高　等　学　校　教　材

Advanced Algebra

高等代数

杜先能　叶　郁
殷晓斌　范益政　主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

高等代数

Gaodeng Daishu

杜先能　叶　郁　殷晓斌　范益政　主编

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书是国家级教学团队建设和省级精品课程建设的一项基础性成果。编者根据多年的教学科研经验，将经典的“高等代数”课程教学内容重新整理，以基本理论与基本方法为主，适当介绍高等代数的一些延伸知识。全书主要内容包括行列式、矩阵、线性空间、线性映射、一元多项式、相似标准形、双线性函数与二次型、内积空间。

本书可作为高等学校数学类专业高等代数课程的教材，也可作为理工类大专院校师生的参考书和自学读物。

图书在版编目(CIP)数据

高等代数/杜先能等主编. --北京:高等教育出版社,2013.2

ISBN 978-7-04-035162-0

Ⅰ.①高… Ⅱ.①杜… Ⅲ.①高等代数-高等学校-教材 Ⅳ.①O15

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第308504号

策划编辑	李晓鹏	责任编辑	田　玲	特约编辑	张建军	封面设计	赵　阳
版式设计	童　丹	插图绘制	尹文军	责任校对	刘春萍	责任印制	张福涛

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京七色印务有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×960mm　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	21.5	版　　次	2013年2月第1版
字　　数	390千字	印　　次	2013年2月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	31.40元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号　35162-00

前　言

高等代数是数学类各专业的主干基础课程, 对培养学生的逻辑推理能力、抽象思维能力以及计算能力都起着十分重要的作用。本书是根据编者多年的教学经验和授课讲义编写而成的, 主要由多项式理论与线性代数两部分组成。全书共 8 章, 主要内容包括: 行列式、矩阵、线性空间、线性映射、一元多项式、相似标准形、双线性函数与二次型、内积空间。虽然高等代数涉及的内容都是成熟的知识, 但本书在选材上还是体现了如下的特点:

1. 注重代数学基本思想的传授。比如, 强调等价分类的思想、分解结构和同构对应等思想, 揭示课程内容的内在本质。

2. 注重代数基本方法和基本技巧的训练。如对必要的代数方法作尽可能详细的介绍, 并注重几何直观和代数方法的对应, 加强从几何的观点理解内容。又如, 书中的例题尽可能注重解题方法的训练和归纳, 以达到举一反三、触类旁通的效果。

3. 注重基本知识的应用。如特别强调矩阵的初等变换在解线性方程组、求矩阵的逆、求 $\lambda-$ 矩阵的标准形以及求二次型的标准形等方面的应用。

4. 注重所学知识的巩固和提高。除每节有习题外, 每章后都安排了复习题, 有利于训练和提高学习者对所学知识的综合应用能力。

5. 注重学习者的主体性。每章都安排了"知识拓展"内容, 为学习者提供自由学习的空间, 开阔视野。

本书由杜先能、叶郁、殷晓斌、范益政担任主编, 吴化璋、吴俊、鲍炎红、赵志兵、王修建、程智参与了教材的编写。

本书是国家级教学团队建设和省级精品课程建设的一项基础性成果。虽然在课程组老师的共同努力下几经修改, 但由于编者水平有限, 书稿难免存在缺陷, 恳请专家、学者和读者批评指正, 以便在今后的修订中不断完善。在本书的编写过程中, 参阅了国内外许多资料, 恕不一一致谢。

编　者

2012 年 3 月

目 录

第一章
行列式

行列式的理论起源于 16 世纪求解线性方程组的问题, 也是高等代数课程中最基本的概念之一, 它在数学的许多领域和其他科学分支中都有广泛的应用, 已经成为近代数学和科技中不可缺少的工具之一. 本章主要介绍行列式的定义、性质和若干计算方法以及利用行列式给出一类特殊线性方程组的求解方法.

§1.1 数域

我们知道, 在整数范围内, 代数运算可以进行加、减、乘三种运算, 然而两个整数的商不一定是整数, 也就是说, 整数对除法运算不具有封闭性. 但在有理数、实数、复数范围内, 它们关于加、减、乘、除 (除数不为零) 四则运算, 均具有封闭性. 其实, 具有这种性质的数集还有很多. 在代数中经常将有共同性质的对象统一进行研究, 并且对涉及数的运算要求具有封闭性. 我们常常是在具有一定代数运算封闭性的数集上来讨论所要研究的代数对象的. 为此, 我们引入下面的概念.

定义 1.1.1 设 $\mathbb{F}$ 为一个由一些复数组成的集合, 且至少包含一个非零数. 若 $\mathbb{F}$ 中任意两个数的和、差、积、商 (除数不为零) 仍为 $\mathbb{F}$ 中的数, 则称 $\mathbb{F}$ 为一个**数域**.

例如, 有理数集 $\mathbb{Q}$、实数集 $\mathbb{R}$、复数集 $\mathbb{C}$ 都是数域, 但整数集 $\mathbb{Z}$ 就不是数域. 显然, 任意数域都是复数域的一个子集, 从而复数域是最大的数域.

例 1.1.1 设

$$\mathbb{Q}(\sqrt{p}) = \{a + b\sqrt{p} \mid a, b \in \mathbb{Q}\},$$

其中 p 为素数. 则 $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ 是一个数域.

事实上, 任取 $a+b\sqrt{p}$, $c+d\sqrt{p}\in\mathbb{Q}(\sqrt{p})$, 由于 a, b, c, d 属于有理数域 $\mathbb{Q}$, 它们对加、减、乘、除 (除数不为零) 四则运算均具有封闭性, 所以

$$(a+b\sqrt{p})\pm(c+d\sqrt{p})=(a\pm c)+(b\pm d)\sqrt{p}\in\mathbb{Q}(\sqrt{p}),$$
$$(a+b\sqrt{p})(c+d\sqrt{p})=(ac+pbd)+(ad+bc)\sqrt{p}\in\mathbb{Q}(\sqrt{p}).$$

设 $a+b\sqrt{p}\neq 0$, 显然 $a-b\sqrt{p}\neq 0$, 从而

$$\frac{c+d\sqrt{p}}{a+b\sqrt{p}}=\frac{(c+d\sqrt{p})(a-b\sqrt{p})}{(a+b\sqrt{p})(a-b\sqrt{p})}=\frac{ac-pbd}{a^2-pb^2}+\frac{ad-bc}{a^2-pb^2}\sqrt{p}\in\mathbb{Q}(\sqrt{p}),$$

由于 a,b,c,d 均为有理数, 所以

$$\frac{ac-pbd}{a^2-pb^2},\frac{ad-bc}{a^2-pb^2}$$

也是有理数, 即 $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ 对除法也具有封闭性, 从而 $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ 是数域.

从上例可以看出, 数域有无限多个.

定理 1.1.2 任何数域都包含有理数域.

证明 设 $\mathbb{F}$ 为任一数域, 则存在非零数 $a\in\mathbb{F}$, 从而 $1=\dfrac{a}{a}(a\neq 0)$. 因为 $\mathbb{F}$ 对于加法具有封闭性, 所以 $1+1=2$, $1+2=3$, $\cdots$, $1+n=n+1$, $\cdots$ 全在 $\mathbb{F}$ 中, 即 $\mathbb{F}$ 包含全体自然数. 因 $1-1=0$ 在 $\mathbb{F}$ 中, 则 $0-n=-n$ 也在 $\mathbb{F}$ 中, 进而 $\mathbb{F}$ 包含全体整数. 又任一有理数都可以表示成两个整数的商, 且数域对除法具有封闭性, 所以 $\mathbb{F}$ 包含一切有理数. □

本书中, 将自然数集、整数集、有理数域、实数域和复数域分别记为 $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$. 用 $\mathbb{F}$ 表示一般数域.

习题 1.1

1. 设 $\mathbb{Q}(\mathrm{i})=\{a+b\mathrm{i}\mid a,b\in\mathbb{Q},\mathrm{i}^2=-1\}$. 证明: $\mathbb{Q}(\mathrm{i})$ 是数域.

2. 判断下列数集是否为数域, 为什么?

   (1) $P_1=\{2n+1|n\in\mathbb{Z}\}$;

   (2) $P_2=\mathbb{Z}(\sqrt{p})=\{a+b\sqrt{p}\mid a,b\in\mathbb{Z}\}$, 其中 p 为素数.

3. 设

$$R(\pi)=\left\{\frac{a_0+a_1\pi+\cdots+a_n\pi^n}{b_0+b_1\pi+\cdots+b_m\pi^m}\middle|a_i,b_j\in\mathbb{Z},i=0,1,\cdots,n;j=0,1,\cdots,m;m,n\in\mathbb{Z}\right\}.$$

   证明: $R(\pi)$ 是数域.

4. 证明两个数域的交是数域. 举例说明两个数域的并不一定是数域.

5. 设 $\mathbb{F}$ 为至少包含一个非零数的复数集的子集. 证明: 如果 $\mathbb{F}$ 中任意两个数的差和商(除数不为零) 仍为 $\mathbb{F}$ 中的数, 则 $\mathbb{F}$ 为数域.

6. 证明: 实数域与复数域之间不存在其他的数域.

§1.2 排列

本节首先通过具体的例子引入排列的定义, 并讨论它的一些基本性质.

先来看二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.2.1}$$

的求解公式. 当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时, 通过消元法不难得到方程组(1.2.1)有唯一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.2.2}$$

如果记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{1.2.3}$$

则(1.2.2)可改写为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases} \tag{1.2.4}$$

如果记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}, \tag{1.2.5}$$

则通过加减消元法和代入消元法可知, 当

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

时, 方程组(1.2.4)有唯一解:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}. \tag{1.2.6}$$

(1.2.3)式和(1.2.5)式所给出的就是 2 阶和 3 阶行列式的定义. 今后我们会看到, 它们的引入给线性方程组的求解带来非常大的方便. 我们的目的是要把它们推广到一般 n 阶行列式. 从形式上来说, 它们都是一个正方形数表里面所有来自不同行不同列的元素乘积的代数和, 其中有些项取正号, 有些项取负号. 为了确定这种符号取法的规律, 我们先介绍排列的概念及其相关性质.

定义 1.2.1 由 n 个数 1, 2, $\cdots$, n 组成的一个有序数组称为一个 n **阶排列**.

例如, 2431 是一个 4 阶排列, 31254 是一个 5 阶排列.

显然, n 个数的不同排列的个数共有 $n!$ 个. 例如由 1, 2, 3 这三个数构成的排列共有 6 个, 它们是 123, 132, 213, 231, 312, 321.

在上述排列中, 除了“123”是按自然顺序排列外, 其他的排列中都有较大的数排在较小的数前面. 一般地, 在一个排列里, 如果某个较大的数排在某个较小数的前面, 称这对数构成一个逆 (反) 序. 一个排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中出现的逆序总数称为这个排列的**逆 (反) 序数**, 记为 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$.

一个排列的逆序数可能是偶数也可能是奇数. 逆序数为偶数的排列称为**偶排列**, 逆序数为奇数的排列称为**奇排列**.

例如, 在上述关于 $1,2,3$ 的 3 阶排列中, 逆序数分别为

$$\tau(123)=0,\tau(132)=1,\tau(213)=1,$$
$$\tau(231)=2,\tau(312)=2,\tau(321)=3.$$

所以这 6 个排列中, 有 3 个偶排列, 分别为 123, 231, 312, 其余 3 个排列 132, 213, 321 都是奇排列. 偶排列与奇排列各占一半. 同时, 我们也注意到偶排列 123, 231, 312 中, 如果交换 2, 3 两个数的位置而保持 1 的位置不动, 得到的就是 3 个奇排列 132, 321, 213. 反之, 交换奇排列中两个数的位置而保持第三个数的位置不动便得到偶排列.

在一个排列中, 互换某两个数码的位置, 而保持其余数码的位置不动, 这样一个变换称为一个**对换**.

定理 1.2.2 *每一个对换都改变排列的奇偶性.*

证明 先证明一种特殊情形, 即被对换的两个数在排列中是相邻的. 设原排列为

$$\cdots jk\cdots, \tag{1.2.7}$$

经过 j,k 对换后, 得到如下的排列

$$\cdots kj\cdots, \tag{1.2.8}$$

其中省略号“$\cdots$”表示那些不动的数.

我们比较(1.2.7)与(1.2.8)的逆序数. 在(1.2.7)中, 省略号中的数与 j,k 构成逆序的, 则在(1.2.8)也构成逆序, 不构成逆序的在(1.2.8)中也不构成逆序. 所以只需关注 j, k 是否构成逆序. 如果原来 j,k 构成逆序, 则对换 j 与 k 后变成一个顺序, 从而(1.2.8)比(1.2.7)的逆序数减少一个; 如果原来 j,k 构成顺序, 则对换了 j 与 k 后变成一个逆序, 从而(1.2.8)比(1.2.7)的逆序数就增加了一个. 无论是哪种情形, 排列的奇偶性都发生改变.

对于一般的情形, 假设 j, k 之间有 s 个数, 用 i_1, i_2, $\cdots$, i_s 来表示. 假设此时原排列为

$$\cdots ji_1i_2\cdots i_sk\cdots,$$

经过对换 j 与 k 后变为

$$\cdots ki_1i_2\cdots i_sj\cdots,$$

这样的一个对换可以通过一系列相邻数的对换来实现, 即将 j 向右依次与 i_1, i_2, $\cdots$, i_s, k 对换, 共 $s+1$ 次相邻数的对换, 所得排列为

$$\cdots i_1 i_2 \cdots i_s k j \cdots,$$

再将 k 向左依次与 $i_s, i_{s-1}, \cdots, i_1$ 对换, 共 s 次相邻数的对换. 因此, j 与 k 对换可通过 $2s+1$ 次相邻位置数的对换来实现. 由上述特殊情形可知, 每次相邻位置数码的对换改变排列的奇偶性, 又 $2s+1$ 为奇数, 所以任一对换必改变原排列的奇偶性. □

由定理 1.2.2, 我们得出以下结论.

定理 1.2.3 在 $n(n \geqslant 2)$ 个数的全部排列中, 奇偶排列的个数相等, 均有 $\dfrac{n!}{2}$ 个.

证明 设在全部 n 阶排列中, 共有 s 个奇排列和 t 个偶排列. 不妨将 $n!$ 个排列的前两个数码对换, 由定理 1.2.2可知, 我们得到 s 个偶排列和 t 个奇排列. 注意到不同的奇 (偶) 排列对换前两个数码后得到不同的偶 (奇) 排列, 因此 $t \leqslant s$, $s \leqslant t$. 由此可知, $s = t$, 从而奇、偶排列各有 $\dfrac{n!}{2}$ 个. □

习题 1.2

1. 写出所有的 4 阶排列.

2. 试确定下列排列的奇偶性:
   (1) 134267958;　　(2) 791862534;
   (3) $n(n-1)(n-2)\cdots 21$;　　(4) $(2n)1(2n-1)2(2n-2)3\cdots(n+1)n$.

3. 在关于 1, 2, $\cdots$, 9 的排列中, 选择 i 与 j 使 $1247i98j5$ 为偶排列, 选择 s 与 t 使 $26s5143t7$ 为奇排列.

4. 设排列 $x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$ 的逆序数为 k. 求排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数.

5. 设 $i_1i_2\cdots i_n$ 与 $j_1j_2\cdots j_n$ 为 1, 2, $\cdots$, n 的任意两个排列. 证明: 总可以通过对换将一个化成另一个.

§1.3 n 阶行列式

利用排列的定义和性质, 我们可以对 2 阶和 3 阶行列式作进一步的研究, 从而得出它们定义的结构规律. 本节利用这些规律来给出一般 n 阶行列式的

定义.

定义 1.3.1　设 a_{ij} $(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,n)$ 为 n^2 个元素. n **阶行列式**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

定义为所有取自不同行不同列的 n 个元素乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

的代数和, 且该项的符号为 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}. \tag{1.3.1}$$

如果用 A 来表示由 n^2 个元素 a_{ij} 构成的方形表 (也称为 n **阶方阵**), 记为

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

有时也简记为 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, 或 $A=(a_{ij})$, 则可用 $|A|$ 或 $\det A$ 表示该方阵的行列式, 称之为**方阵 A 的行列式**.

例 1.3.1　计算下列 4 阶行列式的 x^4 与 x^3 的系数:

$$\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}.$$

解　由行列式的定义可知, 每一项都是取自不同行与不同列的元素, 展开式中含 x^4 的项只可能是 $(-1)^{\tau(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=2x^4$, 因此 x^4 的系数为 2. 含 x^3 的项只可能是 $(-1)^{\tau(2134)}a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}=-x^3$, 即 x^3 的系数为 -1. □

例 1.3.2 计算如下三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-2} & a_{2,n-1} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,n-2} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 对于第一个行列式, 展开式中每一项的一般形式为

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

由于第 n 行的元素除去 a_{nn} 以外全为零, 因此只需考虑 $j_n = n$ 即可. 而 a_{nn} 位于第 n 行第 n 列交叉的位置, 因此不能在第 n 列再取任何元素. 接下来考虑 a_{nj_n} 前面的元素 $a_{n-1,j_{n-1}}$. 同理, 只需考虑 $j_{n-1} = n-1$ 即可. 依此类推, 该行列式的展开式中除去

$$(-1)^{\tau(12\cdots n)} a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

外, 其余的项全是 0, 所以

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

同理

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-2} & a_{2,n-1} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,n-2} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} a_{3,n-2} \cdots a_{n1}.$$

□

在行列式的定义(1.3.1)式中, 每一项的行指标是按自然顺序 $123 \cdots n$ 来排列的, 但是元素的乘法是可交换的, 因此 n 阶行列式的一般项可以写成

$$a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}, \tag{1.3.2}$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n$, $j_1j_2\cdots j_n$ 分别为两个 n 阶排列. 利用排列的性质, 下面证明该项的符号为

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}. \tag{1.3.3}$$

事实上, 为了根据(1.3.1)式来确定(1.3.2)式的符号, 将(1.3.2)式中 n 个元素进行重新排列, 使其行指标成自然顺序, 即

$$a_{1j_1'}a_{2j_2'}\cdots a_{nj_n'}, \tag{1.3.4}$$

它的符号是

$$(-1)^{\tau(j_1'j_2'\cdots j_n')}. \tag{1.3.5}$$

下证(1.3.3)式与(1.3.5)式一致. 在由(1.3.2)式变换成 (1.3.4)式的过程中, 每经过一次元素的对换, 该元素的行指标与列指标也随之同时作一次对换. 例如, $a_{i_1j_1}$ 与 $a_{1j_1'}$ 对换, 则行指标中 i_1 与 1 对换, 列指标中 j_1 与 j_1' 也作了一次对换. 于是, $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$ 与 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 同时改变奇偶性, 而它们的和

$$\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)$$

的奇偶性相同. 最终对换成行指标按自然顺序, 列指标按 $j_1'j_2'\cdots j_n'$ 排列时, 它们逆序数的奇偶性不变, 即

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}=(-1)^{\tau(12\cdots n)+\tau(j_1'j_2'\cdots j_n')}=(-1)^{\tau(j_1'j_2'\cdots j_n')},$$

于是, 我们就得到了(1.3.1)式的另一种等价定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1i_2\cdots i_n;j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}. \tag{1.3.6}$$

由此可见, 行列式的行指标与列指标的地位是同等的. 因此, (1.3.1)式有一个关于列按自然顺序排列的等价定义:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}. \tag{1.3.7}$$

习题 1.3

1. 写出 4 阶行列式 $|(a_{ij})|$ 的展开式中包含 a_{13}, a_{24} 并带正号的项.

2. 按定义计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \\ 7 & 3 & 4 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$; (4) $\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$.

3. 用行列式定义证明: 在一个 n 阶行列式中, 若零元素的个数多于 n^2-n, 则该行列式为零.

4. 用行列式定义证明

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

5. 已知 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

由此证明在 n 阶排列中奇偶排列各占一半.

§1.4 行列式的性质与展开

由行列式的定义可知, 一个 n 阶行列式的展开式中共有 $n!$ 项, 每项需做 $n-1$ 次乘法运算, 因此计算一个 n 阶行列式至少需要 $n!(n-1)$ 次乘法运算. 当 n 很大时, 这个计算量也就会很大. 本节将分析行列式的一些性质, 并给出行列式按一行的展开式, 从而在某种程度上简化行列式的计算.

为了书写和讨论上的方便, 我们用 $|A|$ 表示一个方阵 A 的行列式. 通常所说 $|A|$ 的行或列, 即指方阵 A 的行或列. 由行列式中行与列有对等的地位, 即 (1.3.1) 式与 (1.3.7) 式的等价性, 即得下列性质.