大学数学函授教材

复变函数

主编 肖荫庵
主审 陈任昭
编者 肖荫庵 李殿国
赵 洁 李秀云

东北师范大学出版社

大学数学函授教材

复变函数

主编　肖荫庵
主审　陈任昭
编者　肖荫庵　李殿国
　　　赵　洁　季秀云

东北师范大学出版社

复 变 函 数

FUBIAN HANSHU

肖荫庵　主编　陈任昭　主审

责任编辑：李殿国　　封面设计：王　帆　　责任校对：众　仁

东北师范大学出版社出版　　吉林省新华书店发行
（长春市斯大林大街110号）　　吉林工学院印刷厂制版
（邮政编码：130024）　　吉林工学院印刷厂印刷

开本：850×1 168毫米 1/32　　1990年12月第1版
印张：12.75　　1990年12月第1次印刷
字数：312千　　印数：0 001—1 500册

ISBN 7-5602-0519-4/O·53　　（压膜）定价：3.20元

序　言

本书是遵照东北师大数学系为函授制定的《复变函数论教学大纲》（函授三年制本科用）及《数学系三年制函授教材编写原则与指导思想》，在总结我们多年函授教学实践的基础上并结合我系函授学员的实际编写而成.

该书讨论的复变函数理论是单复变函数的理论，它在众多的数学分支中属于函数论分支.

单复变函数理论被人誉为19世纪最独特的创造，几乎像微积分的直接扩展统治了18世纪那样，它统治了19世纪.这一丰饶的数学理论，曾被称为这个世纪的数学享受，它也曾被欢呼为抽象科学中最和谐的理论之一.

复变函数论研究的对象是定义在复数域上的解析函数，由此人们称它为解析函数论.又因它的主要内容是数学分析中一元实变函数在复数域的拓展，且在方法上有许多与数学分析相同，所以又有人称它为复分析.因此，阅读本书需要微积分的知识，并希望读者能在与实数及数学分析的对比中研究这门理论.

复变函数论是数学专业一门重要的专业基础课.它在数学学科众多分支（如微分方程、计算数学、解析数论、微分几何、拓扑学、泛函分析…）及其它领域（如流体力学，弹性力学、电学、工程技术…）有着广泛应用.因此，学习与掌握它的基本理论与方法，对于建立良好的数学基础及处理某些实际问题是很必

要的.

特别是，该课程的内容有些与中学数学的教学有着密切联系. 通过本课程的学习可以对中学数学的某些理论（如复数）有比较透彻的理解与认识，并且还可加深与拓广对某些知识（如初等函数）的认识. 因此，学习本课程对于搞好中学数学的教学工作也是非常必要的.

复变函数论渊源于18世纪的数学. 当时，欧拉(L.Euler)经过精心提炼最先编纂了一个庞大的关于学科的资料，这一珍贵著作致使几代数学家为之专心研究. 第一个试图建立系统的函数理论的数学家是拉格朗日 (J.L.Lagrange)，他十分大胆地设想在幂级数的基础上发展整个理论.

然而，当时所知的大部分结果并不十分可靠. 但对许多单独的事实，高斯 (C.F.Gauss) 却第一次给出了符合我们现代标准的证明. 遗憾的是，高斯从来没有发表过在这方面所特有的最为重要的思想. 一直等到柯西(A.L.Cauchy)，他发现并系统地发展了复围道积分的概念，进而才对函数论创建了第一个有连贯性的结构.

黎曼 (B.Riemann)的天才不仅在于将柯西的理论带到了一个更完美的境地，而且为函数论奠定了几何理论基础. 在保形映射理论中，以其名字命名的黎曼定理在理论上是近代复变函数几何理论的起点，而黎曼的几何方法从掌握研究对象的本质来看，也是最有成效的方法之一.

几乎与此同时，维尔斯特拉斯 (K. Weierstrass) 重新提起了前面所谈到的拉格朗日思想，在此思想的基础上，他将函数论加以算术化，进而发展成一个从严格与雅致的观点来说都是无与伦比的系统.

本书主要是围绕柯西、黎曼及维尔斯特拉斯的工作展开的. 我们从可导、积分、级数和映射四个侧面讨论、揭示了解析函数的性质. 这些内容在复变函数论的发展史中大都属于经典理论部分.

随着近代科技的发展，复变函数论的分支逐渐增多．例如，整函数与亚纯函数的值分布论、单叶函数理论、黎曼曲面、广义解析函数、复变函数逼近论、拟保形映射、多复变函数论等等都是当今数学工作者如醉如痴的研究内容．我国的数学工作者在其中某些方面的研究已处于世界领先的地位．

例如，在亚纯函数值分布理论的研究中有两个重要的领域，一是研究“例外值”的模分布论，另一是研究“奇异方向”的辐角分布论．长期以来，人们都是在这两个领域里分别进行研究的，并且获得了大批成果．然而，到了本世纪的70年代，我国青年数学家杨乐与张广厚(已故)在这方面的研究取得了突破性进展，作出了具有世界先进水平的成果，有的被命为“杨、张定理”在国际学术界广为流传．他们所获成果的重要性在于：最先使得模分布论与辐角分布论这两个重要领域辩证地沟通起来，从而结束了对这两个领域只是分开、孤立研究的局面；对亏值数目的估计得到了普遍、准确的上界；彻底解决了亚纯函数奇异方向的分布问题．

在本书写作中，我们没有从讲述维尔斯特拉斯的观点（幂级数)开始，而是从讲述柯西的观点即从可导函数开始．之所以如此，其原因在于使本书研究、讨论的顺序尽量与读者所熟悉的数学分析相近，从而便于入门与比较．

我们编写时，在确保教材所必需的科学、教学、思想、文图水平的基础上，还特别做了如下尝试：

1．尽量从“未知者”的角度出发，依照认识视律运用启发式，以研究、探索、创造的口气行文，而不是以传授现成、已知结果的“灌输”口气行文．

2．主要概念与定理尽量在对旧知识的观察、分析中提出．

3．在传授知识过程中特别重视对能力的培养，力图使学员不仅学会而且要“会学”．

4．精心设计所讲问题的“前言”与“后语”．“前言”重在

承上启下，引出问题，激发学员的求知欲与创造欲．“后语”重在揭示问题的实质、意义、应用及设置“悬念”，留下可供思考的问题．通过前言与后语将零散的知识衔接成一有机体，而不是知识的简单编组．

5．为密切联系中学实际，一方面尽可能多地在内容、例题、习题方面联系中学内容，另一方面尽可能在思维方式与教学方法上给学员以某种启示．

6．语言力求通俗易懂、深入浅出、形象、生动，从而便于自学，试图朝“无师自通”的目标接近．

7．为便于自学，在节与章后分别配置了复习思考题与习题，并在复习思考题的末尾指出了本节所能做的习题．为便于学员能检查自己是否已“学进去”，我们对全书各节的复习思考题与各章的习题均作了解答（或给出提示及答案）附在书后．

对这一部分内容是否放在书中我们曾经犹豫过．因为，这样的内容极易丧失“培养性”，并且可能使学员养成依赖的习惯，从而带来许多弊端．但是，由于考虑到本书的主要读者将是一些工作与家务都很重，主要是靠业余时间自学，而身边可供讨论与请教的条件又极差的同志，所以我们最后还是决定将这部分内容放入书中．为了减少“依赖性”，增加“培养性”，我们建议读者在使用这部分材料时能考虑下列几点：

（1）不到“万不得已”时，不读这部分内容，即对一个题定要多思考一段时间，只有到“百思而不解”时才去看解答．

（2）看解答时要先读懂．

（3）在读懂解题过程的基础上，对该过程用到哪些基础理论、基本知识、基本方法加以思考．

（4）所用方法有无特殊技巧？方法有无普遍指导意义？

（5）该题有无其他解法？若有，那么有几种？

（6）思考解法是怎么想到的．

读者若能注意到以上几点，则对增加“培养性”一定是有益

的．另外，读者需注意的是，各章的基本题均放在“＊＊＊＊”之前．

8．各章的引言着重写问题是怎么提出的．因此，想尽早知道每章的主要内容与重点的读者，可先看各章后面的总结．

书中的第1章由赵洁执笔，第2章由季秀云执笔，第3、4、7、8章由肖荫庵执笔，第5、6章由李殿国执笔，复习思考题与习题解答由赵洁与季秀云执笔，最后由肖荫庵修改、整理定稿．

本书由陈任昭教授主审．由于他极为认真、热情的帮助，使得本书的质量得以进一步提高，对此我们深表谢意．

全书插图由刘梦飞同志绘制，特在此致谢．

最后，我校成人教育学院与出版社的同志对本书的出版给予了热情帮助与指导，我们也在此表示感谢．

由于我们学识浅薄，书中不妥之处一定存在，恳请读者不吝赐教．

编　者

1989年11月于东北师范大学

目　录

1

复数与复变函数

复变函数论将把大学数学分析教程中的一元实变函数的微积分推广到复变函数的情形，它所研究的主要对象是定义在复数集上的一类特殊的复变函数——解析函数类，有人也称它为复分析或解析函数论．

复变函数论无论在数学学科本身还是在数学以外的某些学科（流体力学、弹性理论、电学等等）都有着广泛的应用，这些应用正是这门理论的生命力之所在．

为建立解析函数论的理论基础，由它所研究的对象易知，我们应首先讨论复数与复变函数．

§1.1 复数发展史略

复数理论的产生和发展经历了漫长而又艰难的岁月．

16 世纪中叶，意大利的数学和物理学家卡尔丹（H.Cardan）在解方程 $x(10-x)=40$ 时，首产先生了负数开平方的思想，他说“不管会受到多大的良心责备，”将把 40 看作 $5+\sqrt{-15}$ 与 $5-\sqrt{-15}$ 的乘积．然而当时谁也说不清楚 $\sqrt{-15}$ 这种纯形式的表示究竟有什么好处，所以那时许多人根本不承认负数开平方后

还是“数”. 17世纪的法国大数学家笛卡尔也说这样的数是“不可思议的”. 因而称其为“虚数”. 这种情况使得17世纪和18世纪的数学家对使用复数的合理性产生了极大的怀疑，人们一直把它看成是无实际意义的东西而加以抵制.

1747年，法国著名数学家达朗贝尔（J.R.D'Alembert)推进了复数的研究工作. 他指出，如果按照多项式的四则运算规则对虚数进行运算，那么它的结果总是 $x+y\sqrt{-1}$ 的形式（x、y 为实数）. 这实际上已经提出了复数的概念. 不过，“复数”这个名词是在1831年由被人誉为“数学王子”的德国数学家高斯（C.F. Gauss）给出的.

1777年，瑞士数学家欧拉（L.Euler）系统地建立了复数理论，发现了复指数函数和三角函数间的关系，创立了复变函数论的一些基本定理，他首创的用“i”作为虚数单位的符号一直沿用到今天. 此后复数才被人们逐渐承认和使用，这距虚数的出现已经经历了两个多世纪了.

1797年，丹麦的测量学家万塞尔（C.Wessel）在前人工作的基础上，正式提出把复数 $x+yi$ 用笛卡尔坐标平面上的一点 (x,y) 来表示的瓦利斯（J.Wallis）表示法，使复数的全体和平面上点的全体建立了一一对应的关系，形成了复平面的概念. 至此，人们获得了复数的一种几何解释. 1799年高斯在其学位论文中也已用到复数这种表示法，他以后在“哥廷根学报”的一篇论文中指出，人们“对于复数只是抱了一种容忍的态度，而不顾它们的巨大价值，对于许多人来说，它们不过是一种符号游戏，但是在这个几何表示中人们可以看到，复数的直观意义已完全建立起来了”. 正是复数的几何解释与复数理论的建立对稳固复数的立足点，破除复数的神密性有着十分重要的意义.

1831年高斯和1837年英国数学家哈密顿(W.R.Hamilton)定义复数 $x+yi$ 为一有序的实数对 (x,y)，从而奠定了复数理论严格的纯算术的基础.

19 世纪以后，复数与复变函数的理论得到了蓬勃的发展，经过法国数学家柯西(A.L.Cauchy)、德国数学黎曼(B.Riemann)和维尔斯特拉斯（L.Weierstrass）的巨大努力，已经形成了非常系统的理论，并且深刻地渗入到数学的许多其它分支，同时在科学技术的某些领域里（如流体力学、弹性力学、电学等）不断出现许多卓有成效的应用。于是，随着近代数学的产生与发展，随着人们对复数的认识逐渐深化，复数产生初期所披上的那层神密莫测的面纱渐渐被揭开，不再带有“虚”的色彩了。

复数产生、发展的史实向我们表明，复数理论是“来之不易”的，无论是从继承还是发展的角度来看，我们都应该珍惜它，学好它.

§1.2 复数定义及运算

1. 复数的定义

定义 1.2.1 形如(x,y)的有序实数对称为**复数**.

这里，“有序”意指：如果$x\neq y$，那么 $(x,y)\neq(y,x)$.

我们用 z 表示复数(x,y)，记作 $z=(x,y)$.

一切复数的全体构成复数集，记作

$$C=\{z=(a,b):a,b\in \boldsymbol{R}\}$$

此处 $\boldsymbol{R}$ 表示实数域.

2. 复数的相等及运算

定义 1.2.2 对C中任意两个复数 $z_1=(a,b)$，$z_2=(c,\ d)$. 规定

1）当且仅当 $a=c$ 且 $b=d$ 时称 z_1 与 z_2 **相等**，记作 $z_1=z_2$.

2）$z_1+z_2=(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$.

$z_1-z_2=(a,b)-(c,d)=(a-c,b-d)$.

$z_1\cdot z_2=(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,bc+ad)$.

$$z_1 \div z_2 = \frac{(a,b)}{(c,d)} = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right), \quad z_2 \neq 0.$$

关于复数的四则运算我们要指出：

1）容易验证复数的加法与乘法均满足交换律和结合律，乘法满足对于加法的分配律.

由此我们看到尽管可以任意定义复数的四则运算，但是人们在下定义时又不是随心所欲的，要考虑到其实用价值及其它诸如合理性及和谐性等因素. 对运算如此，对别的定义也是如此.

2）实际上，在四则运算中，只需给出加法与乘法的规定，减法和除法可以分别作为它们的逆运算推导出来.

3）由于任意两个复数经过四则运算后所得结果仍然是复数，所以复数集的代数结构是域. 以后常称复数集为**复数域**.

3．复数的代数式

由复数的加法与乘法易得

$$(a,0)+(c,0)=(a+c,0).$$

$$(a,0)\cdot(c,0)=(a\cdot c-0\cdot 0, 0\cdot c-a\cdot 0)=(ac,0).$$

这意味着对形如$(a,0)$的复数作加法和乘法运算时，可以像计算实数一样进行，因此我们可以把$(a,0)$与a等同起来. 此等同关系使实数域成了复数域的一个子域.

据此，我们可以规定

$$a+(c,d)=(a,0)+(c,d)=(a+c,d).$$

$$a\cdot(c,d)=(a,0)\cdot(c,d)=(ac,ad).$$

按此规定有

$$z=(x,y)=(x,0)+(0,y)=x+y\cdot(0,1).$$

简记$i=(0,1)$，有$z=(x,y)=x+yi$.

我们称$x+yi$为复数z的**代数式**，其中实数x和y分别称为复数z的实部与虚部，记作

$$x=\mathrm{Re}z, \quad y=\mathrm{Im}z.$$

i称为虚数单位，易知i的一个重要性质：$i^2=-1$.