普通高等教育“十二五”规划教材

线性代数

崔克俭　方桂英　主编

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

线性代数

崔克俭　方桂英　主编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本教材以线性方程组为主线，以矩阵为主要研究对象，详尽地介绍线性代数的基本理论和方法，同时通过例题将数学建模的思想融入到教材中.

本教材介绍线性代数的基本理论和方法，主要内容有：矩阵及行列式、向量与线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、相似矩阵及矩阵的对角化问题、二次型、线性变换与线性空间和 MATLAB 软件的应用. 其中线性变换与线性空间可作为选学内容.

本书可作为高等院校非数学类专业的使用教材和教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/崔克俭，方桂英主编. —北京：科学出版社，2013.11
普通高等教育"十二五"规划教材
ISBN 978-7-03-039036-3

I. ①线… II. ①崔… ②方… III. ①线性代数-高等学校-教材
IV. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 259036 号

责任编辑：张中兴 周金权／责任校对：宣 慧
责任印制：阎 磊／封面设计：迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京市文林印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2013 年 11 月第 一 版 开本：720×1000 B5
2013 年 11 月第一次印刷 印张：10 1/2
字数：210 000

定价：23.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

编 委 会

主　编　崔克俭(山西农业大学)
　　　　方桂英(江西农业大学)
副主编　吴　坚(安徽农业大学)
　　　　侯建文(山西农业大学)
　　　　赵喜梅(山西农业大学)
　　　　曾海富(江西农业大学)
编　者　王福贵(山西农业大学)
　　　　吴春蕾(山西农业大学)
　　　　宋　彦(山西农业大学)
　　　　安丽霞(山西农业大学)
　　　　程国华(江西农业大学)
审　稿　张青娥(山西农业大学)

前　言

线性代数是一门重要的数学基础课程，是许多的数学分支不可或缺的工具，同时在工程技术各个领域具有重要的应用. 21 世纪计算机技术日新月异的发展，为线性代数的应用提供了良好的平台，同时也对线性代数的理论提出了新的要求. 编写一本理论体系完整，又能将理论和应用较好地统一的教材是我们多年的愿望.

本教材的编写紧紧围绕高等院校线性代数教学大纲，并结合作者多年的教学研究成果. 教材以线性方程组为主线，以矩阵为主要研究对象，详尽地介绍线性代数的基本理论和方法. 在教材的编写中我们力求做到以下三点：一是在理论构架上既注意体系的完整性、科学性，同时又注意理论在工程技术领域的应用，使理论和实际有机结合；二是在文字叙述上，力求通俗易懂、循序渐进，在每章的开头以提出问题或列举实例的方法引入概念；三是将数学建模的思想融入到教材中，培养同学们用数学知识解决实际问题的能力.

本教材每章配有习题，题型包括选择题、填空题、计算题、证明题、综合题. 书末附有习题简答.

本教材由山西农业大学、江西农业大学、安徽农业大学联合编写. 最后由崔克俭、方桂英统一定稿.

山西农业大学的张青娥教授仔细审阅了全书，并提出了宝贵的建议，在此表示感谢.

最后，对科学出版社为本书的顺利出版所付出的辛勤劳动表示衷心的感谢.

编　者

2013 年 5 月 1 日

目　录

第 1 章　矩阵及行列式

矩阵是线性代数研究的主要对象和重要工具，矩阵的引入，不仅推动了线性代数及其他数学分支理论的发展，而且在工业、农业、经济、物理学、生物学、遗传学等领域有广泛的应用，成为解决线性问题的有力工具.

1.1　矩阵及其运算

1.1.1　矩阵的概念

定义 1.1　由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成 m 行 n 列的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

称为一个 m 行 n 列矩阵，简称 $m\times n$ 矩阵，通常用大写字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\cdots$ 等表示，可记作 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$，$(a_{ij})_{m\times n}$ 或简记作 $\boldsymbol{A}$，(a_{ij}). a_{ij} 称为这个矩阵的**第 i 行第 j 列的元素**，简称为该矩阵的 (i,j) 元，下标 i,j 分别称为元素 a_{ij} 的**行标和列标**.

元素是实数的矩阵称为**实矩阵**，元素是复数的矩阵称为**复矩阵**，本书中的矩阵除特别说明外，均指实矩阵.

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的行数相等，列数也相等，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 为**同型矩阵**.

若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵且对应元素都相等，即

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n},\quad \boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n},\quad 且$$

$$a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n),$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 为**相等矩阵**，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

只有一行的矩阵

$$\boldsymbol{A}=(a_1\ a_2\cdots a_n)$$

称为**行矩阵**，又称为**行向量**. 为避免元素间的混淆，行矩阵也记作

$$\boldsymbol{A}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

只有一列的矩阵

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

称为**列矩阵**,又称为**列向量**.

行数与列数都等于 n 的矩阵称为 n **阶矩阵**或 n **阶方阵**,可记作 $\boldsymbol{A}_n$,即

$$\boldsymbol{A}_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A}_n$ 的左上角到右下角元素的连线称为**主对角线**,左下角到右上角元素的连线称为**副对角线**.

下面介绍几种特殊矩阵.

1. 零矩阵

所有元素均为 0 的矩阵,称为**零矩阵**,记作 $\boldsymbol{O}$. 不同型的零矩阵不相等.

2. 对角阵

非主对角线元素全为零的 n 阶方阵

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

称为**对角阵**,记作 $\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$.

3. 单位阵

主对角线上的元素都是 1 的 n 阶对角矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

称为 n 阶**单位阵**,记作 $\boldsymbol{I}_n$ 或 $\boldsymbol{I}$,或记作 $\boldsymbol{E}_n$ 或 $\boldsymbol{E}$.

主对角线上的元素都是 a 的 n 阶对角矩阵

$$\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix}$$

称为 n 阶**数量阵**或**纯量阵**，记作 $a\boldsymbol{I}_n$ 或 $a\boldsymbol{I}$. 单位阵和数量阵是对角阵的特例.

4. 三角阵

主对角线一侧的所有元素都为零的方阵称为**三角阵**. 三角阵有两种

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad 或 \quad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

分别称为**上三角阵**和**下三角阵**.

1.1.2　矩阵的运算及性质

1. 矩阵的加法

定义 1.2　设矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{m\times n}$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的**和矩阵**记为 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$，规定为

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

只有同型矩阵才能进行加法运算.

矩阵加法满足下列运算律(设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 都是同型矩阵)：

(1) $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$；

(2) $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})$.

设矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$，记

$$-\boldsymbol{A} = (-a_{ij}),$$

$-\boldsymbol{A}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**负矩阵**，显然有

$$\boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{O},$$

由此规定**矩阵的减法**为

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{B}).$$

2. 数乘矩阵

定义 1.3 数 λ 与矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 的乘积记为 $\lambda\boldsymbol{A}$，简称**数乘矩阵**，规定为

$$\lambda\boldsymbol{A}=(\lambda a_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix}\lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n}\\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn}\end{pmatrix}.$$

数乘矩阵满足下列运算律(设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵，λ,μ 为常数)：

(1) $(\lambda\mu)\boldsymbol{A}=\lambda(\mu\boldsymbol{A})$；

(2) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$；

(3) $\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$；

(4) $1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$.

矩阵加法和数乘矩阵两种运算统称为**矩阵的线性运算**.

3. 矩阵的乘法

定义 1.4 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的**乘积矩阵**记为 $\boldsymbol{AB}$，规定为 $\boldsymbol{AB}=(c_{ij})_{m\times n}$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}\,(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n).$$

两个矩阵相乘的前提条件是：左矩阵的列数等于右矩阵的行数. 积矩阵的行数等于左矩阵的行数，列数等于右矩阵的列数.

例 1.1 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ -1 & 4 & 3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$.

解 由题意，$\boldsymbol{A}$ 是 2×3 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 3×3 矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的列数等于 $\boldsymbol{B}$ 的行数，故 $\boldsymbol{AB}$ 为一个 2×3 矩阵，且

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}2 & 6 & 1\\ -1 & 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 6 & 5\\ -1 & 4 & 1\end{pmatrix}.$$

由于 $\boldsymbol{B}$ 的列数不等于 $\boldsymbol{A}$ 的行数，故 $\boldsymbol{BA}$ 无意义.

例 1.2 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$.

解　由题意，$\boldsymbol{A}$ 是 $1\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times 1$ 矩阵，故 $\boldsymbol{AB}$ 为一个 1×1 矩阵(即一个数)，$\boldsymbol{BA}$ 为一个 $n\times n$ 矩阵，且

$$\boldsymbol{AB}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n,$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\begin{pmatrix}b_1a_1&b_1a_2&\cdots&b_1a_n\\b_2a_1&b_2a_2&\cdots&b_2a_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_na_1&b_na_2&\cdots&b_na_n\end{pmatrix}.$$

例 1.1 和例 1.2 表明，当 $\boldsymbol{AB}$ 有意义时，$\boldsymbol{BA}$ 不一定有意义. 即使 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 都有意义，两者也未必相等，即一般有 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$. 因此，矩阵乘法不满足交换律，故也称 $\boldsymbol{AB}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 左乘 $\boldsymbol{B}$ 或 $\boldsymbol{B}$ 右乘 $\boldsymbol{A}$.

若两个 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则称方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **可交换**. 数量阵(包括单位阵)与同阶的任何方阵均可交换，即 $(\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{I})=\lambda\boldsymbol{A}$，其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{I}$ 均为 n 阶的. 可见，数量阵 $\lambda\boldsymbol{I}$ 在矩阵乘法中所起的作用如同数 λ 乘以矩阵.

例1.3　设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&4\\1&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&-2\\-1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}-2&6\\1&-3\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{AC}$.

解　由题意，有

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}2&4\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-2\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{AC}=\begin{pmatrix}2&4\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&6\\1&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

例 1.3 表明，当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 时，不一定能推出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$. 当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$ 且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 时，不一定能推出 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

矩阵乘法满足下列运算规律(以下假设运算都有意义)：

(1) $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$；

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$，$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{CA}+\boldsymbol{CB}$；

(3) $\lambda(\boldsymbol{AB})=(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})$ (λ 是常数)；

(4) $\boldsymbol{AI}=\boldsymbol{IA}=\boldsymbol{A}$；

(5) $\boldsymbol{AO}=\boldsymbol{OA}=\boldsymbol{O}$.

根据矩阵乘法的定义，易得：同阶对角阵相乘等于主对角线上的对应元素相乘，即

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1b_1 & & & \\ & a_2b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_nb_n \end{pmatrix}.$$

同样地,上三角阵的乘积仍是上三角阵,下三角阵的乘积仍是下三角阵.

对于线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \qquad\qquad\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases}$$

若令

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

则上述线性方程组可写成矩阵方程

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta},$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 称为线性方程组的**系数矩阵**.

4. 方阵的幂

定义 1.5 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵,$k(k>0)$ 个 $\boldsymbol{A}$ 连乘称为 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次幂,记作 $\boldsymbol{A}^k$,即

$$\boldsymbol{A}^k=\underbrace{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\cdots\cdot\boldsymbol{A}}_{k\text{个}}.$$

当 $k=0$ 时,规定 $\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{I}$. 方阵的幂满足

(1) $\boldsymbol{A}^k\cdot\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{A}^{k+l}$;

(2) $(\boldsymbol{A}^k)^l=\boldsymbol{A}^{kl}$.

因矩阵乘法不满足交换律,故一般 $(\boldsymbol{AB})^k\neq\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$. 只有当 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵且可交换时,才有 $(\boldsymbol{AB})^k=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$, $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})$,$(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2\pm 2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$ 等成立.

例 1.4 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PQ}$, $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{Q}=(2\quad -1\quad 2)$,求 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}^{100}$.

解 由题意,有

$$A = PQ = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} (2 \quad -1 \quad 2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

由于 $QP = (2 \quad -1 \quad 2)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$，故

$$A^{100} = \underbrace{(PQ)\cdot(PQ)\cdot\cdots\cdot(PQ)}_{100\text{个}} = P\cdot\underbrace{(QP)\cdot(QP)\cdot\cdots\cdot(QP)}_{99\text{个}}\cdot Q$$

$$= 2^{99}\cdot(PQ) = 2^{99}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

例 1.4 表明，在矩阵乘法和幂的运算中，巧妙地使用矩阵乘法的结合律，可简化计算.

对于对角阵 $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$，有 $A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$.

在定义了数乘矩阵和方阵的幂之后，下面简单给出方阵的多项式的概念.

设 $f(x) = a_s x^s + a_{s-1} x^{s-1} + \cdots + a_1 x + a_0$，$A$ 为 n 阶方阵，定义

$$f(A) = a_s A^s + a_{s-1} A^{s-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I$$

为**方阵 A 的多项式**. 其中，I 是与 A 同阶的单位阵.

5. 矩阵的转置

定义 1.6　将 $m \times n$ 矩阵 A 的同序数的行、列互换所得 $n \times m$ 矩阵，称为 A 的**转置矩阵**，记为 A^{T}（或 A'）.

例如，行矩阵的转置是列矩阵，矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 的转置矩阵为 $A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

矩阵的转置满足如下运算律：

(1) $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$；

(2) $(A + B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$；

(3) $(\lambda A)^{\mathrm{T}} = \lambda A^{\mathrm{T}}$；

(4) $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}$.

规律(4)还可推广到有限多个矩阵乘积转置的情形,即

$$(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_s)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{s-1}^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{A}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}.$$

定义 1.7 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵且 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$,称 $\boldsymbol{A}$ 为**对称阵**;若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$,称 $\boldsymbol{A}$ 为**反对称阵**.

例如,矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&-2&5\\3&5&4\end{pmatrix}$ 是一个对称阵,矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&-1&3\\1&0&5\\-3&-5&0\end{pmatrix}$ 是一个反对称阵.

由定义 1.7,对称阵关于主对角线对称的元素相等,即 $a_{ij}=a_{ji}$;反对称阵主对角线上的元素全为 0,且关于主对角线对称的元素互为相反数,即 $a_{ij}=-a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$.

例 1.5 设列矩阵 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 满足 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=1$,$\boldsymbol{I}$ 为 n 阶单位阵,$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$,证明 $\boldsymbol{H}$ 是对称阵且 $\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}$.

证 由题意,有

$$\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}^{\mathrm{T}}-2(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{H},$$

所以 $\boldsymbol{H}$ 是对称阵,且

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}&=\boldsymbol{H}^2=(\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}})^2=\boldsymbol{I}-4\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}+4(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}})\\&=\boldsymbol{I}-4\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}+4\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}.\end{aligned}$$

1.2 分块矩阵及其运算

1.2.1 分块矩阵的概念

对于行数和列数较大或一些结构特殊的矩阵 $\boldsymbol{A}$,运算时常采用**分块法**,使大矩阵的运算化成小矩阵的运算.将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 用若干条纵线和横线分成许多个小矩阵,每一个小矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的**子块**,以子块为元素的形式上的矩阵称为**分块矩阵**.

例如,将 3×4 矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{pmatrix}$$

分成子块的分法很多,下面举出一种分块形式

$$\left(\begin{array}{cc:cc}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\\hdashline a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{array}\right),\quad 记作\ \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\boldsymbol{A}_{12}\\\boldsymbol{A}_{21}&\boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_{11}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}_{12}=\begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}_{21}=(a_{31} \quad a_{32})$，$\boldsymbol{A}_{22}=(a_{33} \quad a_{34})$，即矩阵 $\boldsymbol{A}_{11}$，$\boldsymbol{A}_{12}$，$\boldsymbol{A}_{21}$，$\boldsymbol{A}_{22}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的子块，$\boldsymbol{A}$ 是以这些子块为元素的分块矩阵.

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，若 $\boldsymbol{A}$ 的分块矩阵在非主对角线上皆为零子块，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2 & \cdots & \boldsymbol{O} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{A}_s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_i(i=1,2,\cdots,s)$ 是方阵，称 $\boldsymbol{A}$ 为**分块对角阵**或**准对角阵**.对角阵为准对角阵的特例.

例如，矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_3 \end{pmatrix}$ 为一个分块对角阵，其中，$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}_3=(5)$.

1.2.2　分块矩阵的运算

分块矩阵的运算与普通矩阵的运算类似.

1. 加法

设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 均为同型矩阵，采用相同的分块方法，有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1s} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{r1} & \boldsymbol{A}_{r2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{rs} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1s} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} & \cdots & \boldsymbol{B}_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{B}_{r1} & \boldsymbol{B}_{r2} & \cdots & \boldsymbol{B}_{rs} \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 与 $\boldsymbol{B}_{ij}$ 也均为同型矩阵，则**分块矩阵的加法**定义为

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}+\boldsymbol{B}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1s}+\boldsymbol{B}_{1s} \\ \boldsymbol{A}_{21}+\boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}+\boldsymbol{B}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2s}+\boldsymbol{B}_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{r1}+\boldsymbol{B}_{r1} & \boldsymbol{A}_{r2}+\boldsymbol{B}_{r2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{rs}+\boldsymbol{B}_{rs} \end{pmatrix}.$$