学第一 考第一 永远争第一

学考第1

教材同步点拨

·人教大纲版·

高中数学

二年级(上)

主编/王政

东北师范大学出版社

学第一 考第一 永远争第一

学考第1

教材同步点拨

·人教大纲版·

高中数学

二年级(上)

主编/王 政

东北师范大学出版社·长春

□本册主编：王　政
□编　　者：孙玉强　田序强　马阳光　崔国海　张建国　于新芝
邵军强　于华亭　迟万卿　王　芳　李　华　盖风强
宋旭波　赵庆利　李凤奎　祁学雷　孙庭晓　金永兴
宋　艳　王保文　宋文胜　高占波

图书在版编目（CIP）数据

学考第一．教材同步点拨．高二数学．上：人教大纲版／王政主编．—长春：东北师范大学出版社，2005.4
ISBN 7-5602-4088-7

Ⅰ.学…　Ⅱ.王…　Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料　Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 019584 号

□总策划：第二编辑室
□责任编辑：才广林　□封面设计：魏国强
□责任校对：张志荣　□责任印制：栾喜湖

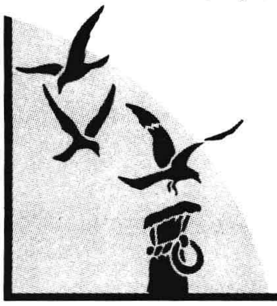
东北师范大学出版社出版发行
长春市人民大街 5268 号（130024）
电话：0431—5695744　5688470
传真：0431—5695734
网址：http://www.nenup.com
电子函件：sdcbs@mail.jl.cn
广告许可证：吉工商广字 2200004001001 号
东北师范大学出版社激光照排中心制版
黑龙江新华印刷二厂印装
黑龙江省阿城市通城街（150300）
2005 年 6 月第 1 版　2005 年 6 月第 1 次印刷
幅面尺寸：210 mm×296 mm　印张：11　字数：420 千
印数：00 001—20 000 册

定价：13.60 元

如发现印装质量问题，影响阅读，可直接与承印厂联系调换

目录

第六章　不　等　式



6.1 不等式的性质

基础知识归纳

1. 比较准则

$a-b>0 \Leftrightarrow a>b$；$a-b=0 \Leftrightarrow a=b$；$a-b<0 \Leftrightarrow a<b$.

2. 不等式定理

定理 1

如果 $a>b$，那么 $b<a$；如果 $b<a$，那么 $a>b$.

定理 2

如果 $a>b$，且 $b>c$，那么 $a>c$；

如果 $c<b$，且 $b<a$，那么 $c<a$.

定理 3

如果 $a>b$，那么 $a+c>b+c$.

推论：如果 $a>b$，且 $c>d$，那么 $a+c>b+d$.

定理 4

如果 $a>b$，且 $c>0$，那么 $ac>bc$；

如果 $a>b$，且 $c<0$，那么 $ac<bc$.

推论 1：如果 $a>b>0$，且 $c>d>0$，那么 $ac>bd$；

推论 2：如果 $a>b>0$，那么 $a^n>b^n$ ($n\in\mathbf{N}$，且 $n>1$).

定理 5

如果 $a>b>0$，那么 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$ ($n\in\mathbf{N}$，且 $n>1$).

易混知识辨析

(1)不等式有同向、异向的区别，有些性质对同向不等式成立，有些性质对异向不等式才成立；在不等式的性质中，要注意哪些字母可以代表任意实数、非 0 实数或正实数.

(2)解不等式问题，通常借助图形对不等式的一些性质、定理和解法进行直观分析. 为了正确理解和记忆不等式的一些重要的性质和定理，在作出它们的严格证明之后，还可以给出它们的几何解释. 例如，对于“$a>b>0$，$c>d>0$，则 $ac>bd$”，它的直观解释是以“a、c 为邻边的矩形的面积大于以 b，d 为邻边的矩形的面积”. 又如，“$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$ ($a,b\in\mathbf{R}^+$)”的几何意义是“在以 $a+b$ 为直径的圆中，半径不小于半弦”.

(3)关于不等式的性质，是指课本中的五个定理和三个推论，不等式的性质是本章的难点之一，掌握不等式的意义及实数运算的符号法则，是学好这一章的关键.

典型例题

例 1　判断下列命题的真假.

(1)若 $a>b$，则 $ac>bc$；

(2)若 $a>b$，则 $ac^2>bc^2$；

(3)若 $ac^2>bc^2$，则 $a>b$；

(4)$a<b<0$，则 $a^2>ab>b^2$；

(5)若 $a<b<0$，则 $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$；

(6)若 $a<b<0$，则 $\dfrac{b}{a}>\dfrac{a}{b}$；

(7)若 $a<b<0$，则 $|a|>|b|$；

(8)若 $a<b<0$，则 $\dfrac{b}{a}<1$；

(9)若 $c>a>b>0$，则 $\dfrac{a}{c-a}>\dfrac{b}{c-b}$；

(10)若 $a>b$，$\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$，则 $a>0$，$b<0$.

解析　(1)因 c 的正负或是否为 0 未知，ac 与 bc 的大小不定，故命题为假.

(2)$\because c^2\geqslant 0$，$\therefore c=0$ 时，$ac^2=bc^2$，故为假命题.

(3)$\because ac^2>bc^2$，$c\neq 0$，$c^2>0$，$\therefore a>b$，故为真命题.

(4)由 $\begin{cases}a<b,\\a<0,\end{cases}$ 得 $a^2>ab$，又 $\begin{cases}a<b,\\b<0,\end{cases}$ 得 $ab>b^2$，故为真命题.

(5)由 $a<b<0$ 得 $ab>0$，$\frac{1}{ab}>0$，$\therefore \frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，故为假命题.

(6)$\because a<b<0$，$\therefore \begin{cases}-a>-b>0,\\ -\frac{1}{b}-\frac{1}{a}>0;\end{cases}$ $\therefore \frac{a}{b}>\frac{b}{a}$，故为假命题.

(7)两负数中，较小的数的绝对值反而大，故为真命题.

(8)$a<b<0\Rightarrow|a|>|b|\Rightarrow\frac{|b|}{|a|}<1\Rightarrow\frac{b}{a}<1$，故为真命题.

(9)$\because c-b>c-a>0\Rightarrow\frac{1}{c-a}>\frac{1}{c-b}>0$，

又$\because \begin{cases}a>b>0,\\ \frac{1}{c-a}>\frac{1}{c-b}>0,\end{cases}$ $\therefore \frac{a}{c-a}>\frac{b}{c-b}$，故为真命题.

(10)$\because \begin{cases}a-b>0,\\ \frac{1}{a}-\frac{1}{b}>0,\end{cases}$ $\therefore \frac{b-a}{ab}>0$，$ab<0$.

又$\because a>b$，$\therefore a>0$，$b<0$，故为真命题.

评注 这一命题考查的是不等式性质的条件与结论，可直接应用性质判定命题真假.

例 2 $\begin{cases}2<x+y<4,\\ 0<xy<3\end{cases}$ 是 $\begin{cases}0<x<1,\\ 2<y<3\end{cases}$ 的(　　).

A. 充要条件　　B. 充分不必要条件

C. 必要不充分条件　　D. 既不充分也不必要条件

解析 由 $0<x<1$，$2<y<3$，

得 $2<x+y<4$，$0<xy<3$.

但反之未然，如 $x=2$，$y=1$ 时，

显然满足前者，但不满足后者.

答案 C

例 3 如果 $a\in\mathbf{R}$ 且 $a^2+a<0$，那么 a，a^2，$-a$，$-a^2$ 的大小关系是(　　).

A. $a^2>a>-a^2>-a$　　B. $-a>a^2>-a^2>a$

C. $-a>a^2>a>-a^2$　　D. $a^2>-a>a>-a^2$

解法一 由 $a^2+a<0$ 得 $-1<a<0$，

$\therefore 0<-a<1$，由此可得 $0<a^2<1$.

又 $a^2<-a$，$\therefore a<-a^2<0$. 故选 B.

解法二 令 $a=-\frac{1}{2}$，则 $a^2=\frac{1}{4}$，$-a=\frac{1}{2}$，$-a^2=-\frac{1}{4}$，故选 B.

答案 B

评注 解法一运用不等式的性质求解，解法二用特殊值法求解.

例 4 (1)若 $x<y<0$，试比较 $(x^2+y^2)(x-y)$ 与 $(x^2-y^2)(x+y)$ 的大小.

(2)设 $a>0$，$b>0$ 且 $a\neq b$，试比较 a^ab^b 与 a^bb^a 的大小.

解析 (1)$(x^2+y^2)(x-y)-(x^2-y^2)(x+y)$

$=(x-y)[(x^2+y^2)-(x+y)^2]=-2xy(x-y)$，

$\because x<y<0$，$\therefore xy>0$，$x-y<0$.

$\therefore -2xy(x-y)>0$.

$\therefore (x^2+y^2)(x-y)>(x^2-y^2)(x+y)$.

评注 根据式子的结构特点，可考虑用作差比较(比较法).

(2)$\because \frac{a^ab^b}{a^bb^a}=a^{a-b}b^{b-a}=\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}$，

当 $a>b>0$ 时，$\frac{a}{b}>1$，$a-b>0$，

则 $\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}>1$，于是 $a^ab^b>a^bb^a$.

当 $b>a>0$ 时，$0<\frac{a}{b}<1$，$a-b<0$，

则 $\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}>1$，于是 $a^ab^b>a^bb^a$.

综上，可得 $a^ab^b>a^bb^a$.

评注 因为两式都是指数幂的形式，作商比较(比较法).

例 5 设 $f(x)=1+\log x^3$，$g(x)=2\log x^2$，其中 $x>0$ 且 $x\neq1$，试比较 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的大小.

解析 $f(x)-g(x)=\log x^{\frac{3}{4}x}$，$\log x^{\frac{3}{4}x}$ 的正负取决于 x，$\frac{3}{4}x$ 与 1 的大小关系，故需要分以下三种情况分类：

(1)当 $\frac{3}{4}x=1$ 时，即 $x=\frac{4}{3}$ 时，$\log x^{\frac{3}{4}x}=0$，

$\therefore f(x)=g(x)$.

(2)当 $0<x<1$ 且 $0<\frac{3}{4}x<1$ 或 $x>1$ 且 $\frac{3}{4}x>1$，

即$0<x<1$ 或 $x>\frac{4}{3}$ 时，$\log x^{\frac{3}{4}x}>0$，$\therefore f(x)>g(x)$.

(3)当 $1<x<\frac{4}{3}$ 时，$\log x^{\frac{3}{4}x}<0$，$\therefore f(x)<g(x)$.

评注 比较法是比较大小的基本方法，常常用到不等式的性质来解决，比较的关键是变形，一般地说变形要彻底，这样有利于下一步的判断.

例 6 已知 $-1<a+b<3$ 且 $2<a-b<4$，求 $2a+3b$ 的取值范围.

解析 $\because a+b$，$a-b$ 的范围已知，

$\therefore$ 要求 $2a+3b$ 的取值范围，

只要将 $2a+3b$ 用已知量 $a+b$，$a-b$ 表示出来，

可设 $2a+3b=x(a+b)+y(a-b)$，用待定系数法求出 x，y.

设 $2a+3b=x(a+b)+y(a-b)$，

$\therefore \begin{cases}x+y=2,\\ x-y=3;\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{5}{2},\\ y=-\frac{1}{2}.\end{cases}$

$\therefore -\frac{5}{2}<\frac{5}{2}(a+b)<\frac{15}{2}$，

$-2<-\frac{1}{2}(a-b)<-1$.

$\therefore -\frac{9}{2}<\frac{5}{2}(a+b)-\frac{1}{2}(a-b)<\frac{13}{2}$，

即 $-\frac{9}{2}<2a+3b<\frac{13}{2}$.

评注 解此题常见错误是：

$-1<a+b<3$，①

$2<a-b<4$，②

①+②得 $1<2a<7$，③

由②得 $-4<b-a<-2$.④

①+④得 $-5<2b<1$，$\therefore -\frac{15}{2}<3b<\frac{2}{3}$.⑤

③+⑤得 $-\frac{13}{2}<2a+3b<\frac{17}{2}$.

此题也可用第七章线性规划来解决.

例 7 已知 $a>0$，$bc>a^2$，$a^2-2ab+c^2=0$，试确定 a,b,c 的大小关系.

解析 $\because bc>a^2>0$，$\therefore b,c$ 同号.

又 $a^2-2ab+c^2=0$，$a>0$，

$\therefore b=\frac{a^2+c^2}{2a}>0$，$\therefore c>0$.

将 b,c 平方后作差，得

$b^2-c^2=b^2-(2ab-a^2)=(a-b)^2\geqslant 0$，$\therefore b^2\geqslant c^2$.

若 $b=c$，则 $a=b$，这与 $bc>a^2$ 矛盾，$\therefore b>c$.

又 $0=a^2-2ab+c^2<bc-2ab+c^2=2b(c-a)$，

$\therefore c>a$.

故 $b>c>a$.

教材例题习题的变形题

例 1 (P4 例 2)已知 $x\in\mathbf{R}$，比较 $(x^2+1)^2$ 与 x^4+x^2+2 的大小.

解析 $(x^2+1)^2-(x^4+x^2+2)$

$=x^4+2x^2+1-(x^4+x^2+2)$

$=x^2-1$.

当 $x>1$ 或 $x<-1$ 时，$(x^2+1)^2>x^4+x^2+2$；

当 $x=\pm 1$ 时，$(x^2+1)^2=x^4+x^2+2$；

当 $-1<x<1$ 时，$(x^2+1)^2<x^4+x^2+2$.

例 2 (P30A 组 2)设 $ab>0$，$a+b>0$，比较 $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ 与 $\frac{a-b}{a+b}$ 的大小.

解析 $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}-\frac{a-b}{a+b}$

$=\frac{(a^2-b^2)(a+b)-(a^2+b^2)(a-b)}{(a^2+b^2)(a+b)}$

$=\frac{2\cdot ab\cdot(a-b)}{(a^2+b^2)(a+b)}$.

当 $a>b>0$ 时，$\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}>\frac{a-b}{a+b}$；

当 $a=b>0$ 时，$\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}=\frac{a-b}{a+b}$；

当 $0<a<b$ 时，$\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}<\frac{a-b}{a+b}$.

例 3 (P8 习题 6.1 第 6 题)如果 $30<x<42$，$16<y<24$，求 $x-y$，$3x+y$，$\frac{y}{x}$ 的取值范围.

解析 由 $30<x<42$，①

$16<y<24$.②

由②得 $-24<-y<-16$.③

①+③得 $6<x-y<26$.

由①得 $90<3x<126$.④

②+④得 $106<3x+y<150$.

由①得 $\frac{1}{42}<\frac{1}{x}<\frac{1}{30}$.⑤

②×⑤得 $\frac{8}{21}<\frac{y}{x}<\frac{4}{5}$.

所以 $6<x-y<26$；

$106<3x+y<150$；

$\frac{8}{21}<\frac{y}{x}<\frac{4}{5}$.

学科内综合题

例 1 比较 16^{18} 与 18^{16} 的大小.

解析 $\because \frac{16^{18}}{18^{16}}=\frac{2^{72}}{2^{16}\cdot 3^{32}}=\frac{2^{56}}{3^{32}}=\left(\frac{2^7}{3^4}\right)^8$

$=\left(\frac{128}{81}\right)^8>1$，

$\therefore 16^{18}>18^{16}$.

评注 (1)作商比较的一般步骤可简记为：作商→变形→与 1 比较大小→定论.(2)一般地，比较两个指数式大小，用作商法，其原因有两个：①指数式都大于 0；②指数作商后便于运算并变形到最简式，如本题.

例 2 已知 $a>0$，$a\neq 1$，$m>n>0$，比较 $a^m+\frac{1}{a^m}$ 与 $a^n+\frac{1}{a^n}$ 的大小.

解析 用作差比较法.

$\left(a^m+\frac{1}{a^m}\right)-\left(a^n+\frac{1}{a^n}\right)=(a^m-a^n)-\frac{a^m-a^n}{a^ma^n}$

$=(a^m-a^n)\left(1-\frac{1}{a^{m+n}}\right)$.①

$\because a>0$，$a\neq 1$，

$\therefore a$ 的取值范围是 $A=\{a|a>0$，且 $a\neq 1\}$.

A 可以划分为两类，即

$A=A_1\cup A_2=\{a|0<a<1\}\cup\{a|a>1\}$.

(1)当 $a\in A_1=\{a|0<a<1\}$ 时，

指数函数 $y=a^x$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数.

由已知 $m>n>0$，$\therefore a^m<a^n$，即 $a^m-a^n<0$.②

$\therefore 1-\frac{1}{a^{m+n}}<0(a^{m+n}<1)$.③

把②③式代表①式，得 $(a^m-a^n)\left(1-\frac{1}{a^{m+n}}\right)>0$，

$\therefore a^m+\frac{1}{a^m}>a^n+\frac{1}{a^n}$.

(2)$A\in A_2=\{a|a>1\}$ 时，指数函数 $y=a^x$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数.

由已知 $m>n>0$，$\therefore a^m>a^n$，即 $a^m-a^n>0$.

$\therefore 1-\frac{1}{a^{m+n}}>0(a^{m+n}>1)$.

$\therefore (a^m-a^n)\left(1-\frac{1}{a^{m+n}}\right)>0$.

综上：得 $a^m+\frac{1}{a^m}>a^n+\frac{1}{a^n}$.

评注 (1)作差比较法，如本题中的①式.(2)分类

讨论的三条原则，即“子类非空，子类与子类的交为空集，子类的并为母类”. 如本题中，子类 A_1，A_2 非空，$A_1\cap A_2=\varnothing$，$A_1\cup A_2=A$.（3）指数函数为单调性，本题中用到了不等式与函数的最佳结合点就是“函数的单调性”，应引起注意，因为它是近几年来高考的“焦点”.（4）本题中，当 $0<a<1$ 和 $a>1$ 时，结论一致，因此，解答的最后有“综上，得 $a^m+\frac{1}{a^m}>a^n+\frac{1}{a^n}$”一段话. 若结论不一致，这段话不能写.

综合应用题

例 1 已知 $a\in\mathbf{R}$，比较 $\frac{1}{1+a}$ 与 $1-a$ 的大小.

解析 $\frac{1}{1+a}-(1-a)=\frac{a^2}{1+a}$.

(1)当 $a=0$ 时，显然有 $\frac{1}{1+a}=1-a$.

(2)当 $a\neq0$ 时，由 $1+a\neq0$，可知 $a\neq-1$.

若 $a<-1$，则 $1+a<0$.

$\therefore\frac{a^2}{1+a}<0$，此时有 $\frac{1}{1+a}<1-a$.

若 $a>-1$，则 $1+a>0$，

$\therefore\frac{a^2}{1+a}>0$，此时有 $\frac{1}{1+a}>1-a$.

综上可知，当 $a=0$ 时，$\frac{1}{1+a}=1-a$；

当 $a<-1$ 时，$\frac{1}{1+a}<1-a$；

当 $a>-1$ 且 $a\neq0$ 时，$\frac{1}{1+a}>1-a$.

例 2 已知 $2<a\leqslant3$，且 $-2\leqslant b\leqslant-1$，试求 $a+b$，$a-b$，ab 和 $\frac{a}{b}$ 的范围.

解析 (1)$\because2<a\leqslant3$，$-2\leqslant b\leqslant-1$，

$\therefore0<a+b\leqslant2$.

(2)$\because-2\leqslant b\leqslant-1$，$\therefore1\leqslant-b\leqslant2$.

又 $2<a\leqslant3$，$\therefore3<a-b\leqslant5$.

(3)$\because-2\leqslant b\leqslant-1$，$\therefore1\leqslant-b\leqslant2$.

又 $2<a\leqslant3$，$\therefore2<-ab\leqslant6$，$\therefore-6\leqslant ab<-2$.

(4)$\because-2\leqslant b\leqslant-1$，$\therefore-1\leqslant\frac{1}{b}\leqslant-\frac{1}{2}$，

$\therefore\frac{1}{2}\leqslant-\frac{1}{b}\leqslant1$.

又 $2<a\leqslant3$，$\therefore1<-\frac{a}{b}\leqslant3$，$\therefore-3\leqslant\frac{a}{b}<-1$.

例 3 若 $q>0$，且 $q\neq1$，比较下列各式的大小：

(1)$1+q^2$ 与 $2q$；(2)$1+q^3$ 与 $q+q^2$.

(1)$(1+q^2)-2q=1-2q+q^2=(1-q)^2$.

$\because q>0$，且 $q\neq1$，$\therefore(1-q)^2>0$.

故 $1+q^2>2q$.

(2)$(1+q^3)-(q+q^2)$

$=(q+1)(q^2-q+1)-q(q+1)$

$=(q+1)(q^2-2q+1)$

$=(q+1)(q-1)^2$.

$\because q>0$，且 $q\neq1$，$\therefore(q+1)(q-1)^2>0$.

故 $1+q^3>q+q^2$.

评注 多项式与多项式比较大小，由于展开时较繁，作差后灵活选择乘法公式进行因式分解，利用实数的符号法则确定积的正负.

创新题

例 1 **(信息题)**某水库有 10 个泄洪闸，现在水库的水位已经超过安全线，上游河水还在按一成不变的速度增加. 为了防洪，须调节泄洪速度，假设每个闸门的泄洪速度相同. 经测算，若打开 1 个泄洪闸，30 个小时水位降至安全线；若打开 2 个泄洪闸，10 个小时水位降至安全线. 现在抗洪指挥部要求 3 个小时使水位下降至安全线以下，问至少同时打开几个闸门.

解析 设水库已有超过安全水位的水量是 x m³，上游河水每小时 y m³ 的水量注入水库，每个泄洪闸每小时泄洪 z m³，依题意，得 $\begin{cases}x+30y=30z,\\z+10y=2\times10z,\end{cases}$

解得 $x=15z$，$y=0.5z$.

假设打开 n 个闸门，可在 3 个小时内使水位降至安全线以下，则有 $x+3y<3nz$. ①

把 $x=15z$，$y=0.5z$ 代入①，得 $15z+1.5z<3nz$，

$\because z\neq0$，$\therefore16.5<3n\Rightarrow n>5.5$.

又 n 为自然数，$\therefore n\geqslant6$.

即最少要同时打开 6 个闸门.

评注 根据题意列出混合方程组是本题的解题策略，实际应用问题往往量多，关系复杂，先列方程，建立数学模型，然后再求解.

例 2 **(探究题)**命题“若 $a>b>c$，且 $a+b+c=0$，则 $\frac{\sqrt{b^2-ac}}{a}<\sqrt{3}$”是真命题还是假命题？证明你的结论.

证明 取 $a=2$，$b=1$，$c=3$，满足已知条件，此时 $\frac{\sqrt{b^2-ac}}{a}=\frac{\sqrt{7}}{2}<\sqrt{3}$.（猜想命题是真命题）

若 $a\leqslant0$，则 $c<b<a\leqslant0$，

$\therefore a+b+c<0$，这与已知 $a+b+c=0$ 矛盾.

$\therefore a>0$，同理可知 $c<0$. 于是

$\frac{\sqrt{b^2-ac}}{a}<\sqrt{3}\Leftrightarrow\sqrt{b^2-ac}<\sqrt{3}a\Leftrightarrow b^2-ac<3a^2$

$\Leftrightarrow3a^2-b^2+ac>0\Leftrightarrow3a^2-(a+c)^2+ac>0$

$\Leftrightarrow2a^2-ac-c^2>0\Leftrightarrow(a-c)(2a+c)>0$.

$\because a>b>c$，$\therefore a-c>0$.

又 $2a+c=a+(a+c)=a-b>0$，

$\therefore(a-c)(2a+c)>0$ 成立.

$\therefore\frac{\sqrt{b^2-ac}}{a}<\sqrt{3}$.

例 3 **(探究题)**若 $0<a<\frac{1}{2}$，设 $A=1-a^2$，$B=1+a^2$，$C=\frac{1}{1-a}$，$D=\frac{1}{1+a}$，试比较 A，B，C，D 的大小.

解析 取 $a=\frac{1}{3}$,则 $A=1-a^2=\frac{8}{9}$,$B=1+a^2=\frac{10}{9}$,$C=\frac{1}{1+a}=\frac{3}{2}$,$D=\frac{1}{1+a}=\frac{3}{4}$,因此可推断出 $D<A<B<C$.

(1)$\because A-D=(1-a^2)-\frac{1}{1+a}=\frac{-a(a^2+a-1)}{1+a}$,

$\because 0<a<\frac{1}{2}$,$\therefore 1+a>0$,$-a<0$,关键是判断 a^2+a-1 的符号.

$\because 0<a^2<\frac{1}{4}$,$0<a<\frac{1}{2}\Rightarrow 0<a^2+a<\frac{3}{4}$,

$\therefore a^2+a-1<0$,$\therefore A-D>0$,$\therefore A>D$.

(2)$\because A=1-a^2<1$,$B=1+a^2>1$,

$\therefore A<B$.

(3)$C-B=\frac{1}{1-a}-(1+a^2)=\frac{a(a^2-a+1)}{1-a}$,

$\because 0<a<\frac{1}{2}$,$\therefore 1-a>0$.

$\therefore a^2-a+1=a^2+(1-a)>0$.

$\therefore C-B>0$,$\therefore B<C$.

综上,由不等式的传递性,得 $D<A<B<C$.

评注 比较四个数的大小,若逐一作差,需作 6 次,太繁,可先用特殊值"试验",再证明.由此可见,解这类探索性问题,用特殊值探路,使抽象问题具体化,要解决的问题明朗化,再利用等价变换证明.

高考题

例 1 (**2004 年北京春季卷**)已知三个不等式:$ab>0$,$bc-ad>0$,$\frac{c}{a}-\frac{d}{b}>0$(其中 a,b,c,d 均为实数),用其中两个不等式作为条件,余下的一个不等式作为结论组成一个命题,可组成的正确命题个数是(   ).

A. 0   B. 1   C. 2   D. 3

解析 由 $ab>0$,$bc-ad>0\Rightarrow\frac{1}{ab}>0$,$bc-ad>0$,根据不等式性质:

正同向乘得 $\frac{c}{a}-\frac{d}{b}>0$.

由 $ab>0$,$\frac{c}{a}-\frac{d}{b}>0\Rightarrow bc-ad>0$;

由 $bc-ad>0$,$\frac{c}{a}-\frac{d}{b}>0\Rightarrow bc-ad>0$,

$\frac{bc-ad}{ab}>0\Rightarrow ab>0$.

答案 D

例 2 (**2003 年北京春季卷**)设 $a,b,c,d\in\mathbf{R}$ 且 $a>b$,$c>d$,则下列结论中正确的是(   ).

A. $a+c>b+d$ B. $a-c>b-d$

C. $ac>bd$ D. $\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$

解析 用性质"同向加".

答案 A

例 3 (**2002 年全国卷**)已知 $0<x<y<a<1$,则有(   ).

A. $\log_a{}^{(xy)}<0$ B. $0<\log_a{}^{(xy)}<1$

C. $1<\log_a{}^{(xy)}<2$ D. $\log_a{}^{(xy)}>2$

解析 由 $0<x<y<a<1$ 可知 $0<xy<a^2<1$,$0<a<1$,所以 $\log_a{}^{(xy)}>\log_a{}^{a^2}=2$.

答案 D

例 4 (**2001 年上海春季卷**)若 a,b 为实数,则 $a>b>0$ 是 $a^2>b^2$ 的(   ).

A. 充分不必要条件   B. 必要不充分条件

C. 充要条件   D. 既非充分也非必要条件

解析 用性质"乘方性".

答案 A

例 5 (**2003 年北京理综卷**)设 $y_1=4^{0.9}$,$y_2=8^{0.48}$,$y_3=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1.5}$,则(   ).

A. $y_3>y_1>y_2$ B. $y_2>y_1>y_3$

C. $y_1>y_2>y_3$ D. $y_1>y_3>y_2$

解析 $\because y_1=4^{0.9}=2^{1.8}$,$y_2=8^{0.48}=2^{1.44}$,$y_3=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1.5}=2^{1.5}$,因为函数 $y=2^x$ 为增函数,所以 $2^{1.8}>2^{1.5}>2^{1.44}$,即 $y_1>y_3>y_2$.

答案 D

6.1 同步测试

教材基础知识针对性训练●●●

一、选择题

1. 若 $a<b<0$,则下列不等关系中不能成立的是(   ).

A. $ab>b^2$ B. $\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$ C. $|a|>|b|$ D. $a^2>b^2$

2. 设 $0<a<b<1$,则下列不等式成立的是(   ).

A. $a^b>b^a$ B. $\log_a b>\log_b a$

C. $a\log_b a<b\log_a b$ D. $\frac{b}{a}<\log_a b$

3. 若 $a,b,c\in\mathbf{R}$,且 $|a-c|<|b|$,则(   ).

A. $|a|<|b|+|c|$ B. $|a|<|b|-|c|$

C. $a<b+c$ D. $a<b-c$

4. 已知 $a>0$,$b>0$,则不等式 $-b<\frac{1}{x}<a$ 的解集为(   ).

A. $x<-\frac{1}{a}$ 或 $x>\frac{1}{b}$

B. $x<-\frac{1}{b}$ 或 $x>\frac{1}{a}$

C. $-\frac{1}{a}<x<0$ 或 $0<x<\frac{1}{b}$

D. $-\frac{1}{b}<x<0$ 或 $0<x<\frac{1}{a}$

5. 如果 $\log_{\frac{1}{2}}|x-\frac{\pi}{3}|\geqslant\log_{\frac{1}{2}}\frac{\pi}{2}$,那么 $\sin x$ 的取值范围是(   ).

A. $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ B. $[-\frac{1}{2},1]$

C. $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},1]$　　D. $[-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})\cup(\frac{\sqrt{3}}{2},1]$

6. 若 $a>b>c>0$，$x=\sqrt{a^2+(b+c)^2}$，$y=\sqrt{b^2+(c+a)^2}$，$z=\sqrt{c^2+(b+a)^2}$，那么 xy,yz,zx,x^2,y^2,z^2 中最小的是(　　).

A. xy　　B. yz　　C. x^2　　D. z^2

7. 若设 $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，$\beta\in[0,\frac{\pi}{2}]$，那么 $2\alpha-\frac{\beta}{3}$ 的范围是(　　).

A. $(0,\frac{5}{6}\pi)$　　B. $(-\frac{\pi}{6},\frac{5}{6}\pi)$

C. $(0,\pi)$　　D. $(-\frac{\pi}{6},\pi)$

8. 若 $a,b\in\mathbf{R}$，则 $\frac{1}{a^3}>\frac{1}{b^3}$ 成立的一个充分不必要条件是(　　).

A. $ab>0$　B. $b>a$　C. $a<b<0$　D. $ab(a-b)<0$

9. 若 $a<b<0$，则下列不等关系中不能成立的是(　　).

A. $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　　B. $\frac{1}{a-b}>\frac{1}{b}$

C. $|a|>|b|$　　D. $\frac{1}{|a|}>\frac{1}{|b|}$

10. 设 $f(x)=|\lg x|$，若 $a<b<c$，且 $f(a)>f(c)>f(b)$，则(　　).

A. $(a-1)(c-a)>0$　　B. $ac<1$

C. $ab=1$　　D. $ac>1$

二、填空题

1. 有下列四个结论：①若 $\frac{\pi}{4}<x<\frac{5}{4}\pi$，则有 $\sin x<\cos x$；②已知 α,β 是第一象限角，若 $\sin\alpha>\sin\beta$，则 $\cos\alpha<\cos\beta$；③若 α 满足 $\sin\alpha+\cos\alpha<-1$，则 $\tan\alpha+\cot\alpha\geqslant2$；④若 $\alpha,\beta\in[0,\frac{\pi}{2}]$，且 $\alpha+\beta=\frac{2}{3}\pi$，则 $\cos\alpha-\cos\beta$ 的最大值是 $\frac{2}{3}$. 其中正确的结论序号是________.

2. 已知 $-3<a<b<1$，$-2<c<-1$，则 $(a-b)c^2$ 的取值是________.

3. 若 $m<n$，$p<q$，$(p-n)(p-m)<0$，$(q-m)(q-n)<0$，则 m,n,p,q 从小到大排列顺序是________.

4. 已知①$ab>0$；②$-\frac{c}{a}<-\frac{d}{b}$；③$bc>ad$ 三个不等式，以上两个作为条件，余下的一个作为结论，则可以组成________个正确的命题.

三、解答题

1. 实数满足下列三个条件：①$d>c$；②$a+b=c+d$；③$a+d<b+c$. 请将 a,b,c,d 按从小到大排列，并证明你的结论.

2. 设 $x,y,z\in\mathbf{R}$，比较 $5x^2+y^2+z^2$ 与 $2xy+4x+2z-2$ 的大小.

3. 船在流水中在甲地和乙地间来回行驶一次的平均速度和船在静水中的速度是否相等？为什么？

4. 若 $1<a<2$，试比较 $\log_a x$ 与 $2\log_{2a}x$ 的大小并说明理由.

5. 已知 $-1\leqslant a+b\leqslant1$，$1\leqslant a-2b\leqslant3$，求 $a+3b$ 的取值范围.

6. 设 $0<x<1$，$a>0$ 且 $a\neq1$，比较 $|\log_a(1-x)|$ 与 $|\log_a(1+x)|$ 的大小.

探究应用拓展性训练●●●

1. **(推断题)** 已知 $a>0$，$b>0$，$c>0$，且 $b<c$，比较 ab 与 $ac+bc$ 的大小.

2. **(与现实生活联系的应用题)** 某顾客第一次在商店买 x 件商品花去 $y(y\geqslant1)$ 元，第二次再买这种商品时发现该品已经降价，且 120 件恰好降价 8 元，第二次比第一次多买 10 件，多花去 2 元，那么他第一次至少买这种商品多少件？

3. **(创新题)** 已知函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，$a,b\in\mathbf{R}$.

(1)求证：如果 $a+b\geqslant0$，那么 $f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$.

(2)判断(1)中的命题的逆命题是否成立，并证明你的结论.

(3)解不等式 $f(\lg\frac{1-x}{1+x})+f(2)\geqslant f(\lg\frac{1+x}{1-x})+f(-2)$.

4. **(创新题)** 已知一个三角形三边长分别为 15，9，23 单位长度，若把它们的三边分别缩短 x 单位长度，且构成钝角三角形，求 x 的范围.

5. **(创新题)** 100 位代表每人投一票，要选出 5 名委员，问当选者的最低票数应是多少张.

6. **(与现实生活联系的应用题)** 用 100 根木桩和篱笆围成一个矩形的小牧场，现要求四角都有木桩，每 1 m 树一根木桩，且希望围成的矩形牧场面积大于 400 m^2，小于 600 m^2，问长、宽边上各树多少根木桩.

7. **(与现实生活联系的应用题)** 甲、乙两个电车沿边长为 60 m的正三角形 ABC 边界上运动，按 $A\to B\to C$ 的方向走，甲车每分钟走 65 m，乙车每分钟走 50 m，起始位置甲车在点 A，乙车在点以 C，问几分钟后甲、乙两车在同一边上运动.

8. **(与现实生活联系的应用题)** 为完成一项实地测量任务，夏令营的同学们成立了一支"测绘队". 需要 24 人参加测量，20 人参加计算，16 人参加绘图. 测绘队的成员中很多同学是多面手，有 8 人既参加了测量又参加了计算，有 6 个既参加了测量又参加了绘图，有 4 人既参加了计算又参加了绘图，另有一些人三项工作都参加了，请问这个测绘队至少有多少人.

9. **(与现实生活联系的应用题)** 某化工厂制定明年某化工产品的生产计划，但受下面数据的制约：

(1)生产此产品的工人数不超过 200 人；

(2)每个工人年工时约计 2100 工时；

(3)预计此产品明年销售量至少 80000 袋；

(4)每袋需用 4 工时；

(5)每袋需要原材料 20 kg；

(6)目前库存原料 800 t，今年还需要 200 t，明年可补充 1200 t.

试根据上述数据决定明年可能的产量.

6.2 算术平均数与几何平均数

重点知识讲解

1. 重要不等式

(1)如果 $a,b\in\mathbf{R}$,那么 $a^2+b^2\geqslant 2ab$(当且仅当 $a=b$ 时取"="号).

(2)如果 a,b 是正数,那么 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$(当且仅当 $a=b$ 时取"="号).

2. 算术平均数与几何平均数

称 $\frac{a+b}{2}$ 为 a,b 的算术平均数,称 $\sqrt{ab}$ 为 a,b 的几何平均数.

3. 重要结论

二元均值不等式不但可以处理两个正数的和与积结构的不等式,结合不等式的性质还可以处理两个正数的平方和、倒数和与其变形式的结构,由公式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 和 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ 可得到以下几个重要结论:

(1)$a^2+b^2\geqslant -2ab$(当且仅当 $a=-b$ 时取"="号);

(2)$a^2+b^2\geqslant 2|ab|$(当且仅当 $|a|=|b|$ 时取"="号);

(3)$a^2+b^2\geqslant 2ab$(当且仅当 $a=b$ 时取"="号);

(4)$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$($a,b$ 都是正数,当且仅当 $a=b$ 时等号成立).

4. 注意事项

在使用公式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 和 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ 时,要注意两者成立的条件是不相同的,前者只要求 a,b 都是实数,而后者要求 a,b 都是正数.

在使用均值定理证明问题时,要注意它们反复使用后,在相加相乘时字母应满足的条件及多次使用后等号的条件是否一致;若不一致,则不等式中的等号不能成立.

5. 利用均值定理解决函数或代数式的最值问题

(1)当 a,b 都为正数,且 ab 为定值时,有 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$(定值),当且仅当 $a=b$ 时取"="号,此时 $a+b$ 有最小值.

(2)当 a,b 都为正数,且 $a+b$ 为定值时,有 $ab\leqslant\frac{(a+b)^2}{4}$(定值),当且仅当 $a=b$ 时取"="号,此时 ab 有最大值.

以上两类问题可简称为"积大和小"问题.

6. 运用平均数定理与注意事项

创设应用算术平均数与几何平均数定理使用的条件,合理拆项或配凑因式是常用的解题技巧,而在拆与凑的过程中,一要考虑定理使用的条件(两数都为正),二要考虑必须使和或积为定值,三要考虑等号成立的条件(当且仅当 $a=b$ 时取"="号).它具有一定的灵活性和变形技巧,高考中常设计为一个难点.

7. 问题转化

二元均值定理具有将"和式"转化为"积式"或将"积式"转化为"和式"的放缩功能,若所证不等式可变成一边为和,另一边为积的形式,则可以考虑使用这一定理把问题转化.其中"一正二定三相等"在解题中具有双重功能,即有对条件的制约作用,又有解题的导向作用.

8. 使用二元均值定理求最值必须具备的三个条件

(1)在所求最值的代数式中,各变数均应是正数(如不是,则进行变号转换).

(2)各变数的和或积必须为常数,以确保不等式一边为定值(如不是,则进行拆项或分解,务必使不等式的一端的和或积为常数).

(3)各变数有相等的可能.即相等时,变量字母有实数解,且在定义域内;如无,则说明拆项、分解不当,此时应重新拆项、分解或改用其他方法.比如,已知 $x\in[2,3)$,求函数 $y=x+\frac{1}{x}$ 的最小值,从形式上看可以使用二元均值定理,但等号成立的条件不具备,因此,要考虑用函数的单调性解决问题.

典型例题

例1 设 $0<x<2$,求函数 $f(x)=\sqrt{3x(8-3x)}$ 的最大值,并求相应的 x 值.

解析 $\because 0<x<2,\therefore x>0,8-3x>0$,

$\therefore f(x)=\sqrt{3x(8-3x)}\leqslant\frac{3x+8-3x}{2}=4$,

当且仅当 $3x=8-3x$,即 $x=\frac{4}{3}$ 时,等号成立.

例2 已知 $a,b,c\in\mathbf{R}$,求证:$a^4+b^4+c^4\geqslant a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geqslant abc(a+b+c)$.

证明 由不等式两边的结构特点,联想重要不等式

$a^2+b^2\geqslant 2ab$,故可用它进行证明.

$\because a^4+b^4\geqslant 2a^2b^2,b^4+c^4\geqslant 2b^2c^2,c^4+a^4\geqslant 2c^2a^2$,

以上三式相加得 $a^4+b^4+c^4\geqslant a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$.

又$\because a^2b^2+b^2c^2\geqslant 2ab^2c,b^2c^2+c^2a^2\geqslant 2abc^2$,

$c^2a^2+a^2b^2\geqslant 2a^2bc$,

$\therefore a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geqslant abc(a+b+c)$,

即 $a^4+b^4+c^4\geqslant a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geqslant abc(a+b+c)$.

评注 通过对以上例题的证明可知,证明不等式时应根据式子两边的结构合理地选择重要不等式及拓展式.

例 3 若 $a>b>1,P=\sqrt{\lg a\cdot\lg b},Q=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b),R=\lg\left(\frac{a+b}{2}\right)$,则(　　).

A. $R<P<Q$　　B. $P<Q<R$

C. $Q<P<R$　　D. $P<R<Q$

解析 $\because a>b>1\Rightarrow\lg a>0,\lg b>0$,

$\therefore Q=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b)>\sqrt{\lg a\cdot\lg b}=P$,

$R>\lg\sqrt{ab}=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b)=Q$,

$\therefore R>Q>P$.

答案:B

例 4 若正数 a,b 满足 $ab=a+b+3$,则 ab 的取值范围是________.

$(\sqrt{ab})^2-2\sqrt{ab}-3\geqslant 0$

解析 $ab=a+b+3\geqslant 2\sqrt{ab}+3$($a=b$ 时取"="号)

$\Leftrightarrow(\sqrt{ab})^2-2\sqrt{ab}-3\geqslant 0\Leftrightarrow\sqrt{ab}\geqslant 3\Leftrightarrow ab\geqslant 9$.

故 $a=b=3$ 时,ab 取最小值 9.

答案 $[9,+\infty)$.

例 5 已知 $\sin x>0$,求 $y=\frac{\sin x}{2}+\frac{2}{\sin x}$的最小值.

解析 利用函数 $y=\frac{t}{2}+\frac{2}{t}$的单调性.

令 $t=\sin x>0,\because t>0$,函数 $y=\frac{t}{2}+\frac{2}{t}$在$(0,2]$上单调递减,在$(2,+\infty)$内单调递增.

又$\because 0<\sin x\leqslant 1,\therefore$函数在$(0,1]$上是单调递减,

$\therefore$当 $\sin x=1$ 时,函数 $y=\frac{\sin x}{2}+\frac{2}{\sin x}$的最小值为$\frac{5}{2}$.

例 6 已知 a,b 为常数,求函数 $f(x)=(x-a)^2+(x-b)^2$ 的最小值.

解法一 观察函数式可知,此函数是关于 x 的一元二次函数,故可用"公式法"或"配方法"求解.

$f(x)=2x^2-2(a+b)x+a^2+b^2$

当 $x=-\frac{-2(a+b)}{2\times 2}=\frac{a+b}{2}$时,$f(x)_{\min}=\frac{(a-b)^2}{2}$.

解法二 $f(x)=(x-a)^2+(x-b)^2$ 可以化成 $f(x)=(x-a)^2+(b-x)^2$,这样$(x-a)+(b-x)$为定值,用均值不等式的拓展式求解.

$f(x)=(x-a)^2+(x-b)^2$

$=(x-a)^2+(b-x)^2\geqslant 2\left[\frac{(x-a)+(b-x)}{2}\right]^2$

$=\frac{(a-b)^2}{2}$.

当且仅当 $x-a=b-x$,即 $x=\frac{a+b}{2}$时,等号成立.

评注 以上两种解法都是从式子的结构入手,观察式子的结构,联想所学的知识和方法,从而找到合理的解题方法.高考中对能力的考查是高考永恒的主题.

例 7 若 $a,b\in\mathbf{R}^+$,且 $a+b=1$,求证$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\geqslant 9$.

因为 a,b 都是正数,不等式的右边为常数,故应考虑用均值不等式证明,但不等式的左边显然不适合直接应用均值不等式,所以应适当变形,或展开或代入 $1=a+b$.

证法一 $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)=1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}$

$=1+\frac{a+b}{ab}+\frac{1}{ab}=1+\frac{2}{ab}$.

由 $a+b=1$,得 $1\geqslant 2\sqrt{ab},\therefore\frac{1}{ab}\geqslant 4$,

$\therefore\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\geqslant 1+2\times 4=9$.

证法二 $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)$

$=\left(1+\frac{a+b}{a}\right)\left(1+\frac{a+b}{b}\right)=\left(2+\frac{b}{a}\right)\left(2+\frac{a}{b}\right)$

$=4+2\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+1\geqslant 5+2\times 2\sqrt{\frac{b}{a}\times\frac{a}{b}}=9$.

评注 利用基本不等式证明时,应充分注意基本不等式成立的条件,否则可能出现下述错误推导过程.

错证:$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{a}}\times 2\sqrt{\frac{1}{b}}=4\sqrt{\frac{1}{ab}}$,

由 $a+b=1$,得 $1\geqslant 2\sqrt{ab}$,

$\therefore\sqrt{\frac{1}{ab}}\geqslant 2,\therefore\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\geqslant 8$.

错因是当且仅当 $1=\frac{1}{a}=\frac{1}{b}$,即 $a=b=1$ 时取"="号与 $a+b=1$ 相矛盾.

例 8 用不等号将$\frac{a+b}{2},\frac{2ab}{a+b},\sqrt{ab},\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$(其中 $a,b\in\mathbf{R}^+$)按从小到大的顺序排列起来,并说明理由.

解析 由于涉及四个数之间的大小排列,而题中只能看到$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$,因此,要将其他两个进行大小比较就显得繁琐,可先取特例观察.如取 $a=2,b=4$,则$\frac{a+b}{2}=3,\frac{2ab}{a+b}=\frac{8}{3},\sqrt{ab}=2\sqrt{2},\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}=\sqrt{10}$,就可得到四个数的大小关系,再进行一般推理即可.

$\because\frac{2ab}{a+b}\leqslant\frac{2ab}{2\sqrt{ab}}=\sqrt{ab}$,故$\frac{2ab}{a+b}\leqslant\sqrt{ab}$.

又 $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2},\therefore\frac{2ab}{a+b}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$.

$\because a^2+b^2\geqslant 2ab$,两边加上 a^2+b^2,得

$2(a^2+b^2)\geqslant(a+b)^2$,故$\frac{a^2+b^2}{2}\geqslant\frac{(a+b)^2}{4}$.

由于 $a,b\in\mathbf{R}^+$,因此有$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geqslant\frac{a+b}{2}$.

综上所述有$\frac{2ab}{a+b}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$,当且仅

当$a=b$时取等号.

例 9 $a>0,b>0,a+b=4$,求$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2$的最小值.

解析 $\because a+b=4$,

$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=16-2ab$.

又 $a^2+b^2\geqslant 2ab$,$\therefore 16-2ab\geqslant 2ab$ 即 $ab\leqslant 4$.

$$\therefore \left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\geqslant\frac{\left(a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}\right)^2}{2}$$

$$=\frac{\left(4+\frac{4}{ab}\right)^2}{2}\geqslant\frac{\left(4+\frac{4}{4}\right)^2}{2}=\frac{25}{2},$$

故$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2$的最小值为$\frac{25}{2}$.

例 10 已知 $a>0,b>0,c>0,a+b+c=1$,求证:$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)\geqslant 64$.

解析 $\because a>0,a+b+c=1$,

$\therefore 1=a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc}$,

$\therefore abc\leqslant\frac{1}{27}$,即$\frac{1}{abc}\geqslant 27$.

$$\therefore \left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)$$

$$=1+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)+\frac{1}{abc}$$

$$\geqslant 1+3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}+3\sqrt[3]{\left(\frac{1}{abc}\right)^2}+\frac{1}{abc}$$

$$\geqslant 1+9+27+27=64.$$

评注 巧妙利用 $a+b+c=1$ 是解决问题的基础,而灵活地变形将 a,b,c 的形式转化为积的形式是解决问题的关键.

教材例题习题的变形题

例 题 **(P10 练习第 1 题)**已知 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,求证:$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\geqslant 6abc$.

证明 左边$=a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2$

$=b(a^2+c^2)+a(b^2+c^2)+c(a^2+b^2)$

$\geqslant b\cdot 2ac+a\cdot 2bc+c\cdot 2ab$

$=6abc$,

$\therefore$原不等式成立.

评注 这里主要是基本不等式的应用,将不等式左边先展开,重新组合,运用基本不等式证明左边大于等于右边.

学科内综合题

例 1 已知 $x<\frac{5}{4}$,求函数 $y=4x-2+\frac{1}{4x-5}$的最大值.

解析 因为 $4x-5<0$,所以先要"调整"符号;另外,$(4x-2)\cdot\frac{1}{4x-5}$不是常数,所以要对 $4x-2$ 进行拆(添)或"配凑",然后利用重要不等式求解.

$\because x<\frac{5}{4}$,$\therefore 5-4x>0$.

$$\therefore y=4x-2+\frac{1}{4x-5}$$

$$=-\left(5-4x+\frac{1}{5-4x}\right)+3\leqslant -2+3=1.$$

当且仅当 $5-4x=\frac{1}{5-4x}$,即 $x=1$ 时上式取等号.

故当 $x=1$ 时,$y_{\max}=1$.

例 2 已知 $x>0,y>0$,且$\frac{1}{x}+\frac{9}{y}=1$,求 $x+y$ 的最小值.

解析 $\because x>0,y>0,\frac{1}{x}+\frac{9}{y}=1$,

$$\therefore x+y=\left(\frac{1}{x}+\frac{9}{y}\right)(x+y)$$

$$=\frac{y}{x}+\frac{9x}{y}+10$$

$$\geqslant 6+10=16.$$

又$\frac{1}{x}+\frac{9}{y}=1$,当且仅当$\frac{y}{x}=\frac{9x}{y}$,

即 $x=4,y=12$ 时上式等号成立.

故当 $x=4,y=12$ 时,$(x+y)_{\min}=16$.

评注 此题属于求条件最值(x 与 y 之间有一定的约束条件),解答关键是合理使用条件,如果从中解出 x 或 y,再代入 $x+y$ 转化为一元函数的最值问题显然是比较复杂的,但设法整体使用条件,解法就简捷多了.

综合应用题

例 1 某单位决定投资 3200 元建一仓库(长方体形状),高度恒定,它的后墙利用旧墙不花钱,正面用铁栅,每米长造价 40 元,两侧墙砌砖,每米长造价 45 元,顶部每平方米造价 20 元.计算:仓库底面积的最大允许值是多少?为使面积达到最大,而实际投资又不超过预算,那么正面铁栅应设计为多长?

解析 设铁栅长为 x m,一堵砖墙长为 y m,

则有 $S=xy$,

由题意,得 $40x+2\times 45y+20xy=3200$.

应用二元均值不等式,得

$3200\geqslant 2\sqrt{40x\cdot 90y}+20xy=120\sqrt{xy}+20xy$,

即 $3200\geqslant 120\sqrt{S}+20S$.

$\therefore S+6\sqrt{S}\leqslant 160$,

即$(\sqrt{S}+16)(\sqrt{S}-10)\leqslant 0$.

$\because \sqrt{S}+16>0$,

$\therefore \sqrt{S}-10\leqslant 0$,即 $S\leqslant 100$.

因此,面积 S 的最大允许值为 100 m^2,取得此最大值的条件是 $40x=90y$ 且 $xy=100$,即 $x=15$.

故当铁栅长为 15 m 时,S 有最大值为 100 m^2.

例 2 有一种变压器,铁芯的截面为正十字型,如图 6-1 所示,为了保证所需的磁通量,需要一定的截面积.如果要求正十字的面积为 $4\sqrt{5}\,\mathrm{cm}^2$ 应如何设计正十字形的

长 y 与宽 x,才能使正十字形的外接圆周长最短(从而可使用来绕铁芯的铜线最省)?

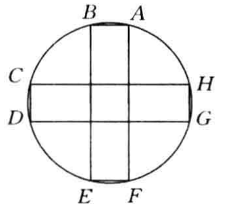


图 6 - 1

解析 如图 6 - 1 所示,设 $|AB|=x$,$|CH|=y$,圆直径为 d,则有 $2xy-x^2=4\sqrt{5}$,$\therefore y=\dfrac{4\sqrt{5}+x^2}{2x}$.

又 $\because d^2=x^2+y^2$

$$=x^2+\left(\frac{4\sqrt{5}+x^2}{2x}\right)^2$$

$$=2\sqrt{5}+\frac{5}{4}\left(x^2+\frac{16}{x^2}\right)\geqslant 2\sqrt{5}+10.$$

当且仅当 $x=2$,$y=\sqrt{5}+1$ 时,直径最短,从而周长最短,从而使用来绕铁芯的铜线量省.

评注 将正十字形的面积用 x,y 表示出来,同时要分析出圆的周长最短时,圆的直径最短,将求周长最短问题,转化为求直径最短问题.

例 3 如图 6 - 2 所示,设矩形 $ABCD(AB>AD)$ 的周长为 24,把它关于 AC 折起来,AB 折过去后,交 DC 与点 P. 设 $AB=x$,求 $\triangle ADP$ 的最大面积.

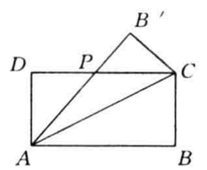


图 6 - 2

解析 $\because AB=x$,$\therefore AD=12-x$. 又 $DP=PB'$,$AP=AB'-PB'=AB-DP=x-DP$,由勾股定理得 $(12-x)^2+DP^2=(x-DP)^2$,

$\therefore DP=12-\dfrac{72}{x}$.

因此面积 $S=\dfrac{1}{2}AD\cdot DP=108-\left(6x+\dfrac{432}{x}\right)$.

$\because x>0$,$\therefore S=108-\left(6x+\dfrac{432}{x}\right)\leqslant 108-72\sqrt{2}$.

当且仅当 $x=6\sqrt{2}$时,S 有最大值 $108-72\sqrt{2}$.

创新题

例 题 **(创新题)**在某两个正数 x,y 之间,若插入一个正数 a,使 x,a,y 成等比数列;若另插入两个正数 b,c,使 x,b,c,y 成等差数列. 求证:$(a+1)^2\leqslant(b+1)(c+1)$.

证明 由题意得 $\begin{cases}a^2=xy,\\2b=x+c,\\2c=b+y;\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}a=\sqrt{xy},\\b=\dfrac{2x+y}{3},\\c=\dfrac{x+2y}{3}.\end{cases}$

故 $(b+1)(c+1)=bc+b+c+1$

$$=\frac{1}{9}(2x+y)(x+2y)+x+y+1$$

$$=\frac{1}{9}[2(x^2+y^2)+5xy]+x+y+1$$

$$\geqslant\frac{1}{9}(2\times 2xy+5xy)+2\sqrt{xy}+1$$

$$=(\sqrt{xy}+1)^2=(a+1)^2,$$

$\therefore (a+1)^2\leqslant(b+1)(c+1)$.

评注:题中的两个数列是通过 x,y 联系在一起的,因此我们可设法把 a,b,c 用 x,y 表示出来,以达到减元的目的,然后应用重要不等式进行证明.

6.2 同步测试

教材基础知识针对性训练●●●

一、选择题

1. 已知 $x>1$,$y>1$,且 $\lg x+\lg y=4$,则 $\lg x\cdot\lg y$ 的最大值是(A).

A. 4 B. 2 C. 1 D. $\dfrac{1}{4}$

2. 设 $a>0$,$b>0$,下列不等式中不成立的是(D).

A. $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\geqslant 2$ B. $a^2+b^2\geqslant 2ab$

C. $\dfrac{b^2}{a}+\dfrac{a^2}{b}\geqslant a+b$ D. $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\geqslant 2+\dfrac{2}{a+b}$

3. 设 $a,b\in\mathbf{R}^+$,若 $a+b=2$,则 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ 的最大值等于(C).

A. 1 B. 3 C. 2 D. 4

4. 若实数 a,b 满足 $a+b=2$,则 3^a+3^b 的最小值是(B).

A. 18 B. 6 C. $2\sqrt{3}$ D. $2\sqrt[4]{3}$

5. 函数 $f(x)=x+\dfrac{4}{x}+3$ 在 $(-\infty,-2]$ 上(D).

A. 无最大值,有最小值 7

B. 无最大值,有最小值 -1

C. 有最大值 7,有最小值 -1

D. 有最大值 -1,无最小值

6. 已知 $x\in\mathbf{R}^+$,下面各函数中,最小值为 2 的是(A).

A. $y=x+\dfrac{1}{x}$ B. $y=\sqrt{x^2+2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}}$

C. $y=x+\dfrac{16}{x}$ D. $y=x^2-2x+4$

7. 设 $M=\left(\dfrac{1}{a}-1\right)\left(\dfrac{1}{b}-1\right)\left(\dfrac{1}{c}-1\right)$,且 $a+b+c=1$,其中 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,则 M 的取值范围是(D).

A. $\left[0,\dfrac{1}{8}\right]$ B. $\left[\dfrac{1}{8},1\right]$

C. $[1,8]$ D. $[8,+\infty)$

8. 若 $a,b,c,d,x,y\in\mathbf{R}^+$,且 $x^2=a^2+b^2$,$y^2=c^2+d^2$,则下列不等式中正确的是( ).

A. $xy<ac+bd$ B. $xy\geqslant ac+bd$

C. $xy>ac+bd$　D. $xy\leqslant ac+bd$

9. 对一切正数 m,不等式 $n<\frac{4}{m}+2m^2$ 恒成立,则常数 n 的取值范围是(B).

A. $(-\infty,0)$　B. $(-\infty,6)$

C. $(6,+\infty)$　D. $[6,+\infty)$

10. 若 $a,b,c\in\mathbf{R}$,且 $ab+bc+ca=1$,则下列不等式成立的(B).

A. $a^2+b^2+c^2\geqslant 2$　B. $(a+b+c)^2\geqslant 3$

C. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 2\sqrt{3}$　D. $abc(a+b+c)\leqslant 3$

11. 已知 a,b 是不相等的正数,在 a,b 之间插入两组数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 和 $y_1,y_2,\cdots,y_n$,使 $a,x_1,x_2,\cdots,x_n,b$ 成等差数列,使 $a,y_1,y_2,\cdots,y_n,b$ 成等比数列,并给出下列不等式:

① $\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots x_n)>\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2$;

② $\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots x_n)>\frac{a+b}{2}$;

③ $\sqrt[n]{y_1y_2\cdots y_n}<\sqrt{ab}$;

④ $\sqrt[n]{y_1y_2\cdots y_n}<\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2$.

则其中为真命题的是(B).

A. ③　B. ①④　C. ②③　D. ②④

12. 某种汽车购车时费用为 10 万元,每年的保险、养路、汽油费用共 9 千元,汽车的维修费逐年以等差数列递增,第 1 年为 2 千元,第 2 年为 4 千元,第 3 年为 6 千元……问这种汽车使用(　)年后报废最合算(即汽车的平均费用为最低)

A. 8 年　B. 9 年　C. 10 年　D. 11 年

二、填空题

1. 若 $a,b\in\mathbf{R}^+$ 且 $a+b=1$,则 ab 的最大值是 $\frac{1}{4}$.

2. 已知 $a>b>c$,则 $\sqrt{(a-b)(b-c)}$ 与 $\frac{a-c}{2}$ 的大小关系是________.

$\sqrt{(a-b)(b-c)}\leq\frac{(a-b)+(b-c)}{2}=\frac{a-c}{2}$

3. 设 $a>b>c$ 且 $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\geqslant\frac{m}{a-c}$ 恒成立,则 m 的取值范围是 $m\leq 4$.

三、解答题

1. 一批救灾物资用 17 列火车以 v km/h 的速度匀速运往 400 km 外的灾区. 为了安全起见,两辆火车的间距不得小于 $\left(\frac{v}{20}\right)^2$ km,问这批物资全部运送到灾区最少需多少小时.

2. A 地产汽油,B 地的汽油需从 A 地运入,汽车从 A 地运汽油往 B 地,往返的油耗正好等于其满载汽油的吨数,故无法将汽油直接运至 B 地. 为解决问题,在途中 C 处设一油库中间站,先由往返于 A,C 间的汽车将油运至 C 地,再由往返于 C,B 间的汽车将油运至 B 地. C 站设在何处时,运油率最大,最大为多少?〔运油率$=$(B 地收到的汽油量)$\div$(A 地运出的汽油量)〕

3. 证明:任何面积等于 1 的凸四边形的周长及两条对角线的长度之和不小于 $4+2\sqrt{2}$.

4. 如果△ABC 三内角满足:$\sin^2A+\sin^2B=5\sin^2C$,求证:$\sin C\leqslant\frac{3}{5}$.

5. 如图 6-3,为处理含有某中杂质的污水,要制造一底宽为 2 m 的无盖长方体沉淀箱,污水从 A 孔流入,经过沉淀后从 B 孔流出. 设箱体的长度为 a m,高度为 b m,已知流水中含杂质的质量分数与 a,b 的乘积 ab 成反比. 现有材料 60 m²,问:当 a,b 各为多少米时,经沉淀后流出的水中该杂质的质量最小(A,B 两孔的面积忽略不计)?

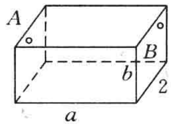


图 6-3

探究应用拓展性训练●●●

1. (**学科内综合题**)设 $a>0$ 且 $a\neq 1,t>0$,试比较 $\frac{1}{2}\log_a t$ 与 $\log_a\frac{t+1}{2}$ 的大小.

2. (**开放题**)已知关于 x 的方程 $\log_a(x-3)=-1+\log_a(x+2)+\log_a(x-1)$ 有实根,求实数 a 的取值范围.

3. (**与现实生活联系应用题**)设计一幅宣传画,要求画面面积为 4840 cm²,画面的宽与高的比为 $\lambda(\lambda<1)$,画面的上、下各留 8 cm 空白,左右留 5 cm 空白,怎样确定画面的高与宽尺寸,能使宣传画所用纸张面积最小?

4. (**与现实生活联系的应用题**)某工厂要建造一个长方体无盖贮水池,其容积为 4800 m³,深为 3 m,如果池底每 1 m² 的造价为 150 元,池壁每 1 m² 的造价为 120 元,那么怎样设计水池能使造价最低?最低总造价是多少元?

5. (**创新题**)正三角形 ABC 的边长是 2,P,Q 分另在 AB,AC 上运动,且线段 PQ 将△ABC 的面积二等分,求线段 PQ 长的取值范围.

6. (**创新题**)设集合 $A=\{(x,y)\mid y=x^2+ax+2\}$,$B=\{(x,y)\mid y=x+1,0\leqslant x\leqslant 2\}$,$A\cap B\neq\varnothing$,求实数 a 的取值范围.

7. (**创新题**)设 a,b,c 是三角形的三边长,求证:$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geqslant 3$.

8. (**探究题**)某收购站分两个等级收购小麦,一等小麦每千克为 a 元,二等小麦每千克为 $b(b<a)$ 元,现有一等品小麦 x kg,二等品小麦 y kg,若以两种价格的平均数收购,是否公平合理?

9. (**探究题**)某种饮料分两次提价,提价方案有三种,方案甲:第一次提价 $m\%$,第二次提价 $n\%$;方案乙:第一次提价 $n\%$,第二次提价 $m\%$;方案丙:每次都提价 $\frac{m+n}{2}\%$. 如果 $m>n>0$,那么提价最多的方案是哪一种?

10. (**与现实生活联系的应用题**)一家皮鞋零售店,平均每天售出皮鞋 3 双,已知每双皮鞋的批发价 46 元,运费 1 元,零售价 100 元,一双皮鞋在商店保存一天的费用为 0.28 元,订货一次的组织费为 200 元. 批发的包装为每箱 18 双,以整箱批发,这家皮鞋店应采用何种订货策略,可使获利最大?

11.（探究题）某公司每年需要某种计算机元件 8000 个，在一年内连续作业组装成整机卖出（每天需同样多的元件用于组装，并随时运出整机至市场），该元件从外部进货，每次（不论购买多少件）须花手续费 500 元．如一次进货可少花手续费，但 8000 个元件的保管费很可观；如果多次进货，手续费多了，但可节省保管费．请你帮该公司出个主意，每年进货几次为宜．该公司的库存保管费可按下述方法计算：每个元件每年 2 元，并可按比例折算成更短的时间：如每个元件保管一天的费用为 $\frac{2}{360}$ 元（一年按 360 天计算），每个元件的买价、运输费及其他费用假设为一常数．

6.3 不等式的证明

重点知识讲解

1. 重点：比法法、综合法证明不等式

（1）比较法分比差法与比商法，其中比差法是证明不等式的最基本、最常用的方法，它的依据是不等式性质．

其步骤是“作差（商）→变形→判断”，变形的目的是为了判断．若是作差，就判断与 0 的大小关系；若是作商，两边为正，就判断与 1 的大小关系．

（2）综合法就是“由因导果”．从已知不等式出发，不断用必要条件换前面的不等式，直至推出要证的结论．

2. 难点：分析法、放缩法证明不等式

（1）分析法是“执果索因”，步步寻求上一步成立的充分条件，它与综合法是对立统一的两种方法，用分析法证题的逻辑关系是 $B\Leftarrow B_1\Leftarrow B_2\cdots B_n\Leftarrow A$．

（2）放缩法是将不等式一边利用不等式性质适当放大或缩小，从而证明不等式的方法，要想用好它，必须明确目标，目标可以从要证的结论中寻求．

典型例题

例 1 设 $a>0,b>0$，求证：$\left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac12}+\left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac12}\geqslant a^{\frac12}+b^{\frac12}$．

证法一 左边－右边 $=\frac{(\sqrt a)^3+(\sqrt b)^3}{\sqrt{ab}}-(\sqrt a+\sqrt b)$

$=\frac{(\sqrt a+\sqrt b)(a-\sqrt{ab}+b)-\sqrt{ab}(\sqrt a+\sqrt b)}{\sqrt{ab}}$

$=\frac{(\sqrt a+\sqrt b)(a-2\sqrt{ab}+b)}{\sqrt{ab}}$

$=\frac{(\sqrt a+\sqrt b)(\sqrt a-\sqrt b)^2}{\sqrt{ab}}\geqslant 0$，

∴原不等式成立．

证法二 ∵左边>0，右边>0，

∴ $\frac{左边}{右边}=\frac{(\sqrt a+\sqrt b)(a-\sqrt{ab}+b)}{\sqrt{ab}(\sqrt a+\sqrt b)}=\frac{a-\sqrt{ab}+b}{\sqrt{ab}}\geqslant\frac{2\sqrt{ab}-\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}=1$，

∴原不等式成立．

评注 用比较法证明不等式，一般要经历作差（或商）、变形、判断三个步骤，变形的主要手段是通分、因式分解或配方，在变形过程中，也可利用基本不等式放缩，如证法二．

例 2 已知 a,b,c 为不等正数，且 $abc=1$，求证：$\sqrt a+\sqrt b+\sqrt c<\frac1a+\frac1b+\frac1c$．

证法一 ∵a,b,c 是不等正数，且 $abc=1$，

∴$\sqrt a+\sqrt b+\sqrt c=\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ac}}+\frac{1}{\sqrt{ab}}$

$<\frac{\frac1b+\frac1c}{2}+\frac{\frac1a+\frac1c}{2}+\frac{\frac1a+\frac1b}{2}$

$=\frac1a+\frac1b+\frac1c$．

证法二 ∵a,b,c 为不等正数，且 $abc=1$，

∴$\frac1a+\frac1b+\frac1c=bc+ca+ab$

$=\frac{bc+ca}{2}+\frac{bc+ab}{2}+\frac{ca+ab}{2}$

$>\sqrt{abc^2}+\sqrt{ab^2c}+\sqrt{a^2bc}$

$=\sqrt a+\sqrt b+\sqrt c$．

评注 利用综合法由因导果证明不等式，要揭示条件与结论间的因果关系及不等式两端的差异与联系．

例 3 设实数 x,y 满足 $y+x^2=0$，$0<a<1$，求证：$\log_a(a^x+a^y)\leqslant\log_a 2+\frac18$．

证明 要证原不等式成立，

只要证 $\log_a(a^x+a^y)\leqslant\log_a(2a^{\frac18})$．

∵$0<a<1$，

只要证 $a^x+a^y\geqslant 2a^{\frac18}$．（*）

∵$y=-x^2$，

∴$a^x+a^y=a^x+a^{-x^2}$

$\geqslant 2\sqrt{a^{-x^2}\cdot a^x}=2\sqrt{a^{-(x-\frac12)^2+\frac14}}$

$\geqslant 2\sqrt{a^{\frac14}}=2a^{\frac18}$．