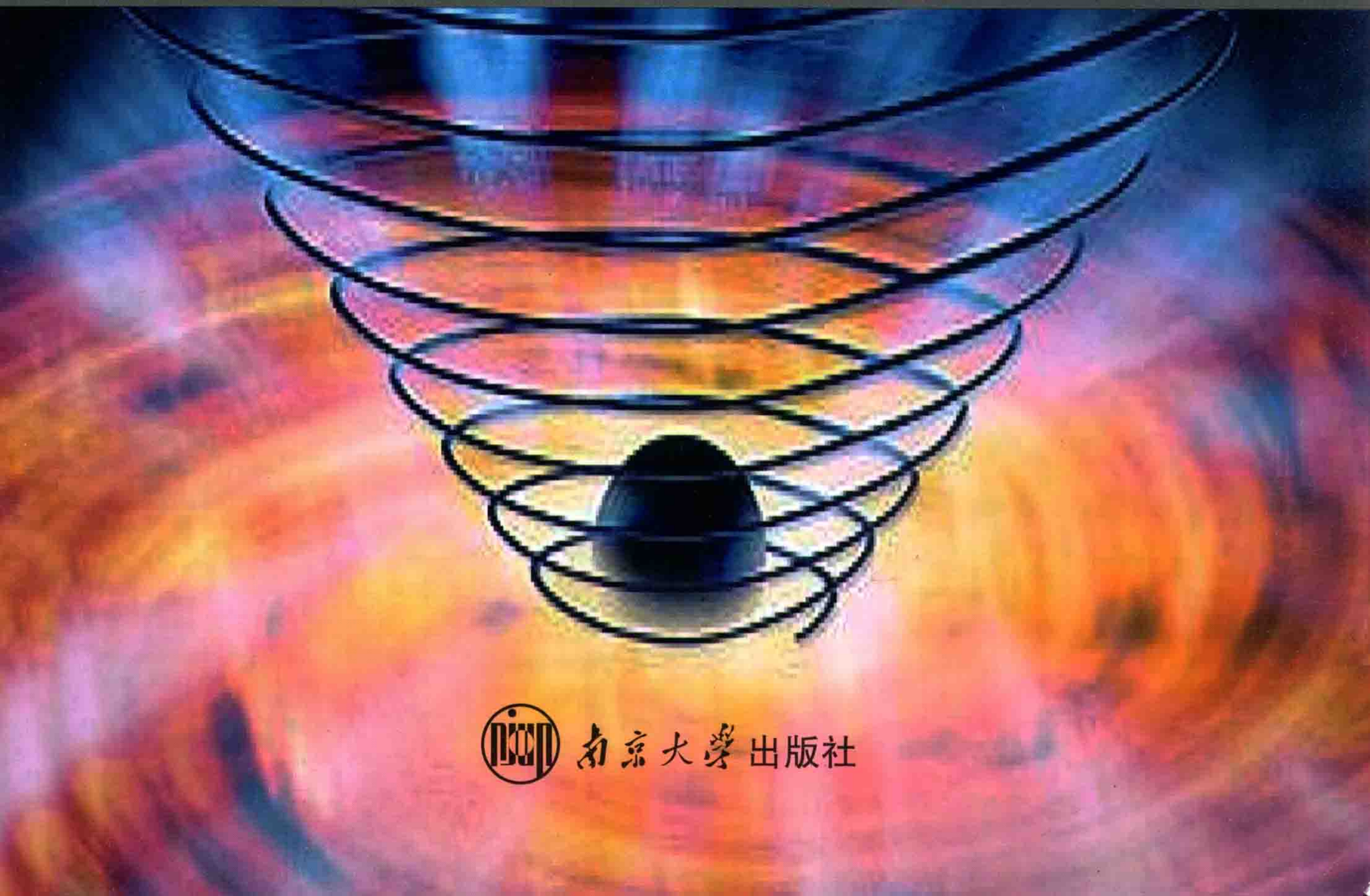
乐训®AP课程指定辅导教程

# AP Physics C: Mechanics

# AP物理C：力学

主编：曹庆琪　王洋　张玉慧



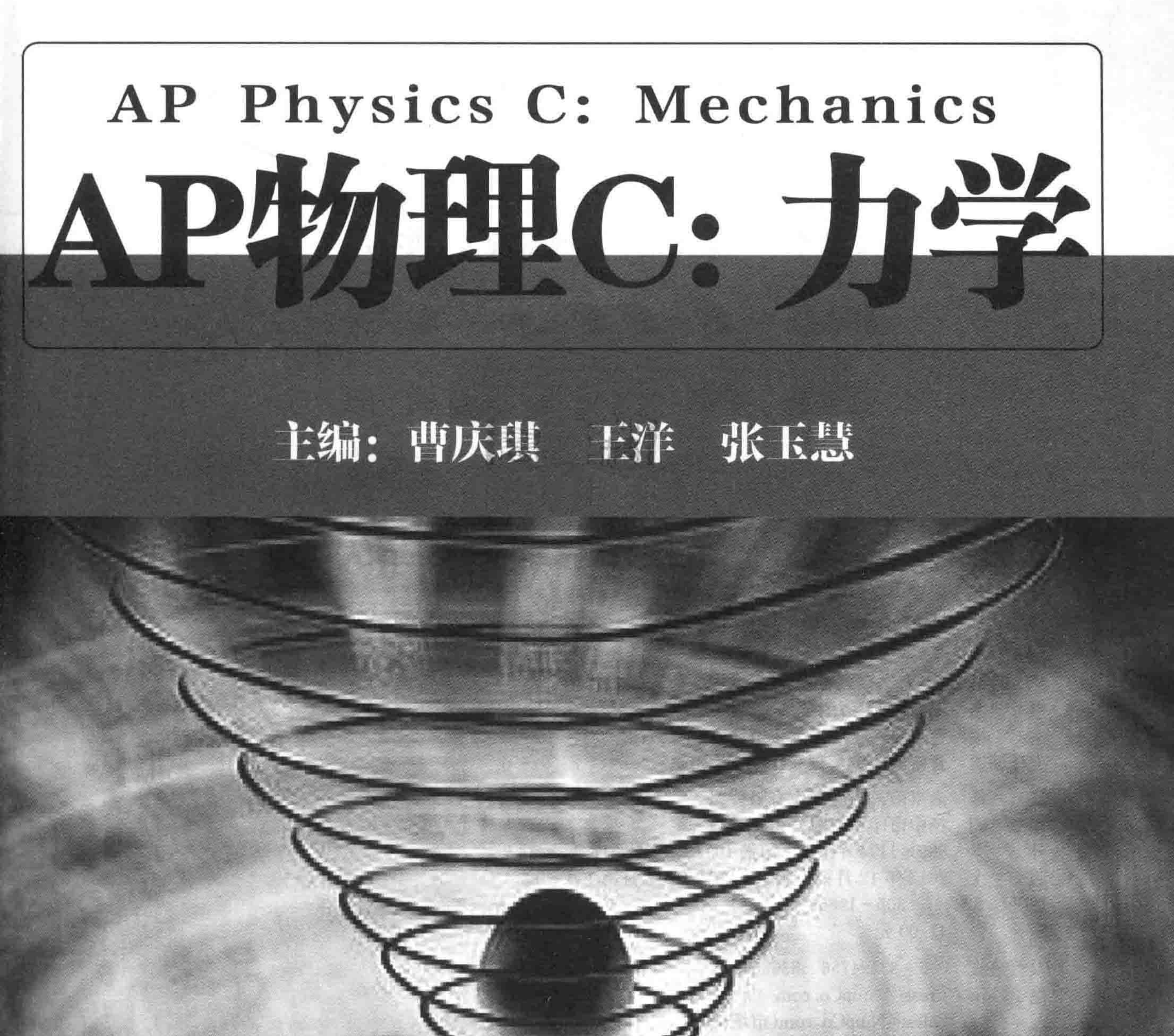
南京大学出版社

乐训®AP课程指定辅导教程

# AP Physics C: Mechanics

# AP物理C：力学

主编：曹庆琪　王洋　张玉慧



南京大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

AP物理C:力学 / 曹庆琪,王洋,张玉慧主编. — 南京
:南京大学出版社,2012.12

AP考试系列教程

ISBN 978-7-305-10869-3

Ⅰ.①A… Ⅱ.①曹… ②王… ③张… Ⅲ.①物理力学—高等学校—入学考试—美国—教材 Ⅳ.①O369

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第289489号

出版发行 南京大学出版社
社　　址 南京市汉口路22号　　邮　　编 210093
网　　址 http://www.NjupCo.com
出 版 人 左　健

丛 书 名 AP考试系列教程
**书　　名 AP物理C:力学**
主　　编 曹庆琪　王　洋　张玉慧
责任编辑 胥橙庭　董　颖　　　编辑热线 025-83592655

照　　排 南京南琳图文制作有限公司
印　　刷 扬中市印刷有限公司
开　　本 889×1194　1/16　印张10.75　字数318千
版　　次 2012年12月第1版　　2012年12月第1次印刷
ISBN 978-7-305-10869-3
定　　价 41.00元

发行热线 025-83594756　83686452
电子邮箱 Press@NjupCo.com
Sales@NjupCo.com(市场部)

# 乐训AP课程辅导教材编写委员会

# 序

AP是美国大学先修课程“Advanced Placement”的缩写；AP考试是由美国大学理事会(College Board)主办的全球性统一考试；AP教育则是一种国际通用的学分认证课程体系，其目的是让一些学有余力的高中生能够先行修读大学的基础课程，从而使这些优秀学生能够在进入大学之后免修这些课程，节省出更多的时间和精力去挑战其他更感兴趣的课程。此外，合格的AP考试成绩也往往是进入世界名校更有力的筹码。事实上，由于AP课程的学术性与大学低年级阶段相同课程的要求是同样的，所以在北美乃至世界其他国家的大学招生过程中，AP考试成绩通常被作为衡量学生学习能力的重要标准之一。

近年来，随着我国高等教育国际化和全球化趋势的快速发展，越来越多的高中生致力于赴北美及欧洲名校深造，越来越多的中国家长愿意把孩子送出国门，去国外接受高等教育，及早培养孩子的国际视野，为今后参与全球化社会的竞争打下坚实的基础。在此背景下，AP课程在中国也逐渐引起学校、家长和学生的更多关注。美国AP教育模式在规定统一标准性的同时，又具有极大的灵活性。一方面，每年的AP课程考试是全球统一的，合格标准是不变的，因此保证了课程所内蕴的学术性内涵；另一方面，课程教材、教学体系、教学方法、课堂评价等各种具体的课程教学活动却又是可以自行设计、因地制宜的。那么，如何设计出适合中国学生认知特点、符合中国学生文化背景、但又不失学术水准的高质量AP课程与教材，就成为了当前亟待解决的重要问题之一。

然而，AP教育在中国尚无先例，目前我国高等教育与中等教育的衔接问题还没有形成制度性的改革行动。其中跨文化教育问题更需要教育研究者和实践者共同努力和探索。乐训文教基金会长期致力于宣传、推广和实施AP课程，并在AP课程、教材、教学的本土化上做了大量的探索。近年来，每年有众多学生通过乐训文教基金会接受了AP教育，并由此成功地踏上欧美名校的求学之路。考虑到今后AP课程的更高质量的可持续发展，乐训文教基金会开始与南京大学教师和中学教师合作，进行相关课程和教材的开发工作。我们希望，也相信乐训文教基金会能把这项工作做好，让AP课程在中国大地上能不断结出丰硕的果实；我们也愿意与乐训一起，在进行美国框架下的AP课程开发的同时，对我国自己的AP课程进行研究，探索我国高等教育与中等教育衔接的课程模式。

总体而言，已经出版的系列教材，紧扣AP考试大纲，能够根据高中生的认知与情意特点，使用浅显易懂的语言和生动的案例来讲解抽象的学术理论。而且，教材采取中英文结合的编写方式，既考虑中国学生的学习习惯和基础，又适当地引入英文语境。例如在“重要名词解释”、大多数图表和习题中都采用英文表述。

南京大学教育研究院与美国乐训文教基金会的合作既是高等教育国际化的产物，也是教育研究为社会服务的初步尝试。我们认为，与美国乐训文教基金会的合作可以提高我们对高等教育与中等教育衔接问题的研究水平，提升我们国际化人才培养模式的水平，促进我们的研究工作更好地与社会需求接轨，进一步转变我们的学术研究范式，提高教育研究的实用性。我们希望通过我们的真诚合作能够为推进中国教育改革与发展做一点贡献。

南京大学教育研究院　张红霞

2012-10-8

# 绪论 Introduction

物理学是一门自然科学，主要研究物质以及物质在时空中的运动和所有相关概念。更广义地说，物理学是对大自然的研究分析，目的是为了要明白自然的行为。

物理学是最古老的学术之一。从双脚站立、使用工具的那一刻开始，人类就一直在对自然界规律进行探索和应用，物理学发展史和人类发展史一样古老。不过，在过去的两千年，物理学与哲学、化学等经常被混淆在一起，相提并论，直到16世纪之后，才单独成为一门现代科学。

现在，物理学已成为自然科学中最基础的学科之一。物理理论通常是以数学的形式表达出来。经过大量严格的实验验证的物理学规律被称为物理定律。然而，如同其他很多自然科学理论一样，这些定律不能被证明，其正确性只能靠反复的实验来检验。

物理学的影响深远，这是因为物理学的突破时常会造成新科技的出现，物理学的新点子很容易会引起其他学术领域产生共鸣。例如，在电磁学的进展中，直接导致像电视、电脑、家用电器等新产品，大幅度地提升了整个社会的生活水平；核裂变的成功，使得核能发电不再是梦想。

物理学的本质：物理学并不研究自然界现象的机制（或者根本不能研究），只能在某些现象中感受自然界的规则，并试图以这些规则来解释自然界所发生的任何事情。我们有限的智力总试图在理解自然，并试图改变自然，这是物理学甚至是所有学科所共同追求的目标。

AP考试系列教程

# 目录

Contents

# 第一章 预备知识

数学是大自然表达其定律所使用的语言，物理学也同样必须依赖数学的工具与架构来精确地表述物理定律、预测定量结果。因此，一些数学工具的掌握和使用在物理学的学习和应用中是必不可少的。

## 1. 坐标系(Coordinates)

对于一个 $n$ 维系统，使每一个点和一组($n$ 个)数值构成一一对应的系统。

坐标系可以用一个有序多元数组表示一个点的位置。坐标系可以使几何的问题转换为代数的问题，也可以使代数的问题转换成几何的问题。

在物理学中，使用坐标系可以将一些物理量采用数字或数组表示和运算。因此，采用坐标系来分析物理现象和问题是重要的方法。

**常见的几种坐标系**

**数线**(Number line)：数线是最简单的坐标系，用一个实数表示一个点在线上的位置，如图 1－1 所示。数线中有一个原点 $O$ 以及单位长度及其方向。点 $P$ 的坐标为从原点 $O$ 到点 $P$ 的有符号距离，坐标是正值或负值则依 $P$ 点在原点的哪一侧来决定。数线上每一个点都有唯一的坐标，每一个实数也都可以在数线上找到唯一的对应点。对一维直线运动的情况，通常采用数线坐标来描述物体的运动参量。

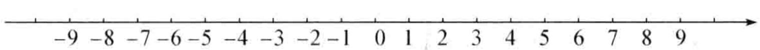



**图 1－1 数线**

**2D 直角坐标系**(Cartesian coordinates)：在平面上，选定两条互相垂直的有向直线为坐标轴，任一点的坐标可用该点到两坐标轴的有符号距离组成的数组来表示。其中该点到 $x$ 轴的有符号距离为该点的 $y$ 坐标，到 $y$ 轴的有符号距离为该点的 $x$ 坐标，如图 1－2 所示，带括号的数组即为相应点的坐标，原点的坐标为(0,0)。

**3D 直角坐标系**：选定三条两两互相垂直的有向直线为坐标轴，空间任一点距某两条直线构成的平面的有符号距离为第三个轴对应的坐标，即到 $yz$ 平面的有符号距离为该点的 $x$ 坐标，到 $zx$ 平面的有符号距离为该点的 $y$ 坐标，到 $xy$ 平面的有符号距离为该点的 $z$ 坐标，如图 1－3 所示。图中 $P$

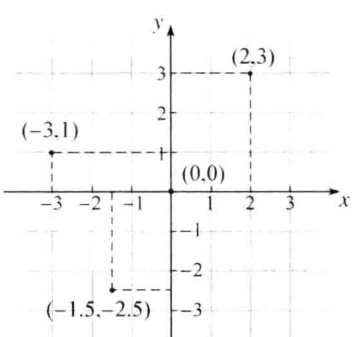



**图 1－2 2D 直角坐标系**

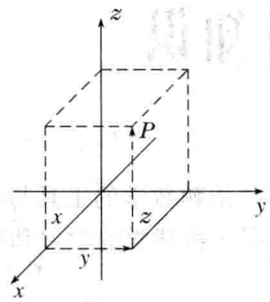



图 1－3　3D 直角坐标系

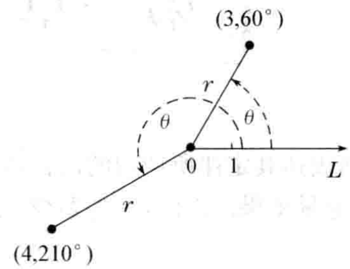



图 1－4　极坐标系

点的坐标即为$(x,y,z)$。

**极坐标系(Polar coordinates)**：极坐标系也是一种常用的平面坐标系统。先定一点为极点，再将一条通过极点的射线定为极轴。若给定一角度$\theta$，则可绘出通过极点和极轴夹角为$\theta$的唯一射线(角度是从极轴开始，依逆时针方向旋转到射线)；若再给定一实数$r$，可找出上述射线上距极点距离为有正负号的实数$r$的一点。如图 1－4 所示，两点的极坐标分别为$(3,60°)$和$(4,210°)$。

在极坐标系中，一坐标$(r,\theta)$只对应唯一的一点，但每一点均可对应多个坐标。例如，坐标$(r,\theta)$、$(r,\theta+2\pi)$及$(-r,\theta+\pi)$都是对应同一点的不同坐标。而极点的坐标为$(0,\theta)$，$\theta$可为任意值。图 1－4 中$(3,60°)$所对应的点，其坐标也可以写为$(3,420°)$、$(-3,240°)$等。

其他一些坐标系在书中相关内容处会有具体介绍。

**例题 1－1**　(1) 小明每天上学，学校在家北偏东 30°方向 5 km 处。若以小明家为坐标原点建立直角坐标系，东西方向为$x$轴(东为$x$正方向)，南北方向为$y$轴(北为$y$正方向)，则学校的坐标为多少？若以小明家为极点，正东方向为极轴方向，则学校在此极坐标系的坐标为多少？

(2) 某天，小明从学校放学后去同学小亮家玩，小亮家在学校正西方 5 km 处。则按照(1)问中建立的直角坐标系和极坐标系，小亮家的坐标分别为多少？

**解**：(1) 如图 1－5(a)所示，在直角坐标系中，$A$ 点为学校位置。

因为$\angle yOA=30°=\frac{\pi}{6}$，所以$\angle AOx=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$。

所以$x_A=5\cos\frac{\pi}{3}=\frac{5}{2}$，$y_A=5\sin\frac{\pi}{3}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$。

即 $A$ 点(学校)在直角坐标系的坐标为$\left(\frac{5}{2},\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$。

如图 1－5(b)所示，在极坐标系中，以 $Ox$ 为极轴，$\angle AOx=\frac{\pi}{3}$，$|OA|=5$。

因此，$A$ 点(学校)在极坐标系的坐标为$\left(5,\frac{\pi}{3}\right)$。

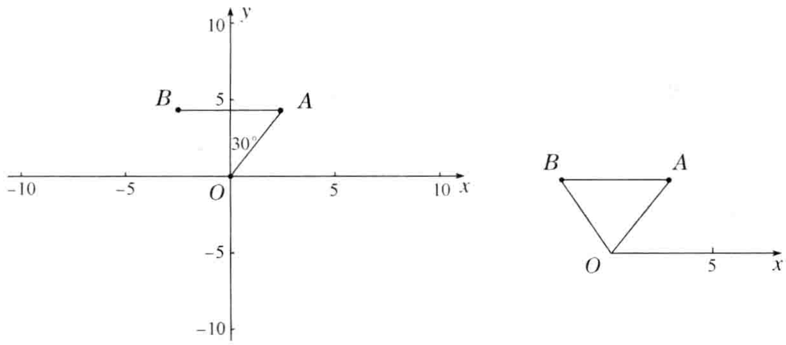
(2) 如图 1－5(a)所示，在直角坐标系中，$B$ 点(小亮家)在 $A$ 点正西方 5 km 处。

所以$y_B=y_A=\frac{5\sqrt{3}}{2}$，$x_B=x_A-5=-\frac{5}{2}$。

即 $B$ 点(小亮家)在直角坐标系的坐标为$\left(-\frac{5}{2},\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$。

如图 1－5(b)所示，在极坐标系中，对 $B$ 点：

$$|OB|=\sqrt{x_B^2+y_B^2}=\sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2}=5$$




(a) 直角坐标系情况　　　　(b) 极坐标系情况

**图 1-5　例题 1-1 图**

$$\angle BOx=\pi-\arcsin\frac{y_B}{|OB|}=\pi-\arcsin\frac{\frac{5\sqrt{3}}{2}}{5}=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$$

即 $B$ 点（小亮家）在极坐标系的坐标为 $\left(5,\frac{2}{3}\pi\right)$。

## 2. 矢量(Vectors)

大部分物理量一般可分为两类：一类如时间、能量、电流等，只考虑数值大小（包括符号）就可以了，这类物理量称为标量；另一类如力、速度、电场强度等，不仅要考虑数值大小，还必须要考虑空间方向，这类物理量称为矢量。

**(1) 矢量的表示**

矢量的几何表示：矢量可以用空间中的有向线段表示，线段的空间方向即为矢量的方向，线段的长度表示矢量大小。矢量的代数表示：在坐标系中，可以用一组数据来表示矢量。一般可以将矢量的起点移动到坐标原点，用矢量终点的坐标来表示矢量。如图 1-6 所示，位置矢量 $\boldsymbol{r}$（矢量书写时，在书本中常采用粗体字母表示，如 $\boldsymbol{r}$，也可用在字母上加一个箭头的方式表示，如 $\vec{r}$）对应于坐标 $(x,y,z)$，即 $x$、$y$、$z$ 分别为 $\boldsymbol{r}$ 沿三个坐标轴的分量。

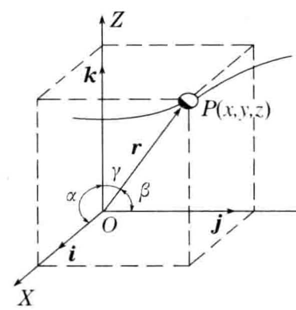



**图 1-6　矢量的表示**

也可以引入沿坐标轴正方向的单位矢量 $\boldsymbol{e}_i\,(i=1,2,3,\cdots)$，则任意矢量可写成各方向分量和相应单位矢量乘积之和的形式：

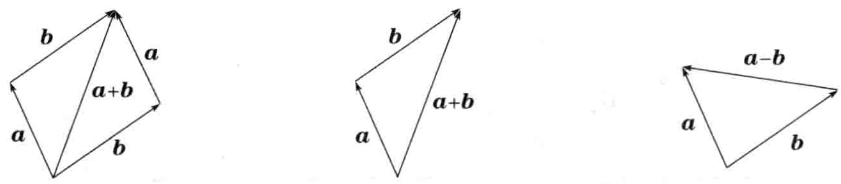
$$\mathbf{A}=A_1\boldsymbol{e}_1+A_2\boldsymbol{e}_2+A_3\boldsymbol{e}_3$$

在直角坐标系中，沿 $x$、$y$、$z$ 方向的单位矢量一般写成 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 的形式，则任意矢量可写为 $\mathbf{A}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k}$，其中 $A_x$、$A_y$、$A_z$ 分别为矢量 $\mathbf{A}$ 的 $x$ 方向分量、$y$ 方向分量、$z$ 方向分量。矢量的大小：

$$A=|\mathbf{A}|=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}$$

**(2) 矢量运算**

矢量的加、减法：几何上，采用三角形法则或平行四边形法则进行处理。对加法情况，如图 1-7(a)所示，以两个加数矢量为邻边构成平行四边形，则其对角线即为和矢量，此即矢量加法的平行四边形方法；如图 1-7(b)所示，或将两个加数矢量首尾相连，则以第一个矢量的起点为起点，以第二个矢量的终点为终点的矢量即为两个矢量的和矢量，此即矢量加法的三角形方法。对减法情况，如图 1-7(c)所示，将两矢量起点相连构成三角形，则三角形的另一边即可表示差矢量（方向由减数矢量终




(a) 矢量加法的平行四边形方法　(b) 矢量加法的三角形方法　(c) 矢量减法的三角形方法

**图 1-7　矢量的加减法的几何方法**

点指向被减数矢量终点）。代数上，两个矢量的和或差在各方向的分量等于两个矢量各方向分量的和或差：

$$\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}=(A_x\pm B_x)\boldsymbol{i}+(A_y\pm B_y)\boldsymbol{j}+(A_z\pm B_z)\boldsymbol{k}$$

**(3) 矢量的乘法**

标量和矢量的乘法：一个标量和一个矢量的乘积结果仍为矢量，该矢量各方向的分量等于乘数矢量的各方向分量乘以标量的积：

$$\lambda\boldsymbol{A}=\lambda A_x\boldsymbol{i}+\lambda A_y\boldsymbol{j}+\lambda A_z\boldsymbol{k}$$

两个矢量之间的乘法有两种运算形式，一种称为点乘，一种称为叉乘。

矢量的点乘运算(Dot product)：两个矢量点乘运算的结果为一个标量，称为点积（或标积），大小为两个矢量各分量的乘积之和：

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$

也有 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=AB\cos\theta$，即两个矢量的点积等于两个矢量大小的乘积再乘以两矢量夹角的余弦值。

矢量的叉乘运算(Cross product)：两个矢量叉乘运算一般仅针对三维空间矢量，结果仍为一个矢量，称为叉积（或矢积）。叉乘运算比较复杂，运算方式如下：

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=(A_yB_z-A_zB_y)\boldsymbol{i}+(A_zB_x-A_xB_z)\boldsymbol{j}+(A_xB_y-A_yB_x)\boldsymbol{k}$$

叉积的大小也可由下式计算：

$$|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|=AB\sin\theta$$

即叉积的大小等于两个矢量大小的乘积再乘以两矢量夹角的正弦值。

叉积的方向可由右手定则确定：叉积的方向总是和两个矢量都垂直，或垂直于两个矢量所在的平面，具体方向为令右手四指由矢量 $\boldsymbol{A}$ 经小于 180°的角绕向矢量 $\boldsymbol{B}$ 时（或食指指向矢量 $\boldsymbol{A}$ 的方向，中指指向矢量 $\boldsymbol{B}$ 的方向），大拇指所指的方向即为叉积的方向，如图 1-8 所示。

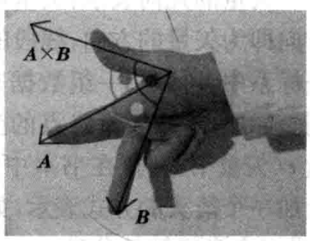



**图 1-8　矢量叉乘的右手定则**

**例题 1-2**　已知两个矢量：$\boldsymbol{A}=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{B}=4\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$。求：

(1) $2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，$3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}$；

(2) $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$，$(2\boldsymbol{A})\cdot(3\boldsymbol{B})$；

(3) $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$，$(2\boldsymbol{A})\times(3\boldsymbol{B})$。

**解**：(1) $2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=2(3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k})+(4\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})=(6\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k})+(4\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})$

$=(6+4)\boldsymbol{i}+(4+5)\boldsymbol{j}+(8+3)\boldsymbol{k}=10\boldsymbol{i}+9\boldsymbol{j}+11\boldsymbol{k}$

$3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}=3(3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k})-2(4\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})$

$=(9\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}+12\boldsymbol{k})-(8\boldsymbol{i}+10\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k})=\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$

(2) $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=(3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k})\cdot(4\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})$

$=3\times4+2\times5+4\times3=12+10+12=34$

$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}=(4\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})\cdot(3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k})$

$=4\times3+5\times2+3\times4=12+10+12=34$

可见，$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$，即矢量点乘满足交换律，矢量间点乘的结果与顺序无关。

$$\begin{aligned}(2\boldsymbol{A})\cdot(3\boldsymbol{B})&=[2(3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k})]\cdot[3(4\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})]\\&=(6\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k})\cdot(12\boldsymbol{i}+15\boldsymbol{j}+9\boldsymbol{k})\\&=6\times12+4\times15+8\times9=72+60+72=204\end{aligned}$$

显然，$(2\boldsymbol{A})\cdot(3\boldsymbol{B})=204=6\times34=6\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$。

(3) $$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}&=(3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k})\times(4\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})\\&=(2\times3-4\times5)\boldsymbol{i}+(4\times4-3\times3)\boldsymbol{j}+(3\times5-2\times4)\boldsymbol{k}\\&=-14\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}&=(4\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})\times(3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k})\\&=(5\times4-3\times2)\boldsymbol{i}+(3\times3-4\times4)\boldsymbol{j}+(4\times2-5\times3)\boldsymbol{k}\\&=14\boldsymbol{i}-7\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

显然，$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$，即矢量叉乘不满足交换律。矢量叉乘的结果和顺序有关，两矢量交换顺序所得的结果和原结果符号相反。

$$\begin{aligned}(2\boldsymbol{A})\times(3\boldsymbol{B})&=[2(3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k})]\times[3(4\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})]\\&=(6\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k})\times(12\boldsymbol{i}+15\boldsymbol{j}+9\boldsymbol{k})\\&=(4\times9-8\times15)\boldsymbol{i}+(8\times12-6\times9)\boldsymbol{j}+(6\times15-4\times12)\boldsymbol{k}\\&=-84\boldsymbol{i}+42\boldsymbol{j}+42\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

显然，$(2\boldsymbol{A})\times(3\boldsymbol{B})=-84\boldsymbol{i}+42\boldsymbol{j}+42\boldsymbol{k}=6(-14\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k})=6\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$。

## 3. 微积分(Calculus)

### (1) 微分

微分又称导数，描述物理量或数学函数变化的相对快慢程度。对于任意函数 $y=f(x)$，当 $x$ 发生变化时，$y$ 也随之发生变化，变化的平均速度可用$\frac{\Delta y}{\Delta x}$来表示；当 $x$ 变化量趋于无限小时，这一比值的极限我们称之为 $y$(或函数 $f(x)$)对 $x$ 的微分：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

几种常见简单函数的微分如表 1-1 所示。

**表 1-1 几种常见简单函数的微分**

| |
|---|
| $\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}=0$($C$ 为常数) |
| $\frac{\mathrm{d}(x^a)}{\mathrm{d}x}=ax^{a-1}$ |
| $\frac{\mathrm{d}(a^x)}{\mathrm{d}x}=a^x\ln a$ |
| $\frac{\mathrm{d}(\log_a x)}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x\ln a}$ |
| $\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\mathrm{d}x}=\cos x$ |
| $\frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\mathrm{d}x}=-\sin x$ |

复杂函数的微分运算如下列公式所示：

$$\frac{\mathrm{d}(y\pm z)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\pm\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$$

$$\frac{\mathrm{d}(yz)}{\mathrm{d}x}=z\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$$

$$\frac{\mathrm{d}\left(\frac{y}{z}\right)}{\mathrm{d}x}=\frac{z\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}}{z^2}$$

复合函数的微分运算：

设 $y=f(u)$，$u=g(x)$，则$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\times\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$。

**(2) 积分**

积分运算为微分运算的逆运算，即找出什么函数的微分运算结果为当前函数。

关于微积分的具体内容参见 AP 微积分课程。

矢量的微积分运算相当于对各方向分量分别单独进行微积分运算。如：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}A_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}A_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

**例题 1－3** 若一物体做直线运动，离开原点的位置坐标随时间的变化函数可写为 $x=t^3$。速度为位置坐标对时间的微分，加速度为速度函数对时间的微分。

(1) 求该物体运动的速度和加速度随时间变化的函数。

(2) 若物体运动的函数为 $x=\sin^2 t$，则物体运动的速度和加速度为多少？

**解：**(1) 由 $x=t^3$，得

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(t^3)}{\mathrm{d}t}=3t^2$$

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(3t^2)}{\mathrm{d}t}=6t$$

(2) $x=\sin^2 t$

令 $u=\sin t$，即 $x=u^2$。故

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

而$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}=\frac{\mathrm{d}(u^2)}{\mathrm{d}u}=2u=2\sin t$，$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(\sin t)}{\mathrm{d}t}=\cos t$。

因此，可得

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=2\sin t\cos t$$

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(2\sin t\cos t)}{\mathrm{d}t}=2\left[\frac{\mathrm{d}(\sin t)}{\mathrm{d}t}\cos t+\sin t\frac{\mathrm{d}(\cos t)}{\mathrm{d}t}\right]=2(\cos^2 t-\sin^2 t)$$

求加速度的另一种方法：因为 $v=2\sin t\cos t=\sin(2t)$，所以

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(\sin(2t))}{\mathrm{d}t}=2\cos(2t)=2(\cos^2 t-\sin^2 t)$$

两种方法的运算结果是一致的。

**(3) 偏微分计算**

有时一个函数会与多个变量有关。例如电场强度 $\boldsymbol{E}$，其大小与空间位置有关，即为空间坐标$(x,y,z)$的函数，随着 $x$、$y$ 及 $z$ 的变化都会发生变化。对这种情况，有时我们采用偏微分的概念，即在某处，设定其他参量不发生变化，仅有一个自变量在变化的时候函数的变化情况，称为函数对这一自变量的偏微分。例如设定 $y$、$z$ 都不变，仅 $x$ 在变化时，电场强度大小 $E$ 的相应变化率称为 $E$ 对 $x$ 的偏微分，写作$\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)_{y,z}$，表示 $y$、$z$ 不变情况下 $E$ 对 $x$ 的微分，有时也忽略下标，直接写为$\frac{\partial E}{\partial x}$。分析电场、磁场等受到多自变量影响的函数常会使用偏微分的概念。

可以定义矢量微分算符 $\boldsymbol{\nabla}=\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$。

矢量微分算符 $\boldsymbol{\nabla}$ 既有矢量的特性，即和矢量进行乘法运算时要遵循矢量乘法的运算要求，但同时又是一个微分计算算符，要对算符后的物理量进行微分计算。

矢量微分算符 $\boldsymbol{\nabla}$ 的用法一般有三种：

第一种，对标量函数的计算。若有一标量函数 $\varphi(x,y,z)$，则可用 $\boldsymbol{\nabla}$ 对该函数进行计算，计算结果为一矢量 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$：

$$\boldsymbol{A}(x,y,z)=\boldsymbol{\nabla}\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

这一运算又称为梯度运算。上式中可称矢量函数 $\boldsymbol{A}$ 为标量函数 $\varphi$ 的梯度。

第二种，对矢量函数的点乘计算。若有一矢量函数 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$，则可用 $\boldsymbol{\nabla}$ 对该函数进行点乘计算，计算结果为一标量 $\varphi(x,y,z)$：

$$\varphi(x,y,z)=\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

这一运算又称为散度运算。上式中可称标量函数 $\varphi$ 为矢量函数 $\boldsymbol{A}$ 的散度。

第三种，对矢量函数的叉乘计算。若有一矢量函数 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$，则可用 $\boldsymbol{\nabla}$ 对该函数进行叉乘计算，计算结果为一矢量 $\boldsymbol{B}(x,y,z)$：

$$\boldsymbol{B}(x,y,z)=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

这一运算又称为旋度运算。上式中可称矢量函数 $\boldsymbol{B}$ 为矢量函数 $\boldsymbol{A}$ 的旋度。

**例题 1-4**　一质点在某力场中所具有的势能随空间的变化函数可写为 $E_{\mathrm{p}}=x^4+3y^2z^2$。与势能相对应的力在各方向的分量分别等于势能函数对该方向的偏微分的负值。求该力场函数及该质点在(1,2,3)、(2,2,2)各点处受到的作用力的情况。

**解**：由于力在各方向的分量分别等于势能函数对该方向的偏微分的负值，有

$$F_x=-\frac{\partial E_{\mathrm{p}}}{\partial x}=-4x^3$$

$$F_y=-\frac{\partial E_{\mathrm{p}}}{\partial y}=-6yz^2$$

$$F_z=-\frac{\partial E_{\mathrm{p}}}{\partial z}=-6y^2z$$

即 $\boldsymbol{F}=-\boldsymbol{\nabla}E_{\mathrm{p}}=F_x\boldsymbol{i}+F_y\boldsymbol{j}+F_z\boldsymbol{k}=-4x^3\boldsymbol{i}-6yz^2\boldsymbol{j}-6y^2z\boldsymbol{k}$。

在(1,2,3)处，$\boldsymbol{F}=-4x^3\boldsymbol{i}-6yz^2\boldsymbol{j}-6y^2z\boldsymbol{k}=-4\boldsymbol{i}-108\boldsymbol{j}-72\boldsymbol{k}$；

在(2,2,2)处，$\boldsymbol{F}=-4x^3\boldsymbol{i}-6yz^2\boldsymbol{j}-6y^2z\boldsymbol{k}=-32\boldsymbol{i}-48\boldsymbol{j}-48\boldsymbol{k}$。

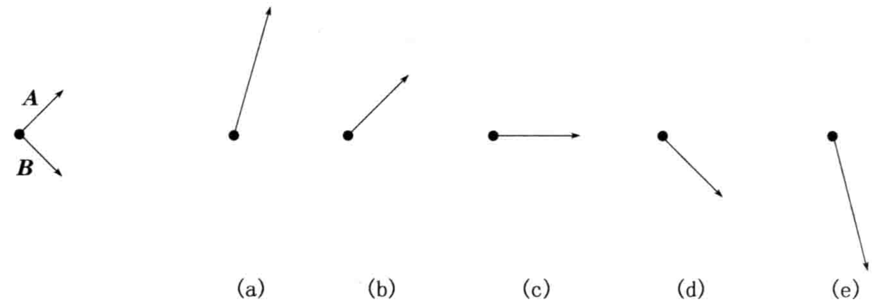
## 习　题

### Multiple-Choice Questions

1. Which figure shows $\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{A}_3$?

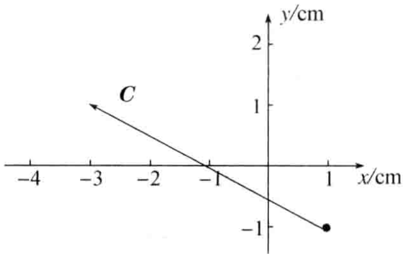

(a)　(b)　(c)　(d)　(e)

2. Which figure shows $2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$?




3. What are the $x$- and $y$-components $C_x$ and $C_y$ of vector $\boldsymbol{C}$?

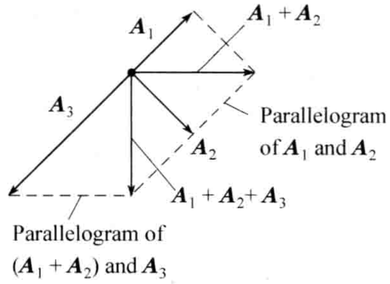
(a) $C_x=-3$ cm, $C_y=1$ cm
(b) $C_x=-4$ cm, $C_y=2$ cm
(c) $C_x=-3$ cm, $C_y=-1$ cm
(d) $C_x=-3$ cm, $C_y=2$ cm
(e) $C_x=1$ cm, $C_y=-1$ cm



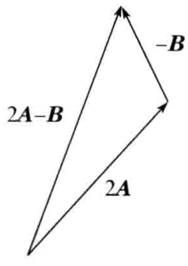

## 习题答案

### Multiple-Choice

1. (c) 对三个矢量的加法,只要按顺序先求出两个矢量的和,再和第三个矢量进行加法运算,得到最终结果。如图所示。




2. (a) 进行矢量减法运算时,可将要减去的矢量方向调转,变成相应的负值,再进行和此负值矢量的加法运算。如图所示。




3. (b) 对起点不在原点的矢量,可表示为终点坐标和起点坐标的差。对本题,起点坐标为(1,−1),终点坐标为(−3,1),因此矢量为$\boldsymbol{C}=(-3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})-(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j})=-4\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$。即$C_x=-4$,$C_y=2$。

# 第二章　运动学(Kinematics)

## 1. 质点与运动方程

自然界的一切物质都处在永恒的运动之中。物理学研究的就是物质运动的最基本、最普遍的形式,包括机械运动、电磁运动、热运动、原子及原子核内运动等。其中,机械运动是最简单、最基本的运动形式,一个物体相对于另一个物体的位置,或者一个物体内各部分间的相对位置随时间而变化的过程,称为机械运动。力学就是研究物体机械运动的规律及其应用的学科。

**(1) 质点(Mass point)**

任何物体都有一定的形状、大小和内部结构,即使是原子也不例外。一般情况下,物体运动时,其内部各部分的位置变化可能各不相同,甚至物体的大小和形状都可能发生变化,因此,理论上严格的质点是不存在的。但是,如果在我们研究的问题之中,物体的大小和形状不起作用,或者所起的作用非常微小以至于可以忽略不计时,我们就可以近似地把物体看做是一个具有质量但没有大小和形状的理想物体,称为质点。例如,研究地球绕太阳的公转运动时,我们一般可以忽略地球的大小和形状,把地球看做质点。但如果是要研究地球自转时,就必须要考虑地球本身的大小和形状的问题,不能把地球看做质点了。

集中精力抓住主要问题,而忽略一些影响很小的次要问题,是物理学研究中的一种常用方法。

**(2) 参考系和坐标系**

在自然界中,绝对独立的物体是不存在的。对任何物体,要描述其机械运动,必须选择其他物体作为参考,然后描述这一物体相对于参考物体是如何运动的。这一被选择的参考物体就是参考系。对任何物体的运动描述都离不开参考系。参考系的选择可以是任意的,但一般参考系的选择要有利于问题的研究。对同一物体的运动,可以选取不同的参考系;选取的参考系不同,对物体运动的描述就有可能不同。例如,在一辆匀速运动的火车上有一个自由掉落的物体,以火车为参考系,物体做直线运动;以地面为参考系,物体做抛物线运动;但若以一个在车厢中乱飞的苍蝇为参考系的话,物体的运动就可能非常复杂了。

有了参考系,要描述物体的运动,也就是要从数量上确定物体相对于参考系的位置及其变化,还需要在参考系上选用一个固定的坐标系。参考系的选择是谁去描述物体运动的问题,而坐标系的选取就是如何描述物体运动的问题。坐标系的选取一般是在参考系上选定一点作为坐标系的原点,取通过原点并标有长度的线作为坐标轴。常用的坐标系是直角坐标系,根据需要,也可以选用极坐标系、球坐标系、柱坐标系等其他坐标系。

**(3) 运动方程**

有了参考系和坐标系,我们就能描述一个物体在参考系中的位置 $P(x,y,z)$。当物体运动时,这一位置就会随时间 $t$ 发生变化,可以用时间的函数来描述:

$$x=x(t),y=y(t),z=z(t)$$

这一位置坐标随时间 $t$ 的变化函数我们就称之为运动方程。知道了物体的运动方程,我们就能确定物体在任意时刻的位置,从而确定物体的运动情况。将物体在不同时刻的位置在坐标系中连接起来,就可以描述出物体的运动曲线。也可从物体的运动方程中将时间 $t$ 消去,即可求出物体运动的轨迹方程。例如,自由落体的运动方程为

$$x=\frac{1}{2}gt^2$$