21世纪高等学校规划教材

高等数学（上）——基础教程

刘春凤 等 编著

清华大学出版社

21世纪高等学校规划教材

高等数学（上）
——基础教程

刘春凤 杨爱民 闫焱 编著

清华大学出版社

内容简介

本书遵循教育部制定的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，是为普通高校理工科各专业开设的“高等数学”课程编写的教材。教材分上、下两册，上册内容包括函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、空间解析几何、多元函数微积分(共6章)。下册内容包括不定积分、定积分、重积分、线面积分、无穷级数和常微分方程(共6章)。书末附有积分表、习题答案和参考文献等。

本书结构严谨、逻辑清晰，注重直观简约，内容由浅入深，通俗易懂，分层布局，梯次渐进，既宜于教师因材分层讲授，又便于读者循序渐进自学，也可作为报考工科研究生的参考书，并可供工程技术工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(上)：基础教程/刘春凤等编著. --北京：清华大学出版社，2013
21世纪高等学校规划教材
ISBN 978-7-302-33158-2

Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ①刘…　Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材　Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第159124号

责任编辑：魏江江　薛　阳
封面设计：常雪影
责任校对：焦丽丽
责任印制：宋　林

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦A座　　邮　　编：100084
社 总 机：010-62770175　　邮　　购：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
课 件 下 载：http://www.tup.com.cn，010-62795954
印 刷 者：北京富博印刷有限公司
装 订 者：北京市密云县京文制本装订厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　张**：21　　**字　　数**：508千字
版　　次：2013年6月第1版　　**印　　次**：2013年6月第1次印刷
印　　数：1～3800
定　　价：37.50元

产品编号：054692-01

本书编委会

主　任：吴印林

副主任：屈　滨　刘春凤

编　委：肖继先　何亚丽　杨爱民　闫　焱

前言

FOREWORD

数学不仅是一些知识，也是一种素质，即数学素质；数学不仅是一种工具，也是一种思维，即理性思维；数学不仅是一门科学，也是一种文化，即数学文化。当今，人类进入信息时代，数学无声无息地走进人们的生活，引领科技的发展，把握社会的命脉，我们几乎所有的工作都与数学相关，追求科学的、可持续发展的工作目标，越来越多地需要数学的描述，需要使用数学工具进行定量分析，可以说信息时代本质上是数学时代，信息技术本质上是数字技术，使用数学的程度甚至成为衡量国家科学进步的主要标志。大学数学课程因其在培养大学生理性思维、计算能力、创新意识等方面具有不可替代的作用，而成为大学课程中最重要的公共必修课，因此学好数学既是学者进取之道，也是人生智慧之举。

我国从精英教育到大众化教育的转型，高等教育发生了一系列的变化，伴随着变化也产生了诸多前所未有的问题。几十年、甚至上百年一贯制大学数学的教育问题首当其冲受到影响。尽管大学数学教学内容和课程体系改革方兴未艾，面向重点大学的具有新思路且含有数学实验的新教材陆续出现，对数学教学改革起到了推动和引领作用。然而对于普通院校，尤其对独立学院，由于缺乏与本校人才培养目标高度适应的新教材，选用教材时多倾向于与重点大学保持一致，培养目标及学生的差异使普通院校呈现传授与接受的"脱节"，教师教得辛苦，学生学得艰难，有相当比例的学生"学不会，用不了"，教学效果事倍功半。

面对当前普通高校的大学数学教育，笔者认为张景中院士提出的教育数学的观点颇有启发。学数学好比吃核桃，核桃仁美味而富有营养，但要完整地砸开吃到它却非易事，"数学教育要研究的是如何砸核桃吃核桃，而教育数学要研究改良核桃的品种，让核桃更美味更营养，更容易砸开吃净。"为此，我们组织多年从事高等数学教学的一线教师，遵循教育部制定的"工科类本科数学基础课程教学基本要求"，立足普通高等院校应用型人才培养目标的需要，融入张景中院士"想的是教育，做的是数学"的思想，编写了高等数学系列教材。本套教材旨在让更多的学子在轻松学习高等数学知识的同时，掌握数学本质，培养数学素质，提高数学能力，感受数学魅力，自觉走进数学，自由享用数学。

高等数学系列教材包括《高等数学(上)——基础教程》、《高等数学(下)——基础教程》和《高等数学(上)——实训教程》、《高等数学(下)——实训教程》(以下分别简称《基础教程》和《实训教程》)，本套教材有三个显著特点：

(1) 调整结构，增加实训。新编《高等数学基础教程》上册包括微分学、空间解析几何，下册包括积分学、无穷级数和常微分方程。《基础教程》作为课内"学数学"理论教学

篇,《实训教程》用于课外"用数学"的实训教学篇。《实训教程》由五个板块组成:知识网络图、精品课堂、达标实训、拓展实训、应用实训和数学实验,它是《基础教程》的拓展,两个教程内容协调一致,配合使用可实现课上与课下,课内与课外相辅相成。

(2) 分层布局,梯次渐进。考虑到不同专业的学生对数学需求的差异,《基础教程》把传统的内容按照六个板块——内容初识、经典解析、概念反思、理论探究、方法纵横、应用欣赏——进行了重新划分与整合。其中内容初识和经典解析为第一梯度,内容初识只限于介绍简单概念和基础知识,经典解析部分仅限于介绍最基础且经典的方法。这一梯度避开了抽象的概念和繁琐的计算,例如极限与连续的内容初识部分只描述极限概念而不精确刻画,避开"ε-N 语言",经典解析极限方法仅介绍有理分式函数的极限,两个重要极限和无穷小代换法,力求使读者轻松入门。概念反思和理论探究为第二梯度,在读者对本章内容已有初步了解的基础上,进一步揭示概念的内涵,展开相关理论的推演和证明,强化学生对知识的深刻理解,培养学生的数学思维。方法纵横和应用欣赏为第三梯度,其中方法纵横部分将集中讲解本章难度较高和综合性较强的数学方法,例题的选择注意典型性、灵活性和可拓展性,有的选自全国数学竞赛试题,也有的选自考研真题。著名数学家和数学教育家项武义先生说:教数学,要教学生"运用之妙,存乎一心",以不变应万变,不讲或少讲只能对付几个题目的"小巧",要教给学生"大巧",这个板块就是启发联想,夯实数学基本功,使学生通过引导探究渐入"无招胜有招"的境界,为学生继续深造奠定坚实的数学基础。应用欣赏旨在体现数学具有广泛应用性这一特点,但限于课程学时,高等数学的应用课堂难以细说,故在基础教程里仅举少许典型应用案例供读者欣赏,使读者学知所用。

(3) 融入实验,学以致用。长期以来,数学给人们的一些印象就是凭大脑、纸、笔进行推理、证明和计算,抽象的推理和繁琐的计算使一些学生对数学兴趣索然。计算机科技的迅速发展,优秀的数学软件为用数学方法解决复杂的实际问题提供了良好的平台,使数学教学如虎添翼,过去学生由于计算技术的局限只能"望洋兴叹"的问题,如今可以通过数学实验轻松解决,数学实验使数学计算变得轻松,数学形象变得直观,数学奥妙变得美丽,数学推理变得自然。引数学实验入大学数学教学是我们近十年的举措,本套教材嵌入的高等数学实验在实训教程中,这一部分的教与学教师可酌情安排。

本书由刘春凤教授、杨爱民、闫焱编著,袁书娟、李冬梅、彭亚绵参编。教材融合了河北联合大学编写团队多年的教学经验,注重直观简约,对繁琐的理论推导进行了适度的约简,对数学的理论和概念,尽可能地通过几何直观,解释其抽象和深刻的内涵,内容由浅入深,梯次渐进,通俗易懂,既宜于教师因材分层讲授,也便于读者循序渐进自学。

本教材得以出版,对河北联合大学教材编委会的指导和支持和清华大学出版社的精心设计和悉心编辑表示衷心感谢。

由于本教材对高等数学内容调整幅度较大,前后呼应未必贴切,章节衔接未必自然,书中谬误之处难免,恳请读者批评指正。

编　者

2013 年盛夏

目录

CONTENTS

第1章

函数

1.1 预备知识

1.1.1 集合

集合(简称集)是指具有某种特定性质的事物的总体。组成这个集合的事物称为该集合的元素。

以后用到的集合主要是数集,即元素都是数的集合,如果没有特别声明,提到的数都是实数。下面我们给出一些常见的数集。

自然数集

$\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$;

整数集

$\mathbf{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots,\pm n,\cdots\}$;

其中偶数集$\{x \mid x=2n,n\in\mathbf{Z}\}$,奇数集$\{x \mid x=2n+1,n\in\mathbf{Z}\}$;

有理数集

$\mathbf{Q}=\{$有理数$\}$,其中$\mathbf{Q}_+=\{$正有理数$\}$,$\mathbf{Q}_-=\{$负有理数$\}$;

无理数集

$\mathbf{W}=\{$无理数$\}$;

实数集

$\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$,其中$\mathbf{R}_+=(0,+\infty)$,$\mathbf{R}_-=(-\infty,0)$。

1.1.2 空间

(一) 一维空间

实数轴上的点与全体实数 x 一一对应,记为$\mathbf{R}$(或$\mathbf{R}^1$)。$\mathbf{R}^1=(-\infty,+\infty)$。

(二) 二维空间

在确定的平面直角坐标系下,平面上所有点与所有有序实数对(x,y)一一对应,记为$\mathbf{R}^2$。

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^2&=(-\infty,+\infty)\times(-\infty,+\infty)\\&=\{(x,y)\mid x\in(-\infty,+\infty),y\in(-\infty,+\infty)\}\end{aligned}$$

（三）三维空间

在确定的空间直角坐标系下，空间中所有点与所有有序三元数组(x,y,z)一一对应，记为$\mathbf{R}^3$。

$$\mathbf{R}^3=(-\infty,+\infty)\times(-\infty,+\infty)\times(-\infty,+\infty)$$
$$=\{(x,y,z)\mid x\in(-\infty,+\infty),y\in(-\infty,+\infty),z\in(-\infty,+\infty)\}$$

推而广之，我们将n元有序数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的全体称为n维空间，记为$\mathbf{R}^n$。

$$\mathbf{R}^n=\underbrace{\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\cdots\times\mathbf{R}}_{n个}=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_k\in\mathbf{R},k=1,2,\cdots,n\}$$

$\mathbf{R}^n$中的元素$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$记为$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$。

n维空间中的每一个元素$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$称为空间中的一个点或一个n维向量，数x_k称为该点的第k个坐标。

1.1.3 邻域

邻域是高等数学中一个常用的概念，下面分类讨论之。

（一）直线上的点邻域

定义 1.1 设$x_0\in\mathbf{R}$，$\mathbf{R}$上所有与x_0的距离小于$\delta>0$的点集，称为x_0的δ-邻域，记作$U(x_0,\delta)$。其几何意义是以x_0为中心，以δ为半径的开区间，即

$$U(x_0,\delta)=\{x\mid |x-x_0|<\delta\}=(x_0-\delta,x_0+\delta)$$

如图 1.1 所示，其中δ是个小的正实数。

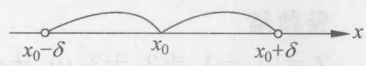


图 1.1

特别地，不包含中心点的邻域称为去心邻域，记作

$$\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}$$

邻域的左半部和右半部分别称为左邻域和右邻域，记作

$$左邻域\quad U^-(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0)$$
$$右邻域\quad U^+(x_0,\delta)=(x_0,x_0+\delta)$$

（二）平面上的点邻域

设$P(x_0,y_0)\in\mathbf{R}^2$，$\mathbf{R}^2$上所有与$P(x_0,y_0)$的距离小于$\delta>0$的点集，称为$P(x_0,y_0)$的$\delta$-邻域，记作$U(P,\delta)$。$U(P,\delta)$的几何意义是：以$P(x_0,y_0)$为中心，以$\delta$为半径的开圆域，如图 1.2 所示。

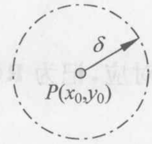


图 1.2

（三）平面上直线的邻域

设$y=A\in\mathbf{R}^2$，$\mathbf{R}^2$上所有与$y=A$的距离小于$\varepsilon>0$的点集，称为$y=A$的ε-邻域，记作$U(A,\varepsilon)$。$U(A,\varepsilon)$的几何意义是：以$y=A$为中心，以ε为半径的带形区域，如图 1.3 所示。

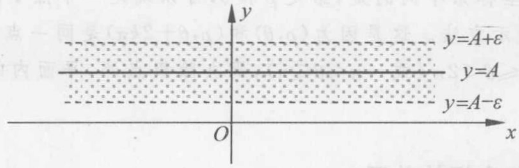


图　1.3

(四) 空间的点邻域

三维空间的点邻域是以 $P(x_0,y_0,z_0)$ 为中心，以 δ 为半径的开球，即

$$U(P,\delta)=\{(x,y,z)\mid\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}<\delta\}$$

【思考】 三维空间的线邻域应当如何定义？面邻域呢？其几何意义是什么？

1.1.4　极坐标

(一) 极坐标系

平面直角坐标系是既简单又常用的一种坐标系，但不是唯一的坐标系。下面介绍一种利用角和距离建立的坐标系——极坐标系。

在平面内取一个定点 O，称为极点，引一条射线 Ox，称为极轴，再选定一个长度单位和角度的正方向(取逆时针方向)。对于平面内任意一点 P，用 ρ 表示线段 OP 的长度，θ 表示从 Ox 到 OP 的角度，ρ 称为点 P 的极径(恒取正值)，θ 称为点 P 的极角，有序数对 (ρ,θ) 称为 P 点的极坐标，这样建立的坐标系称为极坐标系，如图 1.4 所示。

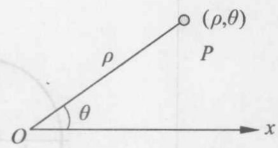
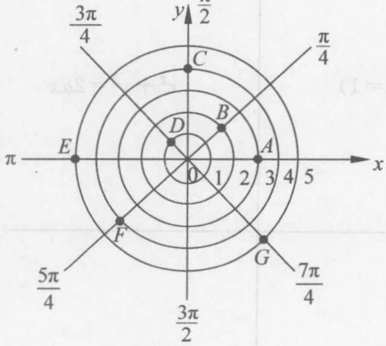


图　1.4

当点 P 在极点时，它的极径 $\rho=0$，极角 θ 可以取任意值。

例如，在如图 1.5 所示的极坐标系中，点 A,B,C,D,E,F,G 的坐标分别为



$A(3,0)$　$B\left(2,\frac{\pi}{4}\right)$

$C\left(4,\frac{\pi}{2}\right)$　$D\left(1,\frac{3\pi}{4}\right)$

$E(5,\pi)$　$F\left(4,\frac{5\pi}{4}\right)$

$G\left(5,\frac{7\pi}{4}\right)$

图　1.5

【注】

(1) 在极坐标系中，角度也可以取负值(顺时针方向为负)，例如，B,D,G 的坐标也可以写成 $B\left(2,-\frac{7\pi}{4}\right),D\left(1,-\frac{5\pi}{4}\right),G\left(5,-\frac{\pi}{4}\right)$。

(2) 极坐标系与直角坐标系不同的是，给定ρ和θ，可以确定一个点P，但是给定一个点P，对应的极坐标可以有无数种表示方法。这是因为(ρ,θ)和$(\rho,\theta+2k\pi)$是同一点的极坐标。为确定起见，我们规定：$0<\rho<+\infty$，$0\leqslant\theta<2\pi$（或$-\pi<\theta\leqslant\pi$），那么除极点外，平面内的点和极坐标就可以一一对应了。

（二）极坐标与直角坐标的关系

如果极坐标系的极点与直角坐标系的原点重合，极轴与直角坐标系Ox轴正半轴重合，长度单位相同，则如图 1.6 所示，同一点的极坐标(ρ,θ)与直角坐标(x,y)满足下列关系

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta & 0\leqslant\rho<+\infty \\ y=\rho\sin\theta & 0\leqslant\theta<2\pi \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho^2=x^2+y^2 \\ \tan\theta=\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

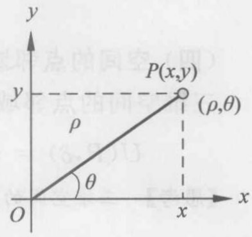
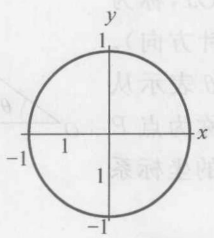
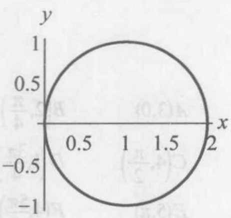
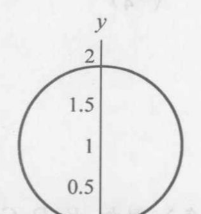


图 1.6

为了读者使用方便，我们把常用平面曲线的直角坐标方程和极坐标方程列表，如表 1.1 所示。

表 1.1

曲线名称	图形		直角坐标方程	极坐标方程
		$(a=1)$	$x^2+y^2=a^2$	$\rho=a$
圆		$(a=1)$	$x^2+y^2=2ax$	$\rho=2a\cos\theta$
		$(a=1)$	$x^2+y^2=2ay$	$\rho=2a\sin\theta$