高等院校通识教育"十二五"规划教材

线性代数学习指导与习题解

王榕国 ◎ 主编
罗桂生 ◎ 副主编
胡世录 高微 黄加增 黄礼锵 ◎ 参编

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

高等院校通识教育"十二五"规划教

线性代数学习指导与习题解

王榕国 ◎ 主编
罗桂生 ◎ 副主编
胡世录 高微 黄加增 黄礼锵 ◎ 参编

人民邮电出版社
北京

图书在版编目（CIP）数据

线性代数学习指导与习题解 / 王榕国主编. -- 北京：人民邮电出版社，2014.2
高等院校通识教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-115-34479-3

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①线性代数－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第016770号

内 容 提 要

本书共5章，内容包括矩阵、行列式、向量空间、线性方程组、二次型。书中对每章节的知识要点进行讲解，并对习题进行详细的解答，同时配合强化训练进行详细解题分析，书末附有综合试题和20套模拟试卷及参考答案。

本书适合作为高等院校线性代数相关课程的辅导教材，也可供自行练习使用。

◆ 主　　编　王榕国
　副 主 编　罗桂生
　参　　编　胡世录　高　微　黄加增　黄礼锵
　责任编辑　王亚娜
　执行编辑　喻智文
　责任印制　张佳莹　焦志炜

◆ 人民邮电出版社出版发行　北京市丰台区成寿寺路11号
　邮编　100164　　电子邮件　315@ptpress.com.cn
　网址　http://www.ptpress.com.cn
　三河市潮河印业有限公司印刷

◆ 开本：787×1092　1/16
　印张：18.25　　　2014年2月第1版
　字数：437千字　　2014年2月河北第1次印刷

定价：42.00元

读者服务热线：(010)81055256　印装质量热线：(010)81055316
反盗版热线：(010)81055315

前言

本教材是以《线性代数》(罗桂生编)为基础编写的配套辅导书，它有助于辅导学生学好这本或要求相近的教材，达到大纲要求，满足有关专业的需要。

本教材共5章，编者对每章节的知识要点进行了讲解，对教材中的习题做了详细的解答，同时配合强化训练对习题进行详细解题分析，书末附有综合试题和20套模拟试卷及其参考答案。

本教材由具有长期教学和辅导经验的一线教师编写，编者认为学生需要熟练基本运算，完成一定数量的习题，以培养和提高综合运用以及解决实际问题的能力。教材中对每道习题都进行了详细的分析与解答，习题的数量与类型齐全，通过不断练习，既有利于学生自学和自查对知识点的掌握和理解，又拓宽解题思路，使学生对所学的知识能够融会贯通。

本教材由福建农林大学东方学院王榕国担任主编，福建农林大学罗桂生老师担任副主编，福建农林大学东方学院高微、黄加增、黄礼锵、胡世录参与了编写工作，其中第一章的知识要点和强化练习部分由高微编写，第二、三、四章的知识要点和强化练习部分由王榕国编写，第五章的知识要点和强化练习部分由罗桂生编写，第一、二、三、四章课后习题解答部分由黄礼锵编写，第5章课后习题解答部分由黄加增编写，综合训练部分由胡世录编写。全书由王榕国和罗桂生负责统编，福建农林大学尤添革、官明友、吴怀弟也参与了审稿工作。

由于编者水平所限，书中难免有不妥和疏漏之处，恳请广大读者提出宝贵意见。

编者

2013年12月

目录

第一章　矩阵 …… 1

(一)知识要点 …… 1

(二)课后习题一 …… 7

(三)强化练习一 …… 16

第二章　行列式 …… 45

(一)知识要点 …… 45

(二)课后习题二 …… 49

(三)强化练习二 …… 60

第三章　向量空间 …… 79

(一)知识要点 …… 79

(二)课后习题三 …… 85

(三)强化练习三 …… 93

第四章　线性方程组 …… 106

(一)知识要点 …… 106

(二)课后习题四 …… 109

(三)强化练习四 …… 122

第五章　二次型 …… 144

(一)知识要点 …… 144

(二)课后习题五 …… 149

(三)强化练习五 …… 165

综合训练 …… 191

模拟试卷一 …… 204

模拟试卷二 …… 205

模拟试卷三 …… 207

模拟试卷四 …… 208

模拟试卷五 …… 210

模拟试卷六 …… 211

模拟试卷七 …… 213

模拟试卷八 …… 214

模拟试卷九 …… 216

模拟试卷十 …… 217

模拟试卷十一 …… 219

模拟试卷十二 …… 220

模拟试卷十三 …… 222
模拟试卷十四 …… 223
模拟试卷十五 …… 225
模拟试卷十六 …… 227
模拟试卷十七 …… 228
模拟试卷十八 …… 230
模拟试卷十九 …… 232
模拟试卷二十 …… 233
模拟试卷一答案 …… 236
模拟试卷二答案 …… 238
模拟试卷三答案 …… 241
模拟试卷四答案 …… 245
模拟试卷五答案 …… 248
模拟试卷六答案 …… 250
模拟试卷七答案 …… 253
模拟试卷八答案 …… 255
模拟试卷九答案 …… 258
模拟试卷十答案 …… 260
模拟试卷十一答案 …… 262
模拟试卷十二答案 …… 265
模拟试卷十三答案 …… 267
模拟试卷十四答案 …… 270
模拟试卷十五答案 …… 272
模拟试卷十六答案 …… 275
模拟试卷十七答案 …… 277
模拟试卷十八答案 …… 279
模拟试卷十九答案 …… 282
模拟试卷二十答案 …… 284

第一章

矩阵

（一）知识要点

一、矩阵的概念

定义 1 由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，排成 m 行 n 列的数表：

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

称为 m 行 n 列矩阵，简称 $m\times n$ 矩阵.为了表示它是一个整体，总是加一个括号将它括起来，并通常用大写字母表示它.记作

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{或} \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

也可简记 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$.切记不允许使用 $\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$.

矩阵的横向称行，纵向称列.矩阵中的每个数 a_{ij} 称为元素，所有元素都是实数的矩阵称为实矩阵，所有元素都是复数的矩阵称为复矩阵.本课中的矩阵除特殊说明外，都指实矩阵.

几种特殊的矩阵如下所示.

（1）只有一行的矩阵称为行矩阵，又称行向量.

（2）只有一列的矩阵称为列矩阵，又称列向量.

（3）所有元素都是零的矩阵称为零矩阵，记作 $\boldsymbol{O}$.

(4) 当 $m=n$ 时,矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 称为方阵.即

$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$,这里 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 的位置称为矩阵的主对角线.注意:不是方阵没有主对角线.在方阵中,

上三角矩阵:$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$(主对角线以下均为零);

下三角矩阵:$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$(主对角线以上均为零);

对角矩阵:$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$(既是上三角又是下三角),记作 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$;

单位矩阵:对角元素为 1 的对角矩阵,记作 $\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{E}_n$(n 阶),即

$$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

当 $m=n=1$ 时,即 $\boldsymbol{A}=(a_{11})$,此时矩阵退化为一个数 a_{11}.

同型矩阵 具有相同行数和相同列数的矩阵,称之为同型矩阵.

矩阵相等 若同型矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 在对应位置上的元素都相等,即 $a_{ij}=b_{ij}(i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n)$,则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相等,记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

注意:不同型的矩阵是不能比较相等的,同型矩阵也不能比较大小.

二、矩阵的运算

(一) 矩阵的加法

定义 2 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 是 $m\times n$ 的矩阵,$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的加法(或称和),记作 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$,定义为一个 $m\times n$ 的矩阵:

$$\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

负矩阵 设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，称矩阵$-\boldsymbol{A}=(-a_{ij})_{m\times n}$为矩阵$\boldsymbol{A}$的负矩阵.矩阵的减法：

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \cdots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \cdots & a_{2n}-b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \cdots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix}.$$

（二）数与矩阵相乘

定义 3 （矩阵数乘）数λ与矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$的乘积（称之为数乘），记作$\lambda\boldsymbol{A}$或$\boldsymbol{A}\lambda$，定义为一个$m\times n$的矩阵：

$$\lambda\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\lambda=\lambda(a_{ij})_{m\times n}=(\lambda a_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

以上运算称为矩阵的线性运算，它满足下列运算法则.

(1) 交换律$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$.

(2) 结合律$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$.

(3) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$.

(4) $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

(5) 数对矩阵的分配律$\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$.

(6) 矩阵对数的分配律$(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$.

(7) 结合律$(\lambda\mu)\boldsymbol{A}=\lambda(\mu\boldsymbol{A})$.

（三）矩阵与矩阵相乘

定义 4 （矩阵乘法）设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$是一个$m\times s$矩阵，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$是一个$s\times n$矩阵，$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$的乘法，记作$\boldsymbol{AB}$，定义为一个$m\times n$的矩阵$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}=(c_{ij})_{m\times n}$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}\ (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n).$$

由定义，不难看出以下几点.

(1) 只有在左矩阵$\boldsymbol{A}$的列数和右矩阵$\boldsymbol{B}$的行数相等时，才能定义乘法$\boldsymbol{AB}$.

(2) 矩阵$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$的行数是$\boldsymbol{A}$的行数，列数则是$\boldsymbol{B}$的列数.

(3) 矩阵$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$在$(i,j)$位置上的元素等于$\boldsymbol{A}$的第$i$行元素与$\boldsymbol{B}$的第$j$列对应元素的乘积之和.

(4) 一般情况下，矩阵乘法不满足交换律.当$\boldsymbol{AB}$有意义时，$\boldsymbol{BA}$不一定有意义.特殊地，若两个矩阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$满足$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则称矩阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$是可交换的.

(5) $\boldsymbol{AE}=\boldsymbol{EA}=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{E}$相当于数1的作用.这就是称$\boldsymbol{E}$为单位阵的原因.

矩阵乘法满足以下运算律.

(1) 结合律$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$.

(2) 数乘结合律$\lambda(\boldsymbol{AB})=(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})$.

(3) 分配律$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$；$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$.

矩阵的幂 设$\boldsymbol{A}$是n阶矩阵，定义：

$$\boldsymbol{A}^1=\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{AA},\cdots,\boldsymbol{A}^{k+1}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^k),$$

其中,k 是正整数,特别规定 $\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{E}$.由于乘法成立分配律结合律,有

$$\boldsymbol{A}^{k+l}=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^l,(\boldsymbol{A}^k)^l=\boldsymbol{A}^{kl},$$

但由于不成立交换律,故一般$(\boldsymbol{AB})^k\neq\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$.

(四) 矩阵的转置

定义 5 (转置矩阵)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$是将 $\boldsymbol{A}$ 的行和列对应互换得到的 $n\times m$矩阵,称它为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵,记作 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

矩阵的转置满足下列运算法则.

(1) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$.

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$.

(3) $(\lambda\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\lambda(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$,$\lambda$ 是数.

(4) $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

定义 6 (对称矩阵)设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$是 n 阶矩阵.如果 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为对称阵.显然,其元素满足:$a_{ij}=a_{ji},\forall i,j$.

如果 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为反对称阵.显然,其元素满足:$a_{ij}=-a_{ji},\forall i,j$.

(五) 方阵的行列式

定义 7 (方阵的行列式)由 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$的元素,不改变它的位置构成一个 n 阶行列式,称此行列式为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 所对应的行列式,记作 $|\boldsymbol{A}|$ 或 $\det(\boldsymbol{A})$,即

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

注意:矩阵的行列式与矩阵是两个不同的概念,前者是一个数,后者是一个数表.

矩阵的行列式满足以下运算律,设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 都是方阵,则

(1) $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$(由行列式性质).

(2) $|\lambda\boldsymbol{A}|=\lambda^n|\boldsymbol{A}|$,$n$ 是矩阵$\boldsymbol{A}$ 的阶.

(3) $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.

定义 8 (伴随矩阵)设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$是 n 阶方阵,由行列式$|\boldsymbol{A}|$中的每个元素 a_{ij}的代数余子式 A_{ij}所构成的矩阵为

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

称之为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.

注意:伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 在位置(i,j)上的元素是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 在位置(j,i)上的代数余子式.

定理 1 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵,$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,则 $\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$.

三、矩阵的分块运算

把一个矩阵看成是由一些小矩阵组成的，有时会对一些具有特殊结构的矩阵的运算带来方便，如乘法和求逆等运算.而在具体运算时，则把这些小矩阵看作数一样(按运算规则)进行运算.这种把一个矩阵划分成一些小矩阵，就是所谓的矩阵分块.

矩阵分块是将矩阵用任意的横线和纵线切开，例如

$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$，下面给出它的 3 种分法.

(i) $\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right)$.令 $\boldsymbol{A}_{11}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}_{12}=\begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}_{21}=(a_{31} \quad a_{32})$，

$\boldsymbol{A}_{22}=(a_{33} \quad a_{34})$，则 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix}$.

(ii) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$.令 $\boldsymbol{A}_{11}=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}_{12}=\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{A}_{13}=\begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}_{21}=(a_{31})$，$\boldsymbol{A}_{22}=(a_{32} \quad a_{33})$，$\boldsymbol{A}_{23}=(a_{34})$，

则 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{13} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \boldsymbol{A}_{23} \end{pmatrix}$.

(iii) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$.令 $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}_4=\begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_1 \quad \boldsymbol{A}_2 \quad \boldsymbol{A}_3 \quad \boldsymbol{A}_4)$.

当然矩阵分块的目的是为了简化矩阵的表示或运算，矩阵分块后的运算法则与普通矩阵运算基本相同，如

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{21} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{s1} & \boldsymbol{A}_{s2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1r} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{21} & \cdots & \boldsymbol{B}_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{B}_{s1} & \boldsymbol{B}_{s2} & \cdots & \boldsymbol{B}_{sr} \end{pmatrix}$，

当各个对应的子块是同型矩阵，则

$$\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11}\pm\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\pm\boldsymbol{B}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r}\pm\boldsymbol{B}_{1r} \\ \boldsymbol{A}_{21}\pm\boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{A}_{21}\pm\boldsymbol{B}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2r}\pm\boldsymbol{B}_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{s1}\pm\boldsymbol{B}_{s1} & \boldsymbol{A}_{s2}\pm\boldsymbol{B}_{s2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}\pm\boldsymbol{B}_{sr} \end{pmatrix},$$

$$\lambda\boldsymbol{A}=\lambda\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{21} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2r}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \boldsymbol{A}_{s2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\boldsymbol{A}_{11} & \lambda\boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \lambda\boldsymbol{A}_{1r}\\ \lambda\boldsymbol{A}_{21} & \lambda\boldsymbol{A}_{21} & \cdots & \lambda\boldsymbol{A}_{2r}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda\boldsymbol{A}_{s1} & \lambda\boldsymbol{A}_{s2} & \cdots & \lambda\boldsymbol{A}_{sr}\end{pmatrix}.$$

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{21} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2r}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{m1} & \boldsymbol{A}_{m2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{mr}\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1s}\\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{21} & \cdots & \boldsymbol{B}_{2s}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{B}_{r1} & \boldsymbol{B}_{r2} & \cdots & \boldsymbol{B}_{rs}\end{pmatrix}$,则

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_{11} & \boldsymbol{C}_{12} & \cdots & \boldsymbol{C}_{1s}\\ \boldsymbol{C}_{21} & \boldsymbol{C}_{21} & \cdots & \boldsymbol{C}_{2s}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{C}_{m1} & \boldsymbol{C}_{m2} & \cdots & \boldsymbol{C}_{ms}\end{pmatrix},\boldsymbol{C}_{ij}=\boldsymbol{A}_{i1}\boldsymbol{B}_{1j}+\boldsymbol{A}_{i2}\boldsymbol{B}_{2j}+\cdots+\boldsymbol{A}_{ir}\boldsymbol{B}_{rj}.$$

一般地说,将矩阵分块后再运算并不减少计算量,只有特殊的矩阵,利用分块才能减少计算量,比较典型是分块对角矩阵,如:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2 & \cdots & \boldsymbol{0}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{A}_m\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_2 & \cdots & \boldsymbol{0}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{B}_m\end{pmatrix},\text{则}$$

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2 & \cdots & \boldsymbol{0}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{A}_m\boldsymbol{B}_m\end{pmatrix},\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1^{-1} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2^{-1} & \cdots & \boldsymbol{0}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{A}_m^{-1}\end{pmatrix}.$$

四、逆阵

定义 9 (逆矩阵)设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵,若存在矩阵 $\boldsymbol{B}$,使得 $\boldsymbol{AB}=B\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$,则称矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵,并称 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵(或称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的).

定理 2 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的充分必要条件是它的行列式 $|\boldsymbol{A}|\neq0$;且在 $|\boldsymbol{A}|\neq0$ 时,$\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$.

此定理给出矩阵可逆的充要条件,同时还给出逆矩阵的求法——伴随矩阵法.有时称可逆矩阵为非奇矩阵,称不可逆矩阵(即 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时)为奇异矩阵.

方阵的逆矩阵有下面的性质,

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆,则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 亦可逆,并且 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$.

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆,$\lambda\neq0$,则 $\lambda\boldsymbol{A}$ 亦可逆,并且 $(\lambda\boldsymbol{A})^{-1}=\dfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{A}^{-1}$.

(3) 若 $\boldsymbol{A}$、B 可逆,则 $\boldsymbol{AB}$ 亦可逆,且 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

(4) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆,则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 亦可逆,且 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$.

(5) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆,则 $|\boldsymbol{A}^{-1}|=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}$.(因为 $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{AA}^{-1}|=|\boldsymbol{E}|=1$)

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 是方阵,如果存在方阵 B,使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$(或 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$),则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$.

五、矩阵的初等变换

定义 10 下面 3 种变换称为矩阵的初等行(列)变换.

(1) 互换矩阵中两行(列)元素(记 $r_i \longleftrightarrow r_j$ 或 $c_i \longleftrightarrow c_j$);

(2) 用一个非零数 k 乘矩阵的某一行(列)(记 $k \times r_i$ 或 $k \times c_i$);

(3) 矩阵的某一行(列)元素的 k 倍加到另一行(列)对应元素上(记 $r_i + k \times r_j$ 或 $c_i + k \times c_j$).(注意:本行的元素并没有改变.)

矩阵的初等行或列变换统称矩阵的初等变换.

如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次的初等变换变成 $\boldsymbol{B}$,则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价,记作 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$ 或 $\boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}$.矩阵等价的 3 个性质:

(1) 反身性 $\boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{A}$;

(2) 对称性 若 $\boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}$,则 $\boldsymbol{B} \rightarrow \boldsymbol{A}$;

(3) 传递性 若 $\boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{B} \rightarrow \boldsymbol{C}$,则 $\boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{C}$.

行阶梯形矩阵: 可画出一条阶梯线,线的下方全为零,每个台阶只有一行,即每段竖线的长度为一行,竖线后面的第一个元素为非零数.如

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

等都是行阶梯形矩阵.

行最简形矩阵: 在行阶梯形矩阵的基础上,每个非零行左数第一个非零元是 1,并且它所在列的其他元素都是零.

标准型矩阵: 它的左上角为一个单位阵,其他元素都是零,即 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}_{m \times n}$.

定理 3 任意一个 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$,总可以经过有限次初等行变换将其变成行阶梯形矩阵,进一步还可化成行最简形矩阵.

定理 4 一个可逆异矩阵 $\boldsymbol{A}$,可以经过有限次初等行变换变成单位阵.

定理 5 任意一个 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$,总可以经过有限次初等变换将其变成标准型矩阵.

(二) 课后习题一

1. 计算下列各题.

(1) $(1 \quad 2 \quad 3)\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$;(2) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}(1 \quad 2 \quad 3)$;(3) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -5 & 4 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$;

(4) $(2 \quad 0 \quad -1)\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$;(5) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

解 (1) $(1\quad 2\quad 3)\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}=(3+4+9)=16.$

(2) $\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}(1\quad 2\quad 3)=\begin{pmatrix}3&6&9\\2&4&6\\1&2&3\end{pmatrix}.$

(3) $\begin{pmatrix}2&0&3\\1&-5&4\\1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11\\3\\19\end{pmatrix}.$

(4) $(20\quad -1)\begin{pmatrix}2&4\\-3&1\\0&-2\end{pmatrix}=(4\quad 10).$

(5) $\begin{pmatrix}0&2&4\\1&-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-3\\-1&0\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&16\\12&9\end{pmatrix}.$

2. 试证矩阵的乘法满足分配律：

(1) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$；

(2) $(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$。

证明： 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{s\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$，$\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{n\times n}$，

$\boldsymbol{AB}$ 是 $s\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{AC}$ 是 $s\times n$ 矩阵，以 $(i,j)_{AB}$ 为矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 的第 i 行第 j 列.

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})]_{(i,j)}&=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(b_{kj}+c_{kj})=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}+\sum_{k=1}^{n}a_{ik}c_{kj}\\&=[\boldsymbol{AB}]_{(i,j)}+[\boldsymbol{AC}]_{(i,j)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}]_{(i,j)}&=\sum_{k=1}^{s}(b_{ik}+c_{ik})a_{kj}=\sum_{k=1}^{s}b_{ik}a_{kj}+\sum_{k=1}^{s}c_{ik}a_{kj}\\&=[(\boldsymbol{BA})]_{(i,j)}+[\boldsymbol{CA}]_{(i,j)}.\end{aligned}$$

3. 试证矩阵的数乘满足结合律：$\lambda(\boldsymbol{AB})=(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})$.

证明： 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{s\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times m}$，显示 $\lambda(\boldsymbol{AB})$，$(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})$ 都是 $s\times m$ 矩阵

$$[\lambda(\boldsymbol{AB})]_{(i,j)}=\lambda[(\boldsymbol{AB})_{(i,j)}]=\lambda\left(\sum_{t=1}^{n}a_{it}b_{it}\right)=\sum_{t=1}^{n}\lambda a_{it}b_{tj}$$

$$[(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}]_{(i,j)}=\sum_{t=1}^{n}(\lambda a_{it})b_{tj}=\sum_{t=1}^{n}\lambda a_{it}b_{tj}$$

$$[\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})]_{(i,j)}=\sum_{t=1}^{n}a_{it}[(\lambda\boldsymbol{B})_{(t,j)}]=\sum_{t=1}^{n}a_{it}\lambda b_{tj}$$

因此：$[\lambda(\boldsymbol{AB})]_{(i,j)}=[(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}]_{(i,j)}=[\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})]_{(i,j)}(i=1,2,\cdots,s;j=1,2,\cdots,m)$，从而 $\lambda(\boldsymbol{AB})=(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})$.

4. 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-3&0&1&3\\2&-1&5&4\\1&7&0&6\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4&3&-2&1\\2&5&3&4\\-1&0&4&-2\end{pmatrix},$$

求：(1) $3\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}-2\boldsymbol{BA}^{\mathrm{T}}$；(2) $(2\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$.

解　(1) $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}4&2&-1\\3&5&0\\-2&3&4\\1&4&-2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{BA}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$

$$\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}-3&0&1&3\\2&-1&5&4\\1&7&0&6\end{pmatrix}_{3\times4}\begin{pmatrix}4&2&-1\\3&5&0\\-2&3&4\\1&4&-2\end{pmatrix}_{4\times3}=\begin{pmatrix}-11&9&1\\-1&30&10\\31&61&-13\end{pmatrix}$$

$$\therefore 3\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}-2\boldsymbol{BA}^{\mathrm{T}}=3\begin{pmatrix}-11&9&1\\-1&30&10\\31&61&-13\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-11&-1&31\\9&30&61\\1&10&-13\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-33&27&3\\-3&90&30\\931&83&-39\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-22&-2&62\\18&60&122\\2&20&-26\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-11&29&-59\\-21&30&-92\\91&163&-13\end{pmatrix}.$$

(2) $(2\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}-22&18&2\\-2&60&20\\62&122&-26\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}-22&-2&62\\18&60&122\\2&20&-26\end{pmatrix}.$

5. 设 m 次多项式 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m$，记

$$f(\mathbf{A})=a_0\mathbf{E}+a_1\mathbf{A}+a_2\mathbf{A}^2+\cdots+a_m\mathbf{A}^m,$$

称 $f(\mathbf{A})$ 为方阵 $\mathbf{A}$ 的 m 次多项式.若已知 $f(\lambda)=\lambda^3+3\lambda^2-2$，$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$，求 $f(\mathbf{A})$.

解　已知 $f(\lambda)=\lambda^3+3\lambda^2-2$，$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$，

则 $f(\mathbf{A})=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}^3+3\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}^2-2\mathbf{E}$

$$=0+3\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-2&0\\3&0&-2\end{pmatrix}.$$

6. 设 n 为正整数，求 $\boldsymbol{A}^n$、$\boldsymbol{B}^n$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}.$$

解 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$则$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}\cos2\theta & \sin2\theta\\ -\sin2\theta & \cos2\theta\end{pmatrix}$

$\therefore\boldsymbol{A}^3=\begin{pmatrix}\cos3\theta & \sin3\theta\\ -\sin3\theta & \cos3\theta\end{pmatrix}$，以此类推则$\boldsymbol{A}^n=\begin{pmatrix}\cos n\theta & \sin n\theta\\ -\sin n\theta & \cos n\theta\end{pmatrix}$.

$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{B}^2=\begin{pmatrix}\lambda^2 & 2\lambda & 1\\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda\\ 0 & 0 & \lambda^2\end{pmatrix}$，

$$\boldsymbol{B}^3=\begin{pmatrix}\lambda^2 & 2\lambda & 1\\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda\\ 0 & 0 & \lambda^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda\\ 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2\\ 0 & 0 & \lambda^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^3 & 3\lambda^2 & \frac{3\times(3-1)}{2}\lambda^{3-2}\\ 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2\\ 0 & 0 & \lambda^3\end{pmatrix},$$

以此类推则：$\boldsymbol{B}^n=\begin{pmatrix}\lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}\\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1}\\ 0 & 0 & \lambda^n\end{pmatrix}$.

7. 举例说明下列命题是错误的.

(1) 若$\boldsymbol{A}^2=0$，则$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$.

(2) 若$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，则$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$或$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$.

(3) 若$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$，且$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$，则$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

(4) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$.

(5) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$.

解 (1) 举例：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=0$，所以命题错误

(2) 举例：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$，有$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=0$，但$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$或$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{E}$.

(3) 举例：令$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，

则$\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$，但$\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{C}$.

(4) 举例：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 6 & 3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}-14 & -7\\ 28 & 14\end{pmatrix}$，

得$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$ $\therefore(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2\neq\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$.

(5) 举例：因$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{B}^2$，

令$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 6 & 3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$

$\therefore(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\neq\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$.

8. 设$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，求与$\boldsymbol{A}$可交换的所有矩阵.

解 假设矩阵$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$与$\boldsymbol{A}$可交换，

则有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}\Rightarrow\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}a+b&b\\c+d&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\a+c&b+d\end{pmatrix}$

有 $\begin{cases}a+b=a\\c+d=a+c\\d=b+d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=0\\a=d\\c\text{ 为任意取值}\end{cases}$ $\quad\therefore\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a&0\\c&a\end{pmatrix}$.

9. 若 n 阶对角阵 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线元素互不相同，试证与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵必是对角阵.

证明： 由题知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}k_1&&\\&\ddots&\\&&k_n\end{pmatrix}$，$k_1\neq k_2\neq k_3\neq\cdots k_n$.

若有矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 可交换，

则 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}k_1b_{11}&k_1b_{12}&\cdots&k_1b_{1n}\\k_2b_{21}&k_2b_{22}&\cdots&k_2b_{2n}\\\cdots&\vdots&\ddots&\vdots\\k_nb_{n1}&k_2b_{n2}&\cdots&k_nb_{nn}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}k_1b_{11}&k_2b_{12}&\cdots&k_nb_{1n}\\k_1b_{21}&k_2b_{22}&\cdots&k_nb_{2n}\\\cdots&\vdots&\ddots&\vdots\\k_1b_{n1}&k_2b_{n2}&\cdots&k_nb_{nn}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，

则 $\begin{cases}k_1b_{12}=k_2b_{12}\\k_1b_{13}=k_3b_{13}\\\cdots\cdots\\k_1b_{1n}=k_nb_{1n}\end{cases}$，又 k_i 互不相等，$\therefore b_{1i}=0,(i=2,3,\cdots,n)$.

因此除了对角线外，$\boldsymbol{B}$ 中的元素均为 0.

$\therefore$与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵必是对角阵.

10. 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶对称阵，试证 $\boldsymbol{AB}$ 是对称阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

证明： $\Rightarrow$若 $\boldsymbol{AB}$ 为对称阵，则 $\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}$，又 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$

$\therefore(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=[(\boldsymbol{BA})^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{BA}\Rightarrow\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

$\Leftarrow$若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{AB}$，则 $\boldsymbol{AB}$ 为对称阵.

11. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，试证 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是对称阵，而 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是反对称阵.

证明： 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，则 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，则有 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为对称阵.

若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，则 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}=-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$.

$\therefore\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为反对称阵.

12. 用分块矩阵计算

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\1&0&-3&0\\0&1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\2&3&0&0\\1&2&1&0\\-2&3&0&1\end{pmatrix}.$$

解 对矩阵进行分块

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\1&0&-3&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{E}_2&\boldsymbol{A}_2\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\2&3&0&0\\1&2&1&0\\-2&3&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{B}_2&\boldsymbol{E}_2\end{pmatrix}$$