



高等学校现代统计学系列教材

统计学中的 矩阵代数

方开泰 陈 敏

**Matrix Algebra in
Statistics**



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

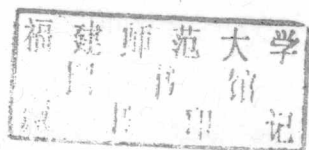
高等学校现代统计学系列教材

Matrix Algebra in Statistics

统计学中的矩阵代数

Tongjixue zhong de Juzhen Daishu

方开泰 陈 敏



1094217



T1094217



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容简介

本书涵盖了学习统计学所需要的矩阵代数的基础理论与基本方法,在系统介绍基本原理的基础上,特别强调了有关内容在统计学中的实际应用。为了便于学生的学习与应用,本书还在每一章末介绍了所需的MAT-LAB指令。

本书可作为统计学专业本科高年级学生和研究生教材或参考书,亦可作为相关科技工作者的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

统计学中的矩阵代数 / 方开泰,陈敏编. - 北京:高等教育出版社,2013. 3

ISBN 978 - 7 - 04 - 036788 - 1

I. ①统… II. ①方…②陈… III. ①线性变换环 - 高等学校 - 教材 IV. ①O153. 3

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 009119 号

策划编辑 张晓丽
插图绘制 郝林

责任编辑 张晓丽
责任校对 李大鹏

封面设计 赵阳
责任印制 朱学忠

版式设计 余杨

出版发行 高等教育出版社
社址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印刷 天津新华二印刷有限公司
开本 787mm×960mm 1/16
印张 12.75
字数 230千字
购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598
网址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
版次 2013年3月第1版
印次 2013年3月第1次印刷
定价 22.10元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物料号 36788-00

高等学校现代统计学系列教材编委会

(按姓氏笔画排序)

主 编：方开泰

副主编：史宁中 何书元 陈 敏 耿 直

编 委：马 洪 方开泰 史宁中 杨 虎 何书元 何晓群
张爱军 张崇岐 陈 敏 郑 明 赵彦云 耿 直
曾五一 缪柏其

总 序

统计学是一门收集、整理和分析数据的科学和艺术。这里的“数据”泛指“信息的载体”，涵盖了大千世界中的文本、图像、视频、时空数据、基因数据等。统计学是一个独立的学科，在历史上曾隶属于数学，但统计学与数学有着本质的区别，因此统计学教育有其自身的特点和要求，这些特点表现为：(1) 统计学研究的是随机现象，而数学研究的是确定性的规律；(2) 统计学是一门应用性很强的学科，许多概念和原理来自于实际的需要，不是数理逻辑的产物；(3) 数据在统计学中扮演了重要的角色。目前，统计学已被列为一级学科。

在过去的 30 年中，随着生命科学、信息科学、物质科学、资源环境、认知科学、工程技术、经济金融和人文科学等众多学科的发展，产生了许多新的统计学分支，如风险管理、数据挖掘、基因芯片分析等。此外，计算机及其有关软件在统计教育和应用中扮演了越来越重要的角色，它们提供了越来越多的图形表达和分析的方法，使得许多原来教科书中重要的内容，现在已变得无足轻重。统计教育必须要改革才能适应高速发展的形势。

大学的统计教育可分为两大类，一类是非统计学专业的课程，另一类是统计学专业的教学设计。非统计学专业的学生学习统计的目的是为了应用，在大学阶段，课程不多，主要是学习基础的统计概念和方法，学会使用统计软件，培养其解决实际问题的能力。统计学专业的课程设置十分重要，应向国际靠拢，对教师队伍的要求也较高。虽然这两类学生的教育有很多共同点，但在课程设置中必须加以区分。

我国的统计教育在过去受苏联的影响很深，把统计学作为数学的一个分支，在内容上偏理论，少应用，过于强调概率论在统计中的作用。统计学是一门应用性很强的学科，应从实际问题、从数据出发，通过统计的工具来揭示数据内部的规律。用“建模”的思路来教统计，使学生能更加容易理解统计的概念和方法，知道如何将实际问题抽象为统计模型，反过来又指导实践。对非统计学专业的学生，要强调统计的应用。学生要能熟练地使用至少一个统计软件包。对于统计学专业的学生，要培养学生对实际问题的建模能力。有些实际问题可直接应用现有的统计方法来解决，如问卷调查的统计分析。有些问题在初次接触时并不像一个统计问题，必须有坚实的统计基础和对实际问题的洞察力，才能从中发掘出统计模型。要培养学生的这种能力及统计思想（统计思想是统计

文化的一部分,是用统计学的逻辑思考问题)。教师在授课中要结合较多的应用例子,要求学生做案例研究,鼓励学生参加建模比赛,参加企业的实际项目。

为满足我国统计教育发展的需要,我们计划编写一套面向高校本科生、特别是一般院校,适用于统计学专业和非统计学专业的系列教材。系列教材的编写宗旨是:突出教学内容的现代化,重视统计思想的介绍,适应现代统计教育的特点及时代发展的新要求;以统计软件为支撑,注重统计知识的应用;内容简明扼要,生动活泼,通俗易懂。编写原则为:(1)从数据出发,不是从假设、定理出发;(2)从归纳出发,不是从演绎出发;(3)强调案例分析;(4)重统计思想的阐述,弱化数学证明的推导。系列教材分为两个方向,一个面对统计学专业,另一个面对非统计学专业和应用统计工作者。

高等学校现代统计学系列教材是适应形势的要求,由高等教育出版社邀请专家组成“高等学校现代统计学系列教材编委会”负责选题、审稿,由高等教育出版社出版。

以上是我们编写这套教材的背景和理念,希望得到读者的支持,特别是高校领导和教学一线的教师的支持。我们希望使用这套教材的师生和读者多提宝贵意见,使教材不断完善。

高等学校现代统计学系列教材编委会

前言

统计学的发展需要许多数学的工具,如微积分、高等代数、实变函数、测度论、泛函分析、概率论、群论、数论等。其中矩阵代数在统计学的发展中起到了举足轻重的作用。一组数据可以表成一个矩阵,矩阵的列表示某个变量的值,矩阵的行表示样本观测值。在数据分析中,例如求样本均值、标准差、相关系数等均可通过数据矩阵及适当的矩阵运算求得。回归分析和方差分析是统计学的重要组成部分,其中最小二乘估计需要矩阵变量的微商、矩阵求逆;在有关统计假设检验中,需要二次型、正定和非负定矩阵以及投影矩阵的知识。在多元统计分析中,需要数据中心化,矩阵的二次型,它的特征值和特征向量。在主成分分析中,矩阵的奇异值分解十分有用。矩阵的其他因子分解如谱分解、三角分解、正交三角分解等在统计学的理论和统计计算中也十分有用。为了导出假设检验统计量的分布,计算矩阵变换的雅可比行列式是关键,尤其是求多元统计检验统计量的零分布时,求雅可比行列式需要高超的矩阵代数的计算技巧。我国现代概率统计学家许宝騄先生在这方面做出了卓越的贡献。

20 世纪七八十年代发展起来的矩阵拉直运算,将矩阵拉成一个向量,反之,一个维数合适的向量也可以分段表成一个矩阵。通过矩阵的拉直运算和克罗内克乘积,可以将矩阵的问题化为向量的问题,反之,将向量的表达化为矩阵表达,从而在矩阵和向量之间建立了一个桥梁。这些技巧在统计学的理论研究中起着重要作用。

虽然统计学专业的大学生都学习了“高等代数”“线性代数”一类的课程,但所学知识不足以全部覆盖统计学中需要的矩阵代数知识。为此,许多“回归分析”“线性模型”和“多元统计分析”的教科书中,作者常常加一章(或附录)矩阵代数,以方便教和学的需要。为了更加方便教学,高等学校现代统计学系列教材编委会决定,在这套系列教材中,撰写一本《统计学中的矩阵代数》,作为教学参考书或教科书,该书系统地介绍统计学中需要的矩阵代数知识。统计学需要的矩阵代数知识十分广泛,本书不可能无所不包,我们选取相对比较基础和重要的内容。本书没有对所列的性质一一加以证明,以强调概念的理解和应用。没有证明的定理和性质,我们给出参考文献。

计算软件 MATLAB 是 Matrix Laboratory(矩阵实验室)的缩写,是学习矩阵代数的一个有用的工具,使学生对矩阵代数的概念和理论看得见、摸得到,看起来像一个高级玩具,对学生进一步的学术发展也很有帮助。本书每章的最

后一节,介绍在本章需要的 MATLAB 的指令。

本书共分六章,第一章介绍矩阵和向量的基本运算、矩阵的数字特征、线性空间、特征值和特征向量等,这些知识大部分可以在现有“线性代数”的教科书中找到。第二章着重介绍在统计学中经常需要的一些方阵,如置换矩阵、正交矩阵、三角形矩阵、对称矩阵、正定和非负定矩阵以及二次型。第三章讨论矩阵的因子分解,包括谱分解、LU 分解、QR 分解、楚列斯基分解、奇异值分解等。第四章介绍近代发展的矩阵运算,包括矩阵的广义逆、矩阵的克罗内克乘积、矩阵的拉直运算以及有关的应用。第五章介绍矩阵函数对向量或矩阵的微商,矩阵的变换及其雅可比行列式,以及在统计中的应用。第六章介绍随机矩阵及它们的均值、协方差等,这一章的内容是为统计专业学生特别设计的。

本书涉及的内容比较广泛,不能对每个结论都给出证明。许多证明可以在现有的教科书中找到。我们有选择地给出部分定理或结论的证明,或不证明但给出文献。本书参照了许多线性代数或矩阵代数的教科书,特别是参考了许多统计专著中有关矩阵代数的章节,如 Anderson(2003), Lay(1994), Johnson and Wichern(2007), Seber(1977), Muirhead(1982), Graham(1982), Fang and Zhang(1990), 张尧庭, 方开泰 (1982), 王松桂, 陈敏, 陈立萍 (1999) 等。此外我们还参考了北京师范大学—香港浸会大学联合国国际学院的同事叶华军和汪芹的教案。

本书可以作为统计学专业本科和研究生的教科书或参考书,亦可作为非统计学专业学生的教学参考书,后者可有选择地阅读,同时可忽略理论证明。

我们十分感谢高等教育出版社数学分社马丽社长和李蕊编辑等的大力支持以及高效率的工作。感谢东南大学韦博成教授、华东师范大学王静龙教授提出的宝贵意见,北京理工大学珠海分校孙洪波教授的支持。感谢海南师范大学统计系汪文俊讲师的帮助,将手稿输入到 Latex 系统中。本书作者方开泰感谢 BNU-HKBU 联合国国际学院提供了良好的工作环境,感谢中国科学院奖励经费的支持。本书作者陈敏感谢中国科学院数学与系统科学研究院的支持。两位作者特别感谢家人的理解和支持。

方开泰 北京师范大学—香港浸会大学联合国国际学院,
中国科学院数学与系统科学研究院, ktfang@hkbu.edu.hk
陈敏 中国科学院数学与系统科学研究院, mchen@amss.ac.cn

目 录

第一章 矩阵和向量	1
1.1 数据和矩阵	1
习题	5
1.2 矩阵的代数运算	6
习题	11
1.3 向量	13
1.3.1 向量的代数运算	13
1.3.2 向量的内积	14
1.3.3 向量的标准化	15
1.3.4 向量的夹角	16
习题	18
1.4 线性空间和线性变换	19
1.4.1 线性空间	19
1.4.2 线性变换	23
习题	27
1.5 矩阵的秩	29
习题	31
1.6 行列式	31
习题	35
1.7 逆矩阵和线性方程组	37
1.7.1 线性方程组的解	37
1.7.2 解线性方程组——高斯消去法	39
1.7.3 消去变换	41
1.7.4 伴随矩阵和克拉默法则	42
1.7.5 初等矩阵	43
1.7.6 行阶梯形矩阵	46
习题	48
1.8 分块矩阵	49
1.8.1 分块矩阵的代数运算	49
1.8.2 分块矩阵的逆	51
1.8.3 分块矩阵的应用——求行列式	52
1.8.4 分块矩阵在回归方程中的应用	53
习题	57

1.9	方阵的特征值和特征向量	58
	习题	64
1.10	MATLAB 介绍和它的一些指令	65
第二章	一些有用的方阵	73
2.1	置换阵	73
	习题	75
2.2	正交阵	75
	习题	79
2.3	三角阵	79
	习题	81
2.4	对称阵	82
	习题	86
2.5	二次型	86
	2.5.1 二次型的定义	86
	2.5.2 二次型的分类	88
	习题	89
2.6	正定阵和非负定阵	90
	2.6.1 定义和性质	90
	2.6.2 正定阵的幂	91
	2.6.3 相对特征值	93
	2.6.4 二次型极值性质	94
	习题	96
2.7	幂等阵和投影阵	97
	2.7.1 向量对向量投影	97
	2.7.2 向量在线性子空间投影	98
	2.7.3 幂等阵和投影阵	99
	习题	102
2.8	统计学中的一些矩阵	102
	2.8.1 阿达马矩阵	102
	2.8.2 拉丁方	104
	2.8.3 正交拉丁方	107
	2.8.4 正交表	108
	习题	112
2.9	幻方	113
	习题	115
2.10	本章需要的 MATLAB 的指令	115

第三章	矩阵的因子分解	117
3.1	引言	117
3.2	解线性方程时需要的分解	117
3.2.1	LU 分解	118
3.2.2	楚列斯基分解	120
3.2.3	QR 分解	121
	习题	127
3.3	含有矩阵特征值和特征向量的分解	128
3.3.1	谱分解	128
3.3.2	舒尔分解	129
3.3.3	奇异值分解	130
3.3.4	一些其他的矩阵因子分解	131
	习题	132
3.4	多个矩阵同时作因子分解	133
	习题	135
3.5	本章需要的 MATLAB 的指令	136
第四章	近代发展的矩阵运算	139
4.1	广义逆	139
4.2	矩阵的拉直运算	143
4.2.1	一些记号	143
4.2.2	拉直运算	143
	习题	145
4.3	克罗内克积	145
	习题	147
4.4	拉直运算的性质	148
	习题	152
4.5	对称阵和三角阵的拉直运算	152
4.5.1	对称阵的拉直运算	153
4.5.2	下三角阵的拉直运算	154
4.5.3	一些应用	156
4.6	本章需要的 MATLAB 的指令	156
第五章	矩阵函数的微商	158
5.1	引言	158
5.2	矩阵对标量的微商	158
	习题	160
5.3	矩阵变量函数的微商	160
	习题	162

5.4	向量函数的微商	162
	习题	164
5.5	变换的雅可比	164
5.5.1	矩阵和向量的微分	165
5.5.2	多元变换的雅可比	167
	习题	170
第六章	随机向量和矩阵	172
6.1	随机矩阵及其期望	172
	习题	173
6.2	随机向量的协方差矩阵和相关矩阵	174
	习题	176
6.3	随机向量二次型的期望值	177
	习题	178
6.4	在回归分析中的应用	179
6.5	在多元统计分析中的应用	182
6.5.1	总体主成分	182
6.5.2	样本主成分	184
索引		186
参考文献		190

第一章

矩阵和向量

本章介绍矩阵和向量的基本概念、有关的代数运算、数字特征、线性空间、投影以及分块矩阵的运算. 本章还提及矩阵代数在统计学中的重要性.

1.1 数据和矩阵

统计学是收集数据和分析数据的一门学科. 数据常常列成一个表.

例 1.1 表 1.1 列举了某中学八位同学语文、英语、数学、物理、化学五科的成绩. 这些成绩可排成 8 行 5 列的一个数字阵, 称为矩阵

表 1.1 中学生成绩表

学生	语文	英语	数学	物理	化学
1	77	73	81	82	85
2	69	68	87	83	80
3	60	58	80	92	94
4	75	63	96	85	88
5	96	93	81	71	70
6	88	90	75	68	74
7	92	83	79	69	68
8	95	92	73	78	73
平均值	81.5	77.5	81.5	78.5	79.0

$$X = \begin{pmatrix} 77 & 73 & \cdots & 85 \\ 69 & 68 & \cdots & 80 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 95 & 92 & \cdots & 73 \end{pmatrix},$$

这里 X 的每一行代表某一位同学的五科成绩, 每一列表示八位同学某一科的成绩. 在统计分析中, 例如求每科的平均分数, 每科的标准差, 不同科成绩的相互关系 (相关性), 学生按成绩进行分类等, 都立足于矩阵 X . 分析的过程和有关的计算都可通过矩阵的知识和运算来表达.

定义 1.1 (实数空间) 全部实数的集合称为实数空间, 记为 $\mathbf{R}$. 集合 $\mathbf{R}^n = \{(a_1, \dots, a_n), a_i \in \mathbf{R}, i = 1, \dots, n\}$ 称为 n 维实数空间.

定义 1.2 (矩阵) 由 mn 个数 a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$) 排成的一个 n 行 m 列的数表

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}, \text{ 或 } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

称为大小为 $n \times m$ 矩阵. 其中 a_{ij} 称为矩阵 A 的元素, 可简记为 $A = (a_{ij})$, $A_{n \times m}$ 或 $A = (a_{ij})_{n \times m}$. 在行文中矩阵用大写黑体表示.

元素是实数的矩阵称为**实数矩阵**或**实矩阵**, 元素中有复数的矩阵称为**复数矩阵**或**复矩阵**. 在统计学中遇到的问题, 一般均为实数, 故本书的矩阵除特别声明外, 均为实矩阵. 全部 $n \times m$ 实矩阵的集合记为 $\mathbf{R}^{n \times m}$, $A \in \mathbf{R}^{n \times m}$ 意指 A 是一个 $n \times m$ 实矩阵. 所谓的 n 维欧氏空间是一切 n 个有顺序的实数 $a_1, \dots, a_n$ 所组成的集合, 记为 $\mathbf{R}^n$. 为了方便, 规定 $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^{n \times 1} = \mathbf{R}^{1 \times n}$.

定义 1.3 (矩阵相等) 两个矩阵 $A = (a_{ij})$ 和 $B = (b_{ij})$ 都是 $n \times m$ 矩阵, 并且 $a_{ij} = b_{ij}$ 对所有的 i, j 成立, 则称 A 和 B 相等, 可表示为 $A = B$.

矩阵按元素的性质和它们排列的方式, 可分类如下:

(1) 行向量 若 $n = 1$, A 退化为一个行, 记为 $A = (a_1, \dots, a_m) \equiv \mathbf{a}$, 这里“ $\equiv$ ”表示“令”. 在本书中向量用小写黑体表示, 这里 $\mathbf{a}$ 又称为 m 维行向量.

(2) 列向量 若 $m = 1$, A 退化为一个 n 维列, 记为

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \equiv \mathbf{a}.$$

在 $n \times m$ 矩阵中, 有 n 个 m 维的行向量, m 个 n 维的列向量, 它们可以分别视为欧几里得空间 $\mathbf{R}^m$ 空间中的 n 个点, 或 $\mathbf{R}^n$ 空间中的 m 个点. 向量中的

元素又称为分量. 在解析几何中, 向量又称为**矢量**, 在 1.3 节, 有进一步的说明. 虽然向量是矩阵的特殊的情形, 但从另一方面, 向量是矩阵的基础, 有必要对向量进行单独的研究, 细节见 1.3 节.

下列的符号将贯穿本书

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) = (\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_m) = (\mathbf{a}_{(1)}, \cdots, \mathbf{a}_{(n)})^T = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{(1)}^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{(n)}^T \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

这里 $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_m$ 是列向量, $\mathbf{a}_{(1)}^T, \cdots, \mathbf{a}_{(n)}^T$ 是行向量.

(3) 转置矩阵 将 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times m}$ 的行列对换, 得

$$\mathbf{A}^T \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}_{m \times n}. \quad (1.3)$$

矩阵 $\mathbf{A}^T$ 称为 $\mathbf{A}$ 的转置矩阵或转置阵. 显见, $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$, $(t\mathbf{A})^T = t\mathbf{A}^T$. 在文献中, 转置阵也可记为 $\mathbf{A}'$ 或 $\mathbf{A}^r$ 等. 例如

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

的转置阵为

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

(4) 零矩阵 一个元素全为 0 的 $n \times m$ 矩阵称为零矩阵, 记为 $\mathbf{O}_{n \times m}$. 当 $m = 1$ 时, 记为 $\mathbf{0}_n$.

(5) 元素为 1 的矩阵 若 n 维列向量的元素全为 1, 记为

$$\mathbf{1}_n = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}_{n \times 1}.$$

一个元素全为 1 的 $n \times m$ 矩阵可表为 $\mathbf{J}_{n \times m}$.

(6) 分块矩阵 如果一个矩阵的一些元素是小的矩阵, 那么这个矩阵称为分块矩阵. 分块矩阵在统计学中十分常见, 尤其分成四块的情形:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

式中, $\mathbf{A}$ 为 $n \times m$ 矩阵, $\mathbf{A}_{11}$ 为 $p \times r$ ($p < n, r < m$) 矩阵, 则 $\mathbf{A}_{22}$ 为 $(n-p) \times (m-r)$ 矩阵. 关于分块矩阵的性质将在 1.8.1 节详细讨论.

(7) 方阵 若 $n = m$, 矩阵 $\mathbf{A}$ 称为方阵, 此时 $a_{11}, \dots, a_{nn}$ 称为 $\mathbf{A}$ 的对角元素, $a_{ij} (i \neq j)$ 为非对角元素.

虽然大部分数据矩阵并不是方阵, 但是在数据分析时, 产生许多方阵. 所以方阵在统计学中扮演了举足轻重的角色. 方阵又按元素的取值分为下列若干类:

(a) 对称矩阵 若 $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, 或 $a_{ij} = a_{ji}, i, j = 1, 2, \dots, n$, 称 $\mathbf{A}$ 为对称矩阵或对称阵, 也称为 n 阶方阵.

(b) 对角矩阵 若方阵 $\mathbf{A}$ 的非对角元素全为零, 即对一切 $i \neq j, a_{ij} = 0$ 成立, 这时 $\mathbf{A}$ 称为对角矩阵或对角阵, 并表为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \equiv \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}). \quad (1.5)$$

(c) 单位矩阵 对角元素全为 1 的对角阵称为单位矩阵或单位阵, 记作

$$\mathbf{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \equiv \text{diag}(1, 1, \dots, 1). \quad (1.6)$$

单位阵在矩阵代数中起着实数域中“1”的作用. 将单位阵表达为列向量的格式, 得

$$\mathbf{I}_n = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n), \quad (1.7)$$

公式中 $\mathbf{e}_j^T = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, 它的第 j 个元素为 1, 其他为 0, 称为 $\mathbf{R}^n$ 中的单位向量. 当强调维数时, $\mathbf{e}_j$ 记为 $\mathbf{e}_j(n)$. 详情参见 4.2.1 节.

(d) 反对角矩阵 若一个方阵除了它的反对角元素 $a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n1}$ 可能不为零外, 其余元素皆为 0, 则称为反对角矩阵或反对角阵, 它有形式

$$\begin{pmatrix} & & & a_{1n} \\ & & & \\ & & a_{2,n-1} & \\ & & \ddots & \\ & a_{n-1,2} & & \\ a_{n1} & & & \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

(e) 下三角形矩阵 若方阵 $A = (a_{ij})$ 中 $a_{ij} = 0$ 对一切 $i < j$ 成立, 则 A 称为下三角形矩阵或下三角阵. 它有结构

$$L = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

(f) 上三角形矩阵 若方阵 $A = (a_{ij})$ 有如下的结构:

$$U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \text{ 或 } U_* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.10)$$

称为上三角形矩阵或上三角阵. 上式左边的结构, 称为左上三角阵, 其中左下三角元素全为 0, 即 $a_{ij} = 0$ 对一切 $i > j$ 成立; 上式右边的结构, 称为右上三角阵. 在本书中, 如果没有特别的说明, 上三角阵均为左上三角阵. 注意, 三角阵 (包括上三角阵和下三角阵) 的对角线元素的值是自由的, 可以为 0, 也可以不为 0. 下三角阵的转置是上三角阵, 上三角阵的转置是下三角阵. 例如, (1.9) 中的 L^T 成为 (1.10) 式中的 U . 易见, U_*^T 是另一类型的下三角阵, 但在统计学中很少用到. 以后书中谈到下三角阵和上三角阵均表示为 L 和 U 的样式. 对角元素代表三角阵的重要特征, 将在 2.3 节详细讨论.

上述的各类矩阵将在本书中有详细的讨论.

习 题

1.1.1 给出两个例子说明矩阵的用处.