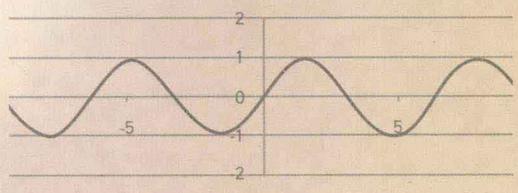
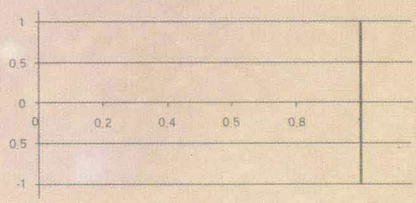
SPACE MAPPING

空间映射

覃　正◎编著





空间映射分析复杂问题从三方面依次展开：首先，确定问题，并定义问题的边界和问题归属的空间；其次，分析和判断同一问题在不同空间中的表现形式，建立空间之间的映射关系；最后，实现问题的简化、建模的简化、求解的简化。

科学出版社

空间映射

SPACE MAPPING

覃正 编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书系统全面地介绍了空间映射的思想和方法。全书共分六个部分：第一部分介绍集合、空间的概念；第二部分介绍坐标系、转置矩阵和映射的概念；第三部分介绍自然科学、社会科学等领域中应用空间变换思想的典型案例，这些案例从频域空间与时域空间、心理空间与物理空间、现实空间与虚拟空间三方面展开；第四部分介绍空间映射的映射，进一步拓展空间映射的思想，抽象出空间映射的本质特征；第五部分从哲学的角度观察空间变换思想，对简单问题复杂化进行讨论；第六部分介绍空间映射的应用，将空间映射的分析方法与具体问题相结合。

本书适用于高等院校管理学及相关专业的本科生、研究生及 EMBA、MBA 学员和各类企业管理人员。

图书在版编目（CIP）数据

空间映射／覃正编著．—北京：科学出版社，2014
ISBN 978-7-03-037852-1

Ⅰ．①空… Ⅱ．①覃… Ⅲ．①映射空间 Ⅳ．①O189.11

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 129330 号

责任编辑：王京苏／责任校对：阴会宾
责任印制：阎 磊／封面设计：无极书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

新科印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2014 年 1 月第 一 版 开本：B5（720×1000）
2014 年 1 月第一次印刷 印张：9 1/2
字数：126 000

定价：40.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前 言

伴随着科学技术的发展，人类探索和创新的脚步越来越快，我们对复杂问题进行描述、建模和求解遇到了越来越多的困难，采用传统思维方式解决上述问题也遇到越来越多局限。本书尝试将同一个问题放在不同的空间中观察其表现形式，通过对复杂问题的重新观察、研究和设计，创新出一条简化问题、模型和求解的新路径。空间映射思想由此应运而生。

空间映射分析复杂问题从三方面依次展开：首先，确定问题，并定义问题的边界和问题归属的空间；其次，分析和判断同一问题在不同空间中的表现形式，建立空间之间的映射关系；最后，实现问题、建模、求解的简化。

本书从三个方面进行了尝试。首先，思想方法创新。本书提出空间映射模型思想，并把该思想有脉络、成体系地梳理、研究、总结并呈现给读者。其次，案例覆盖广泛。本书选取案例涉及工程、心理学、IT 互联网、供应链等诸多领域，范围广、内容新。最后，内容方便普及。本书由浅入深地针对空间映射思想进行介绍，注重知识的系统性、关联性和层次性。

本书由博士生导师覃正教授编著，丁乐、朱洁、徐玮文、杜鹃、王余、张晓黎、于明亮、徐鑫、陈艳珺等参与了编写工作。

由于作者水平及时间所限，书中难免存在不妥或错误之处，恳请各位读者批评指正。

作　者

2013 年 5 月

目　录

第1章

空间相关概念

本章首先给出集合的定义，并在此基础上介绍集合的表示方法和基本运算以及集合和集合间的关系，然后介绍笛卡尔积的相关知识。最后，给出空间的定义并对不同空间的相关性质进行描述。

➢内容提要

1.1　集合

1.2　空间

1.3　小结

1.4　思考题

➢本章学习要求

通过本章学习，了解集合和空间的基本概念，掌握集合的基本运算法则和不同空间的相关性质。

1.1　集　　合

1.1.1　集合的定义

集合是指具有某种共同性质的许多事物汇集形成的一个整体。构

成集合的每一个事物称为该集合的一个元素。构成集合的元素可以是具体的，也可以是抽象的。通常用大写的英文字母表示集合的名称，用小写的英文字母表示元素。若元素 a 属于集合 A，记作 $a \in A$，读作"a 属于 A"；若 a 不属于 A，就记为 $a \notin A$，读作"a 不属于 A"。一个集合，若其组成集合的元素个数是有限的，则称做"有限集"，否则就称做"无限集"。

1.1.2 集合的表示方法

1. 列举法

列举法又称穷举法，即把一个集合的所有元素全都列举出来。

2. 描述法

描述法是指把一个集合的元素所具有的特征和性质表示出来。

设 x 为某类对象的一般表示，$P(x)$为关于 x 的一个命题，我们用 $\{x \mid P(x)\}$表示"使 $P(x)$成立的对象 x 所组成的集合"，其中"$\mid$"前写的是对象的一般表示，"$\mid$"后写出对象应满足的属性。

1.1.3 集合与集合间的关系

定义 1.1 设 A，B 是任意两个集合，如果 A 中的每一个元素都是 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，或 A 包含于 B 内，或 B 包含 A。记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$，即

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \to x \in B)$$

可等价地表示为

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x (x \notin B \to x \notin A)$$

定义 1.2 如果集合 A 的每一个元素都属于集合 B，而集合 B 中

至少有一个元素不属于A，则称A为B的真子集，记作$A\subset B$，即

$$A\subset B\Leftrightarrow \forall x((x\in A)\rightarrow(x\in B))\wedge \exists x((x\in B)\wedge(x\notin A))$$

定理 1.1　集合$A=B$的充分必要条件是：$A\subseteq B$且$B\subseteq A$。

证明：

必要性即证：$A=B\Rightarrow(A\subseteq B)\wedge(B\subseteq A)$。

$$A=B\Rightarrow(\forall x((x\in A)\rightarrow(x\in B)))\wedge(\forall x((x\in B)\rightarrow(x\in A)))$$
$$\Leftrightarrow(A\subseteq B)\wedge(B\subseteq A)$$

充分性即证：$(A\subseteq B)\wedge(B\subseteq A)\Rightarrow A=B$。

$$A\neq B\Rightarrow \exists x((x\in A)\wedge(x\notin B))\Leftrightarrow A\not\subset B$$
$$\therefore(A\not\subset B)\wedge(A\subseteq B)\Leftrightarrow F$$

或

$$A\neq B\Rightarrow \exists x((x\in B)\wedge(x\notin A))\Leftrightarrow B\not\subset A$$
$$\therefore(B\not\subset A)\wedge(B\subseteq A)\Leftrightarrow F$$

定理 1.2　对于任一集合A，$\Phi\subseteq A$，且空集是唯一的。

证明：假设$\Phi\subseteq A$为假，则至少存在一个元素x，使$x\in\Phi$且$x\notin A$，因为空集Φ不包含任何元素，所以这是不可能的，即假设不成立。

设Φ'与Φ都是空集，由以上证明可知，$\Phi'\subseteq\Phi$且$\Phi\subseteq\Phi'$，根据定理 1.1 知$\Phi'=\Phi$，所以空集是唯一的。

注意：$\Phi\neq\{\Phi\}$，$\Phi=\{x|P(x)\wedge\neg P(x)\}$，$P(x)$是任一谓词。

定义 1.3　在一定范围内，如果所有集合均为某一集合的子集，则称该集合为全集，记作E。对于任一$x\in A$，因为$A\subseteq E$，所以$x\in E$，也即$\forall x(x\in E)$恒为真，故$E=\{x|P(x)\vee\neg P(x)\}$，$P(x)$为任一谓词。

定义 1.4　给定集合A，由集合A的所有子集为元素组成的集合，称为集合A的幂集，记为$P(A)$（或记为2^A），即

$$P(A)=\{x\mid x\subseteq A\}$$

定理 1.3　设$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，则$|P(A)|=2^n$。

其中，$|P(A)|$表示集合$P(A)$中元素的个数。

证明：集合 A 的 $m(m=0, 1, 2, \cdots, n)$ 个元素组成的子集个数为从 n 个元素中取 m 个元素的组合数，即 C_n^m，故 $P(A)$ 的元素个数为

$$|P(A)| = C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m$$

根据二项式定理

$$(x+y)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m y^{n-m}$$

令 $x=y=1$ 得 $2^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m$，故 $|P(A)| = 2^n$。

1.1.4 集合的基本运算

1. 并运算

定义 1.5 设 A，B 为任意两集合，所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合，称为集合 A 和 B 的并集，记作 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x \mid (x\in A)\vee(x\in B)\}$$

并集的文氏图如图 1-1 所示。

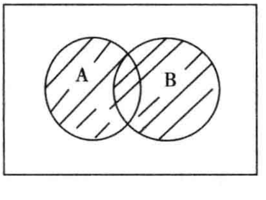


图 1-1 并集文氏图

由集合并运算的定义知，并运算具有如下性质：

定理 1.4 设 A，B，C 为任意三个集合，则

(1)幂等律 $A\cup A=A$；

(2)交换律 $A\cup B=B\cup A$；

(3)结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；

(4)同一律　$A \cup \Phi = A$；

(5)零律　$A \cup E = E$；

(6)$A \subseteq A \cup B$，$B \subseteq A \cup B$；

(7)$A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B$。

证明：性质(1)，(2)，(4)，(5)，(6)由定义 1.5 立即可以得到。

性质(3)的证明：

$$
\begin{aligned}
(A \cup B) \cup C &= \{x \mid x \in (A \cup B) \cup C\} \\
&= \{x \mid (x \in A \cup B) \vee (x \in C)\} \\
&= \{x \mid ((x \in A) \vee (x \in B)) \vee (x \in C)\} \\
&= \{x \mid (x \in A) \vee ((x \in B) \vee (x \in C))\} \\
&= \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B \cup C)\} \\
&= \{x \mid x \in A \cup (B \cup C)\} \\
&= A \cup (B \cup C)
\end{aligned}
$$

性质(7)的证明：

必要性：$\forall x(x \in A) \Rightarrow \forall x(x \in A \cup B) \overset{A \cup B = B}{\Longleftrightarrow} \forall x(x \in B)$，所以$A \subseteq B$。

充分性：由(6)知 $B \subseteq A \cup B$，现证明 $A \cup B \subseteq B$。

$$\forall x(x \in A \cup B) \overset{A \subseteq B}{\Longleftrightarrow} \forall x(x \in B)$$

所以有 $A \cup B = B$，同理可证得 $A \subseteq B \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup C$。

因为集合的并运算满足结合律，对 n 个集合 A_1，A_2，…，A_n 的并集$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ 定义为至少属于A_1，A_2，…，A_n 之一的那些元素构成的集合。$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ 通常缩写成$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$。

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{x \mid \exists i \in \mathbf{N},\ x \in A_i\}$$

其中，$\mathbf{N}$ 为自然数集合。

一般地，$\bigcup_{k \in I} A_k = \{x \mid \exists k \in I,\ x \in A_k\}$。

2. 交运算

定义 1.6 设任意两个集合 A 和 B，由集合 A 和 B 的共同元素组成的集合，称为集合 A 和 B 的交集，记作 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x|(x\in A)\wedge(x\in B)\}$$

交集的文氏图如图 1-2 所示。

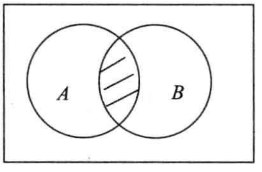


图 1-2 交集文氏图

由集合交运算的定义知，集合交运算具有如下性质：

定理 1.5 设 A，B，C 是任意三个集合，则

(1)幂等律 $A\cap A=A$；

(2)交换律 $A\cap B=B\cap A$；

(3)结合律 $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

(4)零律 $\Phi\cap A=\Phi$；

(5)同一律 $E\cap A=A$；

(6)$A\cap B\subseteq A$，$A\cap B\subseteq B$；

(7)$A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$。

证明：根据定义 1.5，性质(1)，(2)，(4)，(5)，(6)立即可以得到。

性质(3)的证明：

$$\begin{aligned}(A\cap B)\cap C&=\{x\mid x\in(A\cap B)\cap C\}\\&=\{x\mid(x\in A\cap B)\wedge(x\in C)\}\\&=\{x\mid((x\in A)\wedge(x\in B))\wedge(x\in C)\}\\&=\{x\mid(x\in A)\wedge((x\in B)\wedge(x\in C))\}\end{aligned}$$

$$=\{x \mid (x\in A)\wedge(x\in B\cap C)\}$$
$$=\{x \mid x\in A\cap(B\cap C)\}$$
$$=A\cap(B\cap C)$$

性质(7)的证明：

充分性：$\forall x(x\in A)\xLeftrightarrow{A\cap B=A}\forall x(x\in A\cap B)\Rightarrow\forall x(x\in B)$。

即得

$$A\cap B=A\Rightarrow A\subseteq B$$

必要性：由性质(6)知 $A\cap B\subseteq A$，现证 $A\subseteq A\cap B$。

$$\forall x(x\in A)\xRightarrow{A\subseteq B}\forall x\,(x\in A\quad x\in B)$$

即

$$A\subseteq A\cap B$$

若集合 A，B 没有共同的元素，则可记为 $A\cap B=\Phi$，这时称 A，B 不相交。

由集合的交运算具有结合律，同样可以定义 n 个集合 A_1，A_2，…，A_n 的交集，也可以定义集序列 A_1，A_2，…，A_n，…的交集，分别记为

$$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\bigcap_{i=1}^{n}A_i=\{x\mid i\in\{1,2,\cdots,n\},\ x\in A_i\}$$
$$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\cap\cdots=\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i=\{x\mid i\in\{1,2,\cdots,n,\cdots\},\ x\in A_i\}$$

一般地，集合族$\{A_k\}_{k\in I}$中各集合的交记成$\bigcap_{k\in I}A_k$，其定义为

$$\bigcap_{k\in I}A_k=\{x\mid\forall l\in I,\ x\in A_l\}$$

若序列 A_1，A_2，…，A_n…中任意两集合 A_i，$A_j\,(i\neq j)$都不相交，则称 A_1，A_2，…，A_n…是两两不相交的集序列。

3. 交运算与并运算的联系

定理 1.6(分配律)　设 A，B，C 为任意三个集合，则

(1)交运算对并运算的分配律：

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

(2)并运算对交运算的分配律：

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

证明：

(1)$A\cap(B\cup C)=\{x \mid x\in A\cap(B\cup C)\}=\{x \mid (x\in A)\wedge(x\in B\cup C)\}$

$=\{x \mid (x\in A)\wedge((x\in B)\vee(x\in C))\}$

$=\{x \mid ((x\in A)\wedge(x\in B))\vee((x\in A)\wedge(x\in C))\}$

$=\{x \mid (x\in A\cap B)\vee(x\in A\cap C)\}$

$=\{x \mid x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)\}$

$=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

(2)当然可以仿照(1)的证明方法证明(2)的成立，现在采用(1)来证明(2)，注意到$A\subseteq A\cup B$，$A\cap C\subseteq A$，由(1)可得

$$\begin{aligned}(A\cup B)\cap(A\cup C)&=((A\cup B)\cap A)\cup((A\cup B)\cap C)\\&=A\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)=A\cup(B\cap C)\end{aligned}$$

同理可以利用(2)证得(1)成立(请读者自行完成)，于是(1)成立$\Leftrightarrow$(2)成立。

定理 1.7(吸收律)　设A，B为任意两集合，则

(1)$A\cup(A\cap B)=A$；

(2)$A\cap(A\cup B)=A$.

证明：由分配律可得

(1) $A\cup(A\cap B)=(A\cap E)\cup(A\cap B)=A\cap(E\cup B)=A\cap E=A$

(2)$A\cap(A\cup B)=(A\cup\Phi)\cap(A\cup B)=A\cup(\Phi\cap B)=A\cup\Phi=A$

4. 补运算

定义 1.7　设A，B为任意两集合，由属于A而不属于B的所有元素构成的集合，称为A与B的差运算(又称B对于A的补运算，或相对补)，记为$A-B$，$A-B$称为A与B的差集(或B对于A的补集)。

$$A-B=\{x \mid (x\in A)\wedge(x\notin B)\}=\{x \mid (x\in A)\wedge\neg(x\in B)\}$$

若 $A=E$，对任意集合 B 关于 E 的补集 $E-B$，称为集合 B 的绝对补，记作 $\overline{B}$，即

$$\overline{B}=E-B=\{x \mid (x\in E)\wedge(x\notin B)\}。$$

补集的文氏图如图 1-3 所示。

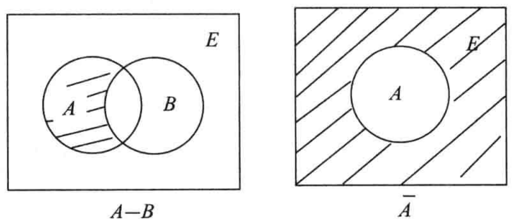


图 1-3　补集文氏图

定理 1.8　设 A，B，C 为任意三集合，则 E，A 满足以下规律：

(1)对合律　$\overline{\overline{A}}=A$；

(2)$\overline{E}=\Phi$；

(3)$\overline{\Phi}=E$；

(4)排中律　$A\cup\overline{A}=E$；

(5)矛盾律　$A\cap\overline{A}=\Phi$；

(6)de Morgan 定理：

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}，\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}；$$

(7)$A-B=A\cap\overline{B}$，$A-B=A-(A\cap B)$；

(8)$A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$。

证明：由补运算的定义立即可得性质(1)～性质(5)。

性质(6)的证明：

$$\overline{A\cup B}=\{x \mid x\in\overline{A\cup B}\}=\{x \mid x\notin A\cup B\}=\{x \mid (x\notin A)\wedge(x\notin B)\}$$
$$=\{x \mid (x\in\overline{A})\wedge(x\in\overline{B})\}=\{x \mid x\in\overline{A}\cap\overline{B}\}=\overline{A}\cap\overline{B}$$

同理可证得 $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$，请读者自行证明。

性质(7)的证明：