶幾分之比例，亦以幾倍大之數爲全數，以分率之數爲命分數，以所分之數爲得分數。如二十九與八，二十九内既有三八，别帶五一，名爲三倍大帶五分，即以三爲全數，八爲命分數，五爲得分數，書三，别書八之五也。其反幾倍大帶幾分，則以大比例之命分數爲此之得分數，以大比例之命分數乘大之倍數，加大之得分數，爲此之命分數。如大爲三帶八之五，即以八乘三得二十四，加五，爲二十九，書二十九之八也；又如四帶五之二，即書二十二之五也。

已上大小十種，足盡比例之凡，不得加一減一。

第四界

兩比例之理相似，爲同理之比例。

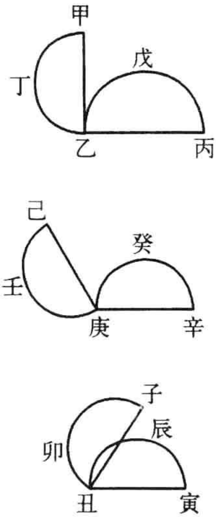
兩幾何相比，謂之比例；兩比例相比，謂之同理之比例。如甲與乙兩幾何之比例，偕丙與丁兩幾何之比例，其理相似，爲同理之比例。又若戊與己兩幾何之比例偕己與庚兩幾何之比例，其理相似，亦同理之比例。

凡同理之比例有三種：有數之比例，有量法之比例，有樂律之比例。本篇所論，皆量法之比例也。量法比例又有二種，一爲連比例。連比例者，相續不斷，其中率與前、後兩率遞相爲比例，而中率既爲前率之後，又爲後率之前。如後圖，戊與己比、己又與庚比是也。二爲斷比例。斷比例者，居中兩率，一取不再用。如前圖，

甲自與乙比、丙自與丁比是也。

第五界

兩幾何，倍其身而能相勝者，爲有比例之幾何。



上文言爲比例之幾何必同類，然同類中亦有無比例者，故此界顯有比例之幾何也，曰倍其身而能相勝者。如三尺之線與八尺之線，三尺之線三倍其身，即大于八尺之線，是爲有比例之線也。又如直角方形之一邊與其對角線，雖非大合之比例可以數明，而直角方形之一邊，一倍之，即大于對角線，兩邊等三角形，其兩邊并，必大于一邊。見一卷二十。是亦有小合比例之線也。又圜之徑，四倍之，即大于圜之界，則圜之徑與界亦有小合比例之線也。圜之界當三徑七分徑之一弱。別見圜形書。又曲線與直線亦有比

例。如以大小兩曲線相合爲初月形，别作一直角方形與之等，六卷三十三一增題，今附。即曲直兩線相視，有大、有小，亦有比例也。又方形與圜，雖自古至今，學士無數，不能爲相等之形，然兩形相視，有大、有小，亦不可謂無比例也。又直線角與曲線角亦有比例。如上圖。直角、鈍角、鋭角，皆有與曲線角等者。若第一圖，甲乙丙直角在甲乙、乙丙兩直線内，而其間設有甲乙丁與丙乙戊兩圜分角等，即于甲乙丁角加甲乙戊角，則丁乙戊曲線角與甲乙丙直角等矣。依顯壬庚癸曲線角與己庚辛鈍角等也。又依顯卯丑辰曲線角與子丑寅鋭角，各減同用之子丑、丑辰内圜小分，即兩角亦等也。此五者，皆疑無比例而實有比例者也。他若有窮之線與無窮之線，雖則同類，實無比例。何者？有窮之線，畢世倍之，不能勝無窮之線故也。又線與面、面與體，各自爲類，亦無比例。何者？畢世倍線不能及面，畢世倍面不能及體故也。又切圜角與直線鋭角亦無比例。何者？依三卷十六題所説，畢世倍切邊角，不能勝至小之鋭角故也。此後諸篇中，每有倍此幾何令至勝彼幾何者，故備著其理，以需後論也。

第六界

四幾何，若第一與二偕第三與四爲同理之比例，則第一、第三之幾倍偕第二、第四之幾倍，其相視，或等，或俱爲大、俱爲小，恒如是。

兩幾何，曷顯其能爲比例乎？上第五界所説是也。兩比例，曷顯其能爲同理之比例乎？此所説是也。其術通大合、小合，皆以加倍法求之。如一甲、二乙、三丙、四丁四幾何，于一甲、二丙任加幾倍，爲戊、爲己，戊倍甲、己倍丙，其數自相等。次于二乙、四丁任加幾倍，爲庚、爲辛，庚倍乙、辛倍丁，其數自相等。而戊與己偕庚與辛相視，或等，或俱大，或俱小。如是等、大、小，累試之，恒如是。即知一甲與二乙偕三丙與四丁爲同理之比例也。

如初試之，甲幾倍之戊小于乙幾倍之庚，而丙幾倍之己亦小于丁幾倍之辛。又試

之，倍甲之戊與倍乙之庚等，而倍丙之己亦與倍丁之辛等。三試之，倍甲之戊大于倍乙之庚，而倍丙之己亦大于倍丁之辛。此之謂或相等，或雖不等而俱爲大、俱爲小。若累合一差，即元設四幾何不得爲同理之比例，如下第八界所指是也。

下文所論，若言四幾何爲同理之比例，即當推顯第一、第三之幾倍與第二、第四之幾倍，或等，或俱大、俱小。若許其四幾何爲同理之比例，亦如之。

以數明之。如有四幾何，第一爲三，第二爲二，第三爲六，第四爲四。今以第一之三、第三之六同加四倍，爲十二、爲二十四，次以第二之二、第四之四同加七倍，爲十四、爲二十八，其倍第一之十二既小于倍第二之十四，而倍第三之二十四亦小

于倍第四之二十八也。又以第一之三、第三之六同加六倍，爲十八、爲三十六，次以第二之二、第四之四同加九倍，爲十八、爲三十六，其倍第一之十八既等于倍第二之十八，而倍第三之三十六亦等于倍第四之三十六也。又以第一之三、第三之六同加三倍，爲九、爲十八，次以第二之二、第四之四同加二倍，爲四、爲八，其倍第一之九既大于倍第二之四，而倍第三之十八亦大于倍第四之八也。若爾，或俱大、俱小，或等。累試之，皆合。則三與二偕六與四，得爲同理之比例也。

以上論四幾何者，斷比例之法也，其連比例法倣此。但連比例之中率兩用之，既爲第二、又爲第三，視此異耳。

第七界

同理比例之幾何，爲相稱之幾何。

甲與乙若丙與丁，是四幾何爲同理之比例，即四幾何爲相稱之幾何。又戊與己若己與庚，即三幾何亦相稱之幾何。

第八界

四幾何，若第一之幾倍大于第二之幾倍，而第三之幾倍不大于第四之幾倍，則第一與二之比例大于第三與四之比例。