21世纪高等学校规划教材

复变函数与积分变换

闫焱 等 编著

清华大学出版社

21世纪高等学校规划教材

复变函数与积分变换

闫焱 阎少宏 张永利 赵慧娟 编著

清华大学出版社

内容简介

本书遵循教育部高等院校非数学类专业数学基础教学指导分委会修订的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，依据工科数学“复变函数与积分变换教学大纲”，结合该学科的发展趋势，在积累多年教学实践的基础上编写而成的。本书旨在培养学生的数学素质，提高其应用数学知识解决实际问题的能力，强调理论的应用性。本书共分8章，包括复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数、共形映射、傅里叶变换、拉普拉斯变换。每章均配习题及相关数学实验，书末附有习题参考答案。

本书适合高等院校工科各专业，尤其是自动控制、通信、电子信息、测控、机械工程、材料成型等专业作为教材，也可供科技、工程技术人员阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换/闫焱等编著. --北京：清华大学出版社，2013
21世纪高等学校规划教材
ISBN 978-7-302-33157-5
Ⅰ. ①复…　Ⅱ. ①闫…　Ⅲ. ①复变函数 ②积分变换　Ⅳ. ①O174.5 ②O177.6
中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第159610号

责任编辑：魏江江
封面设计：常雪影
责任校对：焦丽丽
责任印制：何　芊

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦A座　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
课 件 下 载：http://www.tup.com.cn，010-62795954
印 装 者：北京嘉实印刷有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　　张**：12.25　　**字　　数**：300千字
版　　次：2013年6月第1版　　**印　　次**：2013年6月第1次印刷
印　　数：1～3500
定　　价：25.00元

产品编号：054754-01

前言

FOREWORD

复变函数与积分变换是高等院校工科专业一门专业基础课，更是自然科学与工程技术中常用的数学工具。复变函数与积分变换是高等数学的理论推广，覆盖的知识面广，已经被广泛地应用于自然科学的众多领域，如理论物理学、电磁学、空气动力学、流体力学、弹性力学和自动控制学等领域。因此，复变函数与积分变换的基本理论与方法，对于高等院校工科学生、工程技术人员是必不可少的数学基础知识，有着重要的学习意义和应用价值。

本书遵循教育部高等学校“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，立足普通高等院校人才培养的需要，并结合近年来教改实践经验和工科部分专业课程内容改革的要求编写而成。

本书共8章，内容主要包括复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数、共形映射、傅里叶变换、拉普拉斯变换，并对各章精心设计了 Matlab 数学软件在复变函数与积分变换中的应用，适度嵌入了相关的数学实验课题。

本书结构严谨，逻辑清晰，对繁琐的理论推导进行了适度的约简。把握“科学、简约、实用”的原则，将现代数学的观点、思想、应用渗透其中，兼顾数学方法的物理意义与工程应用背景，通俗易懂，易教易学，体系安排与高等数学基本一致，注重与实变量函数的比较和分析，做到“实、复变函数打通”，强调二者的联系与变化，并利用数学软件和数学实验大大拓宽了复变函数与积分变换的应用范围。

我们希望通过学习本书，读者能初步掌握使用复变函数的方法和进行积分变换的技巧，能处理一些专业课程中的理论知识和实际问题。在编写过程中，我们注意到了与高等数学的衔接，在内容上力求概念形式和叙述的连续、延伸，同时更注意其中的创新和发展，这样使读者既感到内容的深化和拓展，又不会感到陌生而易于学习。另外，读者会体会到富有工科专业特色的内容安排。总之，本书便于读者课内外学习，易于培养读者的数学思维和感受数学的应用价值。

本书主要由闫淼、阎少宏、张永利组织编写，参与本书编写的还有赵慧娟、赵文静、曲博超。特别是河北联合大学的刘保相、金殿川和徐秀娟三位教授为本书的编写提出了很好的意见和建议，在此一并表示衷心感谢！

本书得以出版，要诚挚感谢河北联合大学教材指导委员会的支持，清华大学出版社的协作。由于水平有限，书中难免有疏漏之处，恳请广大读者批评指正，不胜感激。电子邮箱：yansxjm@126.com。

编著者

2013年3月

目录

CONTENTS

第1章

复数与复变函数

复变函数研究的对象是复数变量之间的函数关系.关于复数,在中学代数中已有论述,但为了今后讨论问题方便,这里我们先介绍复数的概念、性质及其四则运算,然后再进一步介绍复变函数及其极限和连续的概念.

1.1 复数的概念与运算

1.1.1 复数的概念

由于解代数方程的需要,在16世纪中叶,意大利数学家Cardan把复数引进了数学.18世纪时,数学家欧拉(Euler)首先引入记号i,随后复数研究有了迅速的发展,数学研究从实数领域扩展到复数领域.

二次方程 $x^2+1=0$ 在实数范围内显然无根,规定一个新数i满足方程 $x^2+1=0$,这个数i称为虚数单位,并有 $i^2=-1$.这样,方程 $x^2+1=0$ 就有两个根i和$-$i.

定义 1.1 形如 $z=x+iy$ 或 $z=x+yi$ 的数称为复数,其中 x 和 y 为两个实数,分别称为复数 z 的实部和虚部,并记为 $x=\mathrm{Re}(z)$,$y=\mathrm{Im}(z)$.

定义 1.2 当虚部 $y=0$ 时,复数 z 就是实数;当实部 $x=0$ 且虚部 $y\neq0$ 时,复数 $z=iy$ 称为纯虚数;两个复数 $z_1=x_1+iy_1$ 与 $z_2=x_2+iy_2$ 相等,当且仅当 z_1 和 z_2 的实部与虚部分别对应相等,即 $x_1=x_2$,$y_1=y_2$.

【注】 两个实数可以比较大小,而两个复数不能比较大小,因而复数是无序的.

1.1.2 复数的代数运算及运算性质

设两个复数 $z_1=x_1+iy_1$,$z_2=x_2+iy_2$,则两个复数的四则运算规定如下:

$$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2)$$

$$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2},\quad 其中\ z_2\neq0$$

称实部相同而虚部互为相反数的两个复数为一对共轭复数,记为 $\bar{z}$.显然,共轭复数的概念是相互的,即 $\overline{(\bar{z})}=z$.若 $z=x+iy$,则 $\bar{z}=x-iy$.利用共轭复数可以得到:

$$x=\mathrm{Re}(z)=\frac{z+\bar{z}}{2},\quad y=\mathrm{Im}(z)=\frac{z-\bar{z}}{2i}$$

由复数代数运算的定义,不难验证以下复数的运算性质:

(1) 封闭性,即复数的四则运算的结果仍然是一个复数.

(2) 加法交换律

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

(3) 加法结合律

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$

(4) 乘法对加法的分配律

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$$

(5) 乘法交换律与结合律

$$z_1 z_2 = z_2 z_1 \quad 及 \quad (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$$

(6) 共轭运算的性质

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, \quad 其中\ z_2 \neq 0$$

$$z\bar{z} = [\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2$$

【例 1.1】 实数 m 取何值时，复数 $z=(m^2-3m-4)+(m^2-5m-6)\mathrm{i}$ 是：(1)实数；(2)纯虚数.

【解】 令 $x=m^2-3m-4$，$y=m^2-5m-6$.

(1) 如果复数是实数，则 $y=0$. 由 $y=m^2-5m-6=0$ 得：$m=6$ 或 $m=-1$.

(2) 如果复数是纯虚数，则 $x=0$，$y\neq 0$. 由 $x=m^2-3m-4=0$ 得：$m=4$ 或 $m=-1$. 但由 $y\neq 0$ 知，$m=-1$ 应舍去，即只有 $m=4$.

【例 1.2】 设 $z=\dfrac{1-2\mathrm{i}}{3+4\mathrm{i}}$，求 $\bar{z}$ 及 $z\bar{z}$.

【解】 因为 $z=\dfrac{(1-2\mathrm{i})(3-4\mathrm{i})}{(3+4\mathrm{i})(3-4\mathrm{i})}=\dfrac{-5-10\mathrm{i}}{25}=-\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{5}\mathrm{i}$，所以

$$\bar{z}=-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\mathrm{i}, \quad z\bar{z}=\left(-\frac{1}{5}\right)^2+\left(-\frac{2}{5}\right)^2=\frac{1}{5}$$

1.1.3 复数的几何表示

在平面解析几何中，取定一直角坐标系 xoy 后，可用一有序实数对 (x,y) 表示平面中任何一点 P，并称 (x,y) 为 P 点的坐标，其中 x 为横坐标，y 为纵坐标. 而当我们考察一复数 $z=x+y\mathrm{i}$ 时，可以看出它与坐标平面上的点 $P(x,y)$ 在表示上是一致的，都可以用一有序实数对来表示.

定义 1.3 复数的全体和平面上的点的全体之间形成了一一对应的关系，我们称坐标平面为复数平面，简称复平面或 z 平面，x 轴为实轴，y 轴为虚轴.

复数还可以用平面向量来表示，如图 1.1 所示. 任一复数 $z=x+y\mathrm{i}(z\neq 0)$ 可以看做以 x 为水平分量，以 y 为垂直分量的平面向量 $\overrightarrow{OP}$，同样，复数 $z=x+y\mathrm{i}(z\neq 0)$ 的实部 x 和虚部 y 也可以看做平面向量 $\overrightarrow{OP}$ 在两坐标轴上的投影.

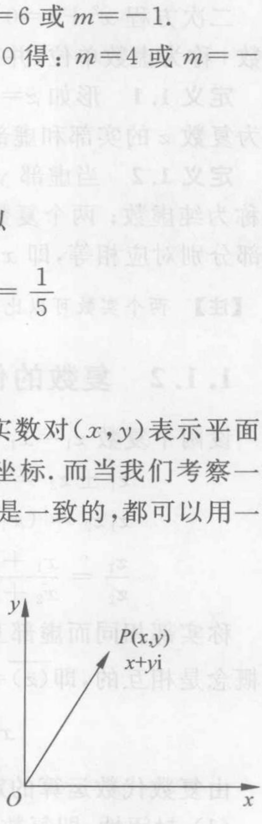

图 1.1

定义 1.4　向量$\overrightarrow{OP}$的长度称为复数$z=x+y\mathrm{i}$的模或绝对值，记作$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}$.

显然，下列各式成立：

$$|x|\leqslant|z|,\quad |y|\leqslant|z|,\quad |z|\leqslant|x|+|y|,$$
$$z\bar{z}=|z|^2=|z^2|=[\mathrm{Re}(z)]^2+[\mathrm{Im}(z)]^2$$

复数的加减法与向量的加减法是完全一致的，也可以用平行四边形法则求出. 从图 1.2 中不难得到，$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$. 从图 1.3 中不难得到，$|z_1-z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||$.

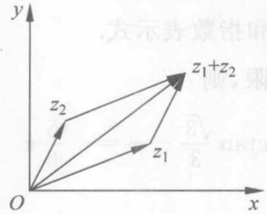

图　1.2

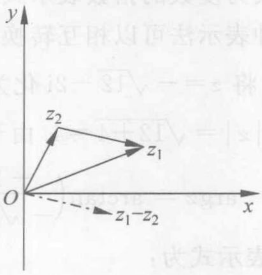

图　1.3

定义 1.5　当$z\neq0$时，以正实轴为始边，以向量$\overrightarrow{OP}$为终边的角的弧度数θ称为z的辐角，记作$\mathrm{Arg}z=\theta$. 在$z(\neq0)$的辐角中，我们把满足$-\pi<\theta_0\leqslant\pi$的$\theta_0$称为$\mathrm{Arg}z$的主值，记作$\theta_0=\arg z$. 如图 1.4 所示.

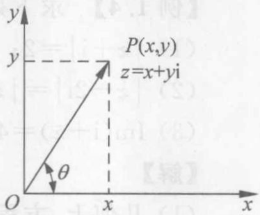

图　1.4

【注】

(1) $\tan(\mathrm{Arg}z)=\dfrac{y}{x}$；

(2) $\mathrm{Arg}z$可取无穷多个值，彼此相差$2k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. 如果$\theta$是辐角中的一个，则有

$$\mathrm{Arg}z=\theta+2k\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

特别地，$\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$. 这时，任意复数$z=x+y\mathrm{i}$可以表示为

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2},\quad \mathrm{Arg}z=\theta+2k\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

(3) 若有两个复数z_1和z_2，且$z_1,z_2\neq0$，则$z_1=z_2$的充要条件是$|z_1|=|z_2|$，$\mathrm{Arg}z_1=\mathrm{Arg}z_2$

(4) 复数 0 可以看做零向量，其辐角不确定. 以后凡涉及复数的辐角都是就非零复数而言的.

当复数位于不同象限或坐标轴上时，可以由反正切$\arctan\dfrac{y}{x}$的值求出辐角主值：

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}, & x>0\\[2mm] \dfrac{\pi}{2}, & x=0,y>0\\[2mm] \arctan\dfrac{y}{x}+\pi, & x<0,y\geqslant0\\[2mm] \arctan\dfrac{y}{x}-\pi, & x<0,y<0\\[2mm] -\dfrac{\pi}{2}, & x=0,y<0\end{cases}$$

其中 $z\neq 0$，$-\dfrac{\pi}{2}<\arctan\dfrac{y}{x}<\dfrac{\pi}{2}$.

利用直角坐标与极坐标的关系：$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，可以把 z 表示成

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$$

我们称这种形式为复数的三角表示式.

再利用欧拉公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$，还可以把 z 表示成

$$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

我们称这种形式为复数的指数表示式.

复数的各种表示法可以相互转换，以适应讨论不同问题时的需要.

【例 1.3】 将 $z=-\sqrt{12}-2\mathrm{i}$ 化为三角表示式和指数表示式.

【解】 $r=|z|=\sqrt{12+4}=4$. 由于 z 在第三象限，则

$$\arg z=\arctan\left(\frac{-2}{-\sqrt{12}}\right)-\pi=\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}-\pi=-\frac{5}{6}\pi$$

因此，z 的三角表示式为：

$$z=4\left[\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)\right]$$

z 的指数表示式为 $z=4\mathrm{e}^{-\frac{5}{6}\pi\mathrm{i}}$.

【例 1.4】 求下列方程所表示的曲线：

(1) $|z+\mathrm{i}|=2$；

(2) $|z-2\mathrm{i}|=|z+2|$；

(3) $\mathrm{Im}(\mathrm{i}+\bar{z})=4$.

【解】

(1) 几何上，方程 $|z+\mathrm{i}|=2$ 表示所有与点 $-\mathrm{i}$ 距离为 2 的点的轨迹，即中心为 $-\mathrm{i}$，半径为 2 的圆，如图 1.5(a)所示，代数方程为：$x^2+(y+1)^2=4$.

(2) 几何上，方程 $|z-2\mathrm{i}|=|z+2|$ 表示到点 $2\mathrm{i}$ 和 -2 距离相等的点的轨迹，则方程表示的曲线就是连接点 $2\mathrm{i}$ 和 -2 的线段的垂直平分线，如图 1.5(b)所示，代数方程为：$y=-x$.

(3) 设 $z=x+\mathrm{i}y$，那么 $\mathrm{i}+\bar{z}=x+(1-y)\mathrm{i}$，所以 $\mathrm{Im}(\mathrm{i}+\bar{z})=1-y=4$，从而所求曲线方程为：$y=-3$. 这是一条平行于 x 轴的直线，如图 1.5(c)所示.

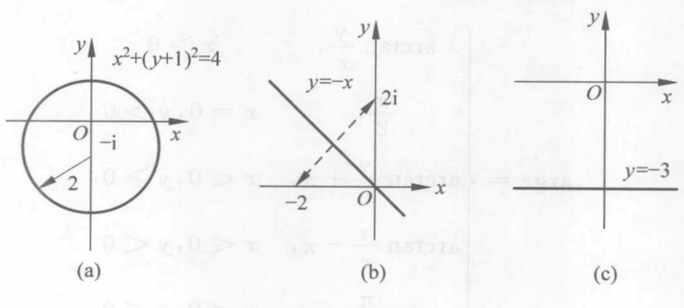

图 1.5

1.1.4 复球面

在实数域中，曾经引进了无穷大的概念，记为∞. 同样在复数域内，为了讨论一些问题，也需要引入复数中的无穷大. 前面我们建立了复数与复平面上的点之间的一一对应关系. 那么无穷大在复平面的几何表示是什么呢？下面我们引入复球面的概念.

取一个与复平面切于原点O的球面，过切点(原点)O作复平面的垂线与球面交于N点. 在复平面上任取一点z，作连接z与N的直线，该连线与球面交于一点z'，如图1.6所示. 反之，若z'为球面上任一点，只要它不是N，则直线Nz'交复平面上唯一的点z. 这样复平面上所有的点和球面上除了N以外所有点就建立了一一对应关系，但对于N，还没有复平面上的点与之对应，但我们看到，当z无限地远离原点O时，或者说，当z的模$|z|$无限地变大时，点z'就无限地接近N. 为了使复平面与球面上所有的点都能一一对应，我们规定复平面上有唯一的"无穷远点"，它与球面上的点N对应. 这样，我们又规定：复数中有一个唯一的"无穷大"与复平面上的无穷远点相对应，并记之为∞. 因而球面上的N点(又称北极点)就是复数∞的几何表示. 这样一来，球面上的每一个点，都有唯一的复数与之对应，这样的球面称为复球面. 而把包含无穷远点在内的复平面称为扩充复平面. 不包括无穷远点在内的复平面称为有限复平面，或者就称复平面，以后如无特殊声明，复平面均指有限复平面.

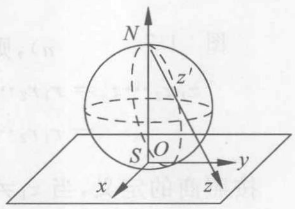

图 1.6

对于复数∞来说，实部、虚部和辐角均无意义，规定它的模为$+\infty$. 对于其他有限复数z，则有$|z|<+\infty$. 复数∞与有限复数α之间的运算有如下规定：

$$\alpha \pm \infty = \infty \pm \alpha = \infty$$

$$\alpha \cdot \infty = \infty \cdot \alpha = \infty (\alpha \neq 0)$$

$$\frac{\alpha}{\infty} = 0, \quad \frac{\infty}{\alpha} = \infty$$

但是$0 \cdot \infty$，$\frac{\infty}{\infty}$，$\infty \pm \infty$，$\frac{0}{0}$仍然没有确定意义.

1.1.5 复数的乘幂与方根

1. 复数的乘积与商

设复数$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1)$，$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2)$，那么，根据乘法法则有

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2 [(\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2) + \mathrm{i}(\sin\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2)] \\ &= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned}$$

于是，$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$，$\mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg} z_1 + \mathrm{Arg} z_2$.

从而有下面的定理.

定理 1.1 两个复数乘积的模等于它们模的乘积，两个复数乘积的辐角等于它们辐角的和.

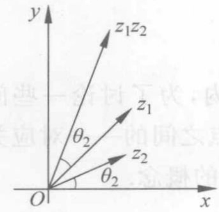

图 1.7

定理 1.1 的几何意义是：表示乘积 z_1z_2 的向量是通过将表示 z_1 的向量先旋转角度 $\mathrm{Arg}z_2$，再伸缩 $|z_2|$ 倍而得到的，如图 1.7 所示.

如果用指数形式表示复数，即 $z_1=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$，$z_2=r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$，则定理 1.1 可以简明地表示为 $z_1z_2=r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}$.

由此逐步可证，如果 $z_k=r_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k}=r_k(\cos\theta_k+\mathrm{i}\sin\theta_k)(k=1,2,\cdots,n)$，则

$$\begin{aligned}z_1z_2\cdots z_n &= r_1r_2\cdots r_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)}\\ &= r_1r_2\cdots r_n[\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)]\end{aligned}$$

按照商的定义，当 $z_1\neq 0$ 时，有 $z_2=\dfrac{z_2}{z_1}z_1$，根据定理 1.1，有

$$|z_2|=\left|\frac{z_2}{z_1}\right||z_1|,\quad \mathrm{Arg}z_2=\mathrm{Arg}\left(\frac{z_2}{z_1}\right)+\mathrm{Arg}z_1$$

于是有 $\left|\dfrac{z_2}{z_1}\right|=\dfrac{|z_2|}{|z_1|}$，$\mathrm{Arg}\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)=\mathrm{Arg}z_2-\mathrm{Arg}z_1$. 由此我们得到下面的定理.

定理 1.2 两个复数商的模等于它们模的商，两个复数商的辐角等于被除数与除数的辐角之差.

如果用指数形式表示复数，即 $z_1=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$，$z_2=r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$，则定理 1.2 可以简明地表示为

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{r_2}{r_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_2-\theta_1)}\quad (z_1\neq 0)$$

2. 复数的乘幂与方根

n 个相同复数 z 的乘积，称为 z 的 n 次幂，记为 z^n. 若 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，根据定理1.1 可得，$z^n=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta)$. 特别地，当 $r=1$ 时，得到棣莫佛(De Moiver)公式：

$$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta$$

复数的开方作为求幂的逆运算，如果有 $z=w^n$，则称 w 为 z 的 n 次方根，记为$w=\sqrt[n]{z}$. 设 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，$w=\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$，则

$$\rho^n=r,\quad \cos n\varphi=\cos\theta,\quad \sin n\varphi=\sin\theta$$

$\Rightarrow n\varphi=2k\pi+\theta$，$\rho=\sqrt[n]{r}\Rightarrow\varphi=\dfrac{2k\pi+\theta}{n}$，$\rho=\sqrt[n]{r}$. 即

$$w=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{2k\pi+\theta}{n}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{2k\pi+\theta}{n}\right)\right]=\sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{\frac{2k\pi+\theta}{n}\mathrm{i}}\quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

这里，当 $k=0,1,2,\cdots,n-1$ 时，得到 n 个不同的根 $\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_{n-1}$. 当 k 取其他整数时，将会重复出现这 n 个不同的值. 从几何意义上来说，这 n 个值是以原点为中心，$\sqrt[n]{r}$ 为半径的圆的内接正 n 边形的顶点.

【例 1.5】 计算：(1) $z=(1+\sqrt{3\mathrm{i}})^{-3}$；(2) $z=\sqrt[4]{-2}$.

【解】

(1) $z=(1+\sqrt{3\mathrm{i}})^{-3}=\left[2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}\right)\right]^{-3}=\dfrac{1}{8}[\cos(-\pi)+\mathrm{i}\sin(-\pi)]=-\dfrac{1}{8}$；

(2) $z=\sqrt[4]{-2}=[2(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)]^{\frac{1}{4}}$

$$=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)$$
$$=\sqrt[4]{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi+2k\pi}{4}\mathrm{i}}(k=0,1,2,3).$$

习题 1.1

1. 求下列复数的实部、虚部、共轭复数、辐角的主值与模.

(1) $\frac{3}{1-2\mathrm{i}}$; (2) $(1+2\mathrm{i})(2+\sqrt{3}\mathrm{i})$; (3) $\mathrm{i}^8-4\mathrm{i}^{21}+\mathrm{i}$.

2. 当x,y等于什么实数时,等式$\frac{x+1+\mathrm{i}(y-3)}{5+3\mathrm{i}}=1+\mathrm{i}$成立?

3. 将下列复数z写成三角表示式和指数表示式.

(1) $-2\mathrm{i}$; (2) $-\frac{3}{5}$; (3) $1+\mathrm{i}$; (4) $-2\sqrt{3}+2\mathrm{i}$; (5) $1-\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$.

4. 对任何z,$z^2=|z|^2$是否成立?如果成立,就给出证明,如果不成立,对哪些z值才成立?

5. 证明:$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$,并说明其几何意义.

6. 判断下列命题的正确性.

(1) 若a为实常数,则$\bar{a}=a$;

(2) 若z为纯虚数,则$\bar{z}\neq z$;

(3) $\mathrm{i}<2\mathrm{i}$;

(4) 复数0的辐角为0;

(5) 仅存在一个复数,使$\frac{1}{z}=-z$;

(6) $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$;

(7) $\frac{1}{\mathrm{i}}\bar{z}=\overline{\mathrm{i}z}$.

7. 如果$z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,证明:(1)$z^n+\frac{1}{z^n}=2\cos n\theta$;(2)$z^n-\frac{1}{z^n}=2\mathrm{i}\sin n\theta$.

8. 指出下列各题中点z的轨迹或所在的范围.

(1) $|z-5|=6$; (2) $|2\mathrm{i}+z|\geqslant1$;

(3) $\mathrm{Re}(z+2)=-1$; (4) $\mathrm{Re}(\mathrm{i}\bar{z})=3$;

(5) $|z-\mathrm{i}|=|z+\mathrm{i}|$; (6) $|z+3|+|z+1|=4$;

(7) $\mathrm{Im}(z)\leqslant2$; (8) $\left|\frac{z-3}{z-2}\right|\geqslant1$;

(9) $0<\arg z<\pi$; (10) $\arg(z-\mathrm{i})=\frac{\pi}{4}$.

1.2 复变函数

本节研究复变数的问题.同实变数一样,每一个复变数都有自己的变化范围.在今后

的讨论中，所遇到的变化范围主要就是区域.

1.2.1 预备知识

1. 区域

定义 1.6 平面上以 z_0 为中心，δ(任意的正数)为半径的圆：

$$|z-z_0|<\delta$$

内部的点的集合称为 z_0 的邻域；由不等式 $0<|z-z_0|<\delta$ 所确定的点集称为 z_0 的去心邻域.

定义 1.7 设 D 是一平面点集，z_0 为 D 中任意一点，如果存在 z_0 的一个邻域，使得该邻域内的所有点都属于 D，则称 z_0 为 D 的一个内点. 如果 D 中每一个点都是内点，则平面点集 D 称为开集.

定义 1.8 平面点集 D 称为一个区域，如果它满足下列两个条件：

(1) D 是一个开集；

(2) D 是连通的，即 D 中的任何两点都可以用完全含在 D 内的一条折线连接起来.

定义 1.9 对于给定的点 z，若 z 的任意邻域内总包含属于 D 的点，同时又包含不属于 D 的点，则称 z 为 D 的边界点. D 的所有边界点组成 D 的边界.

区域的边界可以由一条或几条曲线和一些孤立的点组成. 例如，区域 $0<|z-z_0|<\delta$，它的边界由圆周 $|z-z_0|=\delta$ 与点 z_0 组成.

定义 1.10 区域 D 与它的边界一起构成的点集称为闭区域，简称闭域，记为 $\overline{D}$.

定义 1.11 如果区域 D 可以包含在一个以原点为中心，以有限值为半径的圆内，则称 D 是有界区域；否则，称为无界区域.

【例 1.6】 下列集合是区域的是(　　).

(A) $0<|z|\leqslant 1$　(B) $1<\mathrm{Re}z<3$　(C) $0\leqslant \mathrm{Im}z<3$　(D) $\dfrac{1}{2}\leqslant|z|<1$

【解】 选 B.

【例 1.7】 判断下列区域是否有界？

(1) 圆环域：$r_1<|z-z_0|<r_2$；

(2) 上半平面：$\mathrm{Im}z>0$；

(3) 角形域：$\alpha<\arg z<\beta$；

(4) 带形域：$a<\mathrm{Im}(z)<b$.

【解】 (1)有界，(2)、(3)、(4)无界.

2. 平面曲线与连通域

定义 1.12 如果 $x(t)$ 与 $y(t)$ 是两个连续的实变函数，则方程组

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases} \quad (a\leqslant t\leqslant b)$$

表示一条平面曲线，我们称它是连续曲线.

如果令 $z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t)$，则曲线可以用方程 $z=z(t)(a\leqslant t\leqslant b)$ 表示，这就是平面曲线的复数表示式. 若连续曲线 L 的方程为 $F(x,y)=0$，其中 x,y 为实变量，令 $z=x+\mathrm{i}y$，