

高等数学 (上)

——基础教程

刘春风 等 编著



清华大学出版社

014006568

013-43

349

V1

21世纪高等学校规划教材

高等数学 (上)

基础教程

刘春风 杨爱民 闫焱 编著

图书馆

清华大学出版社



北航

C1693624

013-43
349
V1

内 容 简 介

本书遵循教育部制定的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”,是为普通高校理工科各专业开设的“高等数学”课程编写的教材。教材分上、下两册,上册内容包括函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、空间解析几何、多元函数微积分(共6章)。下册内容包括不定积分、定积分、重积分、线面积分、无穷级数和常微分方程(共6章)。书末附有积分表、习题答案和参考文献等。

本书结构严谨、逻辑清晰,注重直观简约,内容由浅入深,通俗易懂,分层布局,梯次渐进,既宜于教师因材施教,又便于读者循序渐进自学,也可作为报考工科研究生的参考书,并可供工程技术工作者参考。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。
版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(上):基础教程/刘春风等编著.--北京:清华大学出版社,2013
21世纪高等学校规划教材
ISBN 978-7-302-33158-2

I. ①高… II. ①刘… III. ①高等数学—高等学校—教材 IV. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第159124号

责任编辑:魏江江 薛 阳

封面设计:常雪影

责任校对:焦丽丽

责任印制:宋 林

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦A座 邮 编:100084

社总机:010-62770175 邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质量反馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

课 件 下 载: <http://www.tup.com.cn>, 010-62795954

印 刷 者:北京富博印刷有限公司

装 订 者:北京市密云县京文制本装订厂

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×260mm

印 张:21

字 数:508千字

版 次:2013年6月第1版

印 次:2013年6月第1次印刷

印 数:1~3800

定 价:37.50元

产品编号:054692-01

本书编委会

主 任：吴印林

副主任：屈 滨 刘春风

编 委：肖继先 何亚丽 杨爱民 闫 焱

数学不仅是一些知识,也是一种素质,即数学素质;数学不仅是一种工具,也是一种思维,即理性思维;数学不仅是一门科学,也是一种文化,即数学文化。当今,人类进入信息时代,数学无声无息地走进人们的生活,引领科技的发展,把握社会的命脉,我们几乎所有的工作都与数学相关,追求科学的、可持续发展的工作目标,越来越多地需要数学的描述,需要使用数学工具进行定量分析,可以说信息时代本质上是数学时代,信息技术本质上是数字技术,使用数学的程度甚至成为衡量国家科学进步的主要标志。大学数学课程因其在培养大学生理性思维、计算能力、创新意识等方面具有不可替代的作用,而成为大学课程中最重要的公共必修课,因此学好数学既是学者进取之道,也是人生智慧之举。

我国从精英教育到大众化教育的转型,高等教育发生了一系列的变化,伴随着变化也产生了诸多前所未有的问题。几十年、甚至上百年一贯制大学数学的教育问题首当其冲受到影响。尽管大学数学教学内容和课程体系改革方兴未艾,面向重点大学的具有新思路且含有数学实验的新教材陆续出现,对数学教学改革起到了推动和引领作用。然而对于普通院校,尤其对独立学院,由于缺乏与本校人才培养目标高度适应的新教材,选用教材时多倾向于与重点大学保持一致,培养目标及学生的差异使普通院校呈现传授与接受的“脱节”,教师教得辛苦,学生学得艰难,有相当比例的学生“学不会,用不了”,教学效果事倍功半。

面对当前普通高校的大学数学教育,笔者认为张景中院士提出的教育数学的观点颇有启发。学数学好比吃核桃,核桃仁美味而富有营养,但要完整地砸开吃到它却非易事,“数学教育要研究的是如何砸核桃吃核桃,而教育数学要研究改良核桃的品种,让核桃更美味更营养,更容易砸开吃净。”为此,我们组织多年从事高等数学教学的一线教师,遵循教育部制定的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”,立足普通高等院校应用型人才培养目标的需要,融入张景中院士“想的是教育,做的是数学”的思想,编写了高等数学系列教材。本套教材旨在让更多的学子在轻松学习高等数学知识的同时,掌握数学本质,培养数学素质,提高数学能力,感受数学魅力,自觉走进数学,自由享用数学。

高等数学系列教材包括《高等数学(上)——基础教程》、《高等数学(下)——基础教程》和《高等数学(上)——实训教程》、《高等数学(下)——实训教程》(以下分别简称《基础教程》和《实训教程》),本套教材有三个显著特点:

(1) 调整结构,增加实训。新编《高等数学基础教程》上册包括微分学、空间解析几何,下册包括积分学、无穷级数和常微分方程。《基础教程》作为课内“学数学”理论教学

篇,《实训教程》用于课外“用数学”的实训教学篇。《实训教程》由五个板块组成:知识网络图、精品课堂、达标实训、拓展实训、应用实训和数学实验,它是《基础教程》的拓展,两个教程内容协调一致,配合使用可实现课上与课下,课内与课外相辅相成。

(2) 分层布局,梯次渐进。考虑到不同专业的学生对数学需求的差异,《基础教程》把传统的内容按照六个板块——内容初识、经典解析、概念反思、理论探究、方法纵横、应用欣赏——进行了重新划分与整合。其中内容初识和经典解析为第一梯度,内容初识只限于介绍简单概念和基础知识,经典解析部分仅限于介绍最基础且经典的方法。这一梯度避开了抽象的概念和繁琐的计算,例如极限与连续的内容初识部分只描述极限概念而不精确刻画,避开“ ϵ - N 语言”,经典解析极限方法仅介绍有理分式函数的极限,两个重要极限和无穷小代换法,力求使读者轻松入门。概念反思和理论探究为第二梯度,在读者对本章内容已有初步了解的基础上,进一步揭示概念的内涵,展开相关理论的推演和证明,强化学生对知识的深刻理解,培养学生的数学思维。方法纵横和应用欣赏为第三梯度,其中方法纵横部分将集中讲解本章难度较高和综合性较强的数学方法,例题的选择注意典型性、灵活性和可拓展性,有的选自全国数学竞赛试题,也有的选自考研真题。著名数学家和数学教育家项武义先生说:教数学,要教学生“运用之妙,存乎一心”,以不变应万变,不讲或少讲只能对付几个题目的“小巧”,要教给学生“大巧”,这个板块就是启发联想,夯实数学基本功,使学生通过引导探究渐入“无招胜有招”的境界,为学生继续深造奠定坚实的数学基础。应用欣赏旨在体现数学具有广泛应用性这一特点,但限于课程学时,高等数学的应用课堂难以细说,故在基础教程里仅举少许典型应用案例供读者欣赏,使读者学知所用。

(3) 融入实验,学以致用。长期以来,数学给人们的一些印象就是凭大脑、纸、笔进行推理、证明和计算,抽象的推理和繁琐的计算使一些学生对数学兴趣索然。计算机科技的迅速发展,优秀的数学软件为用数学方法解决复杂的实际问题提供了良好的平台,使数学教学如虎添翼,过去学生由于计算技术的局限只能“望洋兴叹”的问题,如今可以通过数学实验轻松解决,数学实验使数学计算变得轻松,数学形象变得直观,数学奥妙变得美丽,数学推理变得自然。引数学实验入大学数学教学是我们近十年的举措,本套教材嵌入的高等数学实验在实训教程中,这一部分的教与学教师可酌情安排。

本书由刘春风教授、杨爱民、闫焱编著,袁书娟、李冬梅、彭亚绵参编。教材融合了河北联合大学编写团队多年的教学经验,注重直观简约,对繁琐的理论推导进行了适度的约简,对数学的理论和概念,尽可能地通过几何直观,解释其抽象和深刻的内涵,内容由浅入深,梯次渐进,通俗易懂,既宜于教师因材施教,也便于读者循序渐进自学。

本教材得以出版,对河北联合大学教材编委会的指导和支持和清华大学出版社的精心设计和悉心编辑表示衷心感谢。

由于本教材对高等数学内容调整幅度较大,前后呼应未必贴切,章节衔接未必自然,书中谬误之处难免,恳请读者批评指正。

编者

2013年盛夏

第 1 章 函数	1
1.1 预备知识	1
1.1.1 集合	1
1.1.2 空间	1
1.1.3 邻域	2
1.1.4 极坐标	3
1.2 函数	6
1.2.1 函数的概念	7
1.2.2 具有某种特性的函数	9
1.2.3 反函数	11
1.2.4 复合函数·初等函数	11
1.2.5 函数表示	12
1.2.6 经济学中常用的函数	13
习题 1	18
第 2 章 极限与连续	20
2.1 数列的一般概念	20
2.1.1 数列的定义	20
2.1.2 有界数列	21
2.1.3 单调数列	21
2.2 数列极限	21
2.2.1 问题的提出	21
2.2.2 数列极限的直观描述	22
2.2.3 数列极限的几何意义	24
2.2.4 数列极限的性质	24
2.3 函数极限	24
2.3.1 函数极限的概念	25

2.3.2	函数极限的性质	27
2.3.3	函数极限的运算法则	27
2.3.4	复合函数的极限运算法则	28
2.4	无穷小与无穷大	28
2.4.1	无穷小的概念	28
2.4.2	收敛变量与其极限的关系	29
2.4.3	无穷大的概念	29
2.4.4	无穷小与无穷大的关系	30
2.4.5	无穷小的性质	30
2.4.6	无穷小阶的比较	31
2.5	极限的计算	31
2.5.1	有理函数的极限	32
2.5.2	重要极限之一	34
2.5.3	重要极限之二	36
2.5.4	等价无穷小的代换	37
2.6	单侧极限	40
2.7	函数的连续性	41
2.7.1	函数连续的概念	41
2.7.2	函数间断点的分类	42
2.7.3	初等函数的连续性	44
2.7.4	闭区间上连续函数的性质	45
2.8	极限存在准则	47
2.8.1	准则 I —— 两边夹定理	47
2.8.2	准则 II —— 单调有界定理	49
2.9	计算极限与判断连续方法的拓展	51
2.10	极限应用	56
2.10.1	连续复利问题	56
2.10.2	Fibonacci 数列与黄金分割问题	57
2.10.3	雪花曲线问题	58
习题 2		59
第 3 章	导数与微分	65
3.1	导数的概念	65
3.1.1	问题的提出	65
3.1.2	导数的定义	67
3.1.3	导数的几何意义	69
3.2	微分的概念	71

3.2.1 问题的提出	71
3.2.2 微分的定义	72
3.2.3 微分的几何意义	73
3.3 导数的计算	73
3.3.1 四则运算法则	74
3.3.2 反函数的求导法则	75
3.3.3 复合函数的求导法则	77
3.4 微分的计算	80
3.4.1 基本初等函数的微分公式	80
3.4.2 微分的运算法则	81
3.4.3 微分形式的不变性	82
3.5 再论导数与微分	83
3.5.1 导数定义的等价形式	83
3.5.2 单侧导数	86
3.5.3 微分的实质	88
3.6 一元微分学中的主要关系	89
3.6.1 可导与连续的关系	89
3.6.2 可导与可微的关系	91
3.6.3 可导与连续可导的关系	91
3.7 微分法拓展	94
3.7.1 高阶导数求导公式及其运算法则	94
3.7.2 隐函数求导法则	97
3.7.3 由参数方程所确定的函数的导数	98
3.7.4 对数求导法	100
3.7.5 抽象函数求导	101
3.8 导数的应用	103
3.8.1 导数在经济学中的应用	103
3.8.2 导数在工程中的应用	105
3.9 微分的应用	107
3.9.1 微分在近似计算中的应用	107
3.9.2 微分在误差计算中的应用	108
习题 3	109
第 4 章 中值定理与导数的应用	114
4.1 中值定理	114
4.1.1 费马(Fermat)定理	114
4.1.2 罗尔(Rolle)定理	115

4.1.3	拉格朗日(Lagrange)中值定理	117
4.2	洛必达法则	118
4.2.1	洛必达法则 I ($\frac{0}{0}$ 型不定式)	119
4.2.2	洛必达法则 II ($\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式)	120
4.2.3	其他不定式($0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$)	122
4.3	函数的性态解析	125
4.3.1	函数的单调性	125
4.3.2	函数的凹凸性	128
4.3.3	函数的极值	131
4.3.4	函数的最值	134
4.3.5	曲线的渐近线	136
4.4	再论中值定理	137
4.4.1	罗尔定理探究	137
4.4.2	拉格朗日中值定理探究	140
4.4.3	柯西(Cauchy)定理	141
4.5	基于中值定理的证明方法拓展	143
4.6	高等不等式的证明	149
4.6.1	利用微分中值定理证明不等式	149
4.6.2	利用单调性证明不等式	149
4.6.3	利用凹凸性证明不等式	150
4.6.4	利用极值和最值证明不等式	151
4.7	经济函数的优化问题	152
4.7.1	平均成本最小化问题	152
4.7.2	存货成本最小化问题	153
4.7.3	利润最大化问题	155
4.7.4	需求弹性分析与总收益变化的问题	157
4.8	精密测量问题	158
4.9	函数图形的绘制问题	159
4.9.1	函数作图的步骤	159
4.9.2	函数绘图赏析	160
习题 4		162
第 5 章	空间解析几何	168
5.1	空间坐标系	168
5.1.1	直角坐标系	168

5.1.2	柱坐标系	170
5.1.3	球坐标系	171
5.1.4	空间两点之间的距离	172
5.2	向量代数	173
5.2.1	向量的概念	173
5.2.2	向量的坐标	174
5.2.3	向量的坐标运算	175
5.2.4	向量的数量积	178
5.2.5	向量的向量积	179
* 5.2.6	向量的混合积	182
5.3	空间平面	184
5.3.1	平面方程的类型	184
5.3.2	两平面的位置关系	188
5.4	空间直线	189
5.4.1	直线方程的类型	189
5.4.2	两直线的位置关系	192
5.4.3	直线与平面的位置关系	192
5.5	空间的距离	194
5.5.1	点面距离	194
5.5.2	点线距离	195
5.5.3	面面距离	196
5.5.4	线线距离	196
5.6	曲面及其方程	197
5.6.1	一般曲面	197
5.6.2	旋转曲面	197
5.6.3	柱面	200
5.6.4	二次曲面	201
5.7	空间曲线	209
5.7.1	空间曲线的一般方程	209
5.7.2	空间曲线的参数方程	210
5.8	线面方程求法拓展	212
5.8.1	平面束	212
5.8.2	空间曲线在坐标面上的投影	214
5.8.3	由曲线旋转而成的曲面方程	216
5.9	曲面及其组合图形在坐标面上的投影	217
5.10	图形欣赏	220
习题 5		231

第 6 章 多元函数微分法及其应用	236
6.1 二元函数	236
6.1.1 预备知识	236
6.1.2 二元函数的概念	237
6.1.3 二元函数的极限	239
6.1.4 二元函数的连续	242
6.2 偏导数	243
6.2.1 函数的增量	243
6.2.2 偏导数的概念	244
6.2.3 偏导数的几何意义	245
6.2.4 一阶偏导数的计算	246
6.2.5 高阶偏导数	248
6.3 空间曲线的切线与法平面	249
6.4 曲面的切平面与法线	253
6.5 方向导数	255
6.6 梯度	257
6.7 全微分	259
6.7.1 全微分的定义	260
6.7.2 全微分的计算	261
6.8 多元微分学中的关系	262
6.8.1 极限与连续	262
6.8.2 可导与连续	263
6.8.3 可微与可导	264
6.8.4 偏导数连续与可微	265
6.9 多元复合函数的求导法则	267
6.9.1 多元复合函数的关系	267
6.9.2 多元复合函数的求导法则	268
6.9.3 全微分形式的不变性	273
6.10 隐函数的求导法	274
6.10.1 由方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的隐函数的导数	274
6.10.2 由方程 $F(x, y, z) = 0$ 所确定的隐函数的导数	275
6.10.3 由方程组所确定的隐函数的导数	277
6.11 二元函数的极值	279
6.11.1 二元函数的无条件极值	279
6.11.2 二元函数的条件极值	284
6.12 多元函数微积分在经济学中的应用	287

6.12.1 利用偏导数对经济增量进行解释.....	287
6.12.2 利用偏导数对两种商品之间的性质进行解释.....	288
6.12.3 利用全微分在经济分析中进行近似计算.....	289
6.12.4 利用极值求经济变量的最大值和最小值.....	289
习题 6	290
附录 A 常用的初等数学公式	296
附录 B 习题答案(上)	299
参考文献	320

第1章

间空三 (三)

函 数

1.1 预备知识

1.1.1 集合

集合(简称集)是指具有某种特定性质的事物的总体。组成这个集合的事物称为该集合的元素。

以后用到的集合主要是数集,即元素都是数的集合,如果没有特别声明,提到的数都是实数。下面我们给出一些常见的数集。

自然数集

$$\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\cdots,n,\cdots\};$$

整数集

$$\mathbf{Z}=\{0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\cdots,\pm n,\cdots\};$$

其中偶数集 $\{x|x=2n,n\in\mathbf{Z}\}$,奇数集 $\{x|x=2n+1,n\in\mathbf{Z}\}$;

有理数集

$$\mathbf{Q}=\{\text{有理数}\},\text{其中 } \mathbf{Q}_+=\{\text{正有理数}\},\mathbf{Q}_-=\{\text{负有理数}\};$$

无理数集

$$\mathbf{W}=\{\text{无理数}\};$$

实数集

$$\mathbf{R}=(-\infty,+\infty),\text{其中 } \mathbf{R}_+=(0,+\infty),\mathbf{R}_-=(-\infty,0)。$$

1.1.2 空间

(一) 一维空间

实数轴上的点与全体实数 x 一一对应,记为 $\mathbf{R}$ (或 $\mathbf{R}^1$)。 $\mathbf{R}^1=(-\infty,+\infty)$ 。

(二) 二维空间

在确定的平面直角坐标系下,平面上所有点与所有有序实数对 (x,y) 一一对应,记为 $\mathbf{R}^2$ 。

$$\mathbf{R}^2=(-\infty,+\infty)\times(-\infty,+\infty)$$

$$=\{(x,y)|x\in(-\infty,+\infty),y\in(-\infty,+\infty)\}$$

(三) 三维空间

在确定的空间直角坐标系下,空间中所有点与所有有序三元数组 (x, y, z) 一一对应,记为 $\mathbf{R}^3$ 。

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^3 &= (-\infty, +\infty) \times (-\infty, +\infty) \times (-\infty, +\infty) \\ &= \{(x, y, z) \mid x \in (-\infty, +\infty), y \in (-\infty, +\infty), z \in (-\infty, +\infty)\}\end{aligned}$$

推而广之,我们将 n 元有序数组 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的全体称为 n 维空间,记为 $\mathbf{R}^n$ 。

$$\mathbf{R}^n = \underbrace{\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \dots \times \mathbf{R}}_{n\uparrow} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_k \in \mathbf{R}, k = 1, 2, \dots, n\}$$

$\mathbf{R}^n$ 中的元素 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 记为 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 。

n 维空间中的每一个元素 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 称为空间中的一个点或一个 n 维向量,数 x_k 称为该点的第 k 个坐标。

1.1.3 邻域

邻域是高等数学中一个常用的概念,下面分类讨论之。

(一) 直线上的点邻域

定义 1.1 设 $x_0 \in \mathbf{R}$, $\mathbf{R}$ 上所有与 x_0 的距离小于 $\delta > 0$ 的点集,称为 x_0 的 δ -邻域,记作 $U(x_0, \delta)$ 。其几何意义是以 x_0 为中心,以 δ 为半径的开区间,即

$$U(x_0, \delta) = \{x \mid |x - x_0| < \delta\} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

如图 1.1 所示,其中 δ 是个小的正实数。

特别地,不包含中心点的邻域称为去心邻域,记作

$$\overset{\circ}{U}(x_0, \delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$$

邻域的左半部和右半部分别称为左邻域和右邻域,记作

$$\text{左邻域 } U^-(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0)$$

$$\text{右邻域 } U^+(x_0, \delta) = (x_0, x_0 + \delta)$$

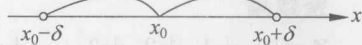


图 1.1

(二) 平面上的点邻域

设 $P(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^2$ 上所有与 $P(x_0, y_0)$ 的距离小于 $\delta > 0$ 的点集,称为 $P(x_0, y_0)$ 的 δ -邻域,记作 $U(P, \delta)$ 。 $U(P, \delta)$ 的几何意义是:以 $P(x_0, y_0)$ 为中心,以 δ 为半径的开圆域,如图 1.2 所示。

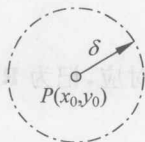


图 1.2

(三) 平面上直线的邻域

设 $y=A \in \mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^2$ 上所有与 $y=A$ 的距离小于 $\epsilon > 0$ 的点集,称为 $y=A$ 的 ϵ -邻域,记作 $U(A, \epsilon)$ 。 $U(A, \epsilon)$ 的几何意义是:以 $y=A$ 为中心,以 ϵ 为半径的带形区域,如图 1.3 所示。

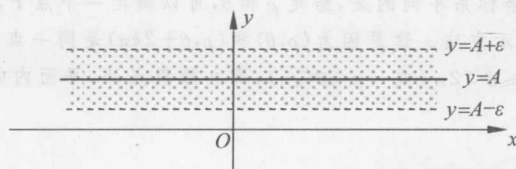


图 1.3

(四) 空间的点邻域

三维空间的点邻域是以 $P(x_0, y_0, z_0)$ 为中心, 以 δ 为半径的开球, 即

$$U(P, \delta) = \{(x, y, z) \mid \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} < \delta\}$$

【思考】 三维空间的线邻域应当如何定义? 面邻域呢? 其几何意义是什么?

1.1.4 极坐标

(一) 极坐标系

平面直角坐标系是既简单又常用的一种坐标系, 但不是唯一的坐标系。下面介绍一种利用角和距离建立的坐标系——极坐标系。

在平面内取一个定点 O , 称为极点, 引一条射线 Ox , 称为极轴, 再选定一个长度单位和角度的正方向(取逆时针方向)。对于平面内任意一点 P , 用 ρ 表示线段 OP 的长度, θ 表示从 Ox 到 OP 的角度, ρ 称为点 P 的极径(恒取正值), θ 称为点 P 的极角, 有序数对 (ρ, θ) 称为 P 点的极坐标, 这样建立的坐标系称为极坐标系, 如图 1.4 所示。

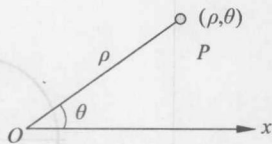


图 1.4

当点 P 在极点时, 它的极径 $\rho=0$, 极角 θ 可以取任意值。

例如, 在如图 1.5 所示的极坐标系中, 点 A, B, C, D, E, F, G 的坐标分别为

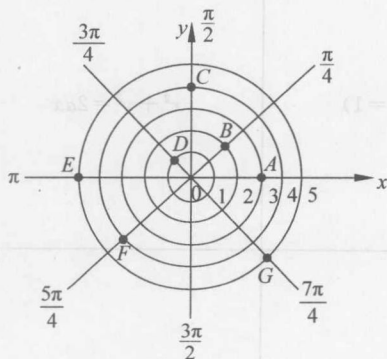


图 1.5

$A(3, 0)$	$B(2, \frac{\pi}{4})$
$C(4, \frac{\pi}{2})$	$D(1, \frac{3\pi}{4})$
$E(5, \pi)$	$F(4, \frac{5\pi}{4})$
$G(5, \frac{7\pi}{4})$	

【注】

(1) 在极坐标系中, 角度也可以取负值(顺时针方向为负), 例如, B, D, G 的坐标也可以写成 $B(2, -\frac{7\pi}{4}), D(1, -\frac{5\pi}{4}), G(5, -\frac{\pi}{4})$ 。

(2) 极坐标系与直角坐标系不同的是, 给定 ρ 和 θ , 可以确定一个点 P , 但是给定一个点 P , 对应的极坐标可以有无数种表示方法。这是因为 (ρ, θ) 和 $(\rho, \theta + 2k\pi)$ 是同一点的极坐标。为确定起见, 我们规定: $0 < \rho < +\infty, 0 \leq \theta < 2\pi$ (或 $-\pi < \theta \leq \pi$), 那么除极点外, 平面内的点和极坐标就可以一一对应了。

(二) 极坐标与直角坐标的关系

如果极坐标系的极点与直角坐标系的原点重合, 极轴与直角坐标系 Ox 轴正半轴重合, 长度单位相同, 则如图 1.6 所示, 同一点的极坐标 (ρ, θ) 与直角坐标 (x, y) 满足下列关系

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta & 0 \leq \rho < +\infty \\ y = \rho \sin \theta & 0 \leq \theta < 2\pi \end{cases} \quad \begin{cases} \rho^2 = x^2 + y^2 \\ \tan \theta = \frac{y}{x} \end{cases}$$

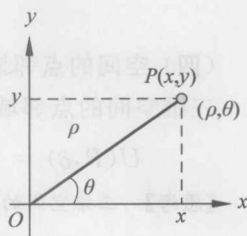


图 1.6

为了读者使用方便, 我们把常用平面曲线的直角坐标方程和极坐标方程列表, 如表 1.1 所示。

表 1.1

曲线名称	图 形	直角坐标方程	极坐标方程
圆		$x^2 + y^2 = a^2$	$\rho = a$
		$x^2 + y^2 = 2ax$	$\rho = 2a \cos \theta$
		$x^2 + y^2 = 2ay$	$\rho = 2a \sin \theta$