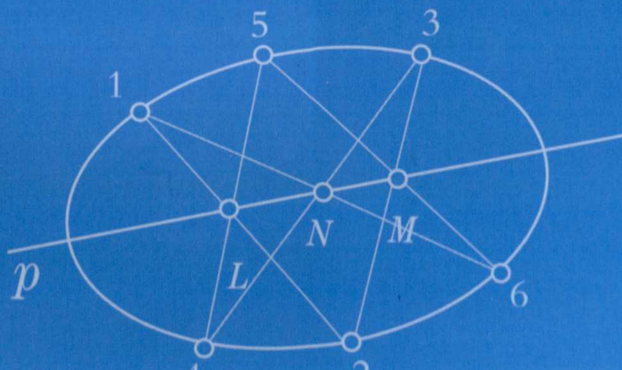
普通高等教育“十二五”规划教材
新世纪新理念高等院校数学教学改革与教材建设精品教材

丛书主编：朱长江 彭双阶
执行主编：何 穗

高等几何

GAODENG JIHE

周振荣
赵临龙 ◎主编



华中师范大学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材
新世纪新理念高等院校数学教学改革与教材建设精品教材

高 等 几 何

主　编:周振荣　赵临龙
副主编:梅汇海　徐国进　任全玉

华中师范大学出版社

内 容 提 要

本书全书共分为4章，其主要内容有：射影直线与射影平面、射影坐标与射影变换、二次曲线的射影理论、高等几何在初等几何中的应用。每章后配有适量经典习题，供学习者练习、巩固提高使用，习题配有详细的参考答案供读者参阅。本书科学体系严谨，内容精炼，深入浅出、语言生动，图文并茂，易教易学。

本书可作为高等院校数学专业教材，亦可供有关人员参考。

新出图证(鄂)字10号

图书在版编目(CIP)数据

高等几何/周振荣　赵临龙 主编．—武汉：华中师范大学出版社，2013．8

(普通高等教育"十二五"规划教材/新世纪新理念高等院校数学教学改革与教材建设精品教材)

ISBN 978-7-5622-6089-9

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①周…　②赵…　Ⅲ．①高等几何—高等学校—教材　Ⅳ．①O18

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第099037号

高等几何

©周振荣　赵临龙　主编

编辑室：第二编辑室　　**电话**：027－67867362

责任编辑：冯红亮 袁正科　　**责任校对**：易　雯　　**封面设计**：胡　灿

出版发行：华中师范大学出版社

社址：湖北省武汉市珞喻路152号　　**邮编**：430079

销售电话：027－67863426/67863280(发行部)　027－67861321(邮购)　027－67863291(传真)

网址：http://www.ccnupress.com　　**电子信箱**：hscbs@public.wh.hb.cn

印刷：武汉理工大印刷厂　　**督印**：章光琼

开本：787 mm×1092 mm　1/16　　**印张**：9　　**字数**：200千字

版次：2013年8月第1版　　**印次**：2013年8月第1次印刷

印数：1—2000　　**定价**：16.80元

欢迎上网查询、购书

普通高等教育"十二五"规划教材
新世纪新理念高等院校数学教学改革与教材建设精品教材

丛书编写委员会

丛书总序

未来社会是信息化的社会，以多媒体技术和网络技术为核心的信息技术正在飞速发展，信息技术正以惊人的速度渗透到教育领域中，正推动着教育教学的深刻变革。在积极应对信息化社会的过程中，我们的教育思想、教育理念、教学内容、教学方法与手段以及学习方式等方面已不知不觉地发生了深刻的变革。

现代数学不仅是一种精密的思想方法、一种技术手段，更是一个有着丰富内容和不断向前发展的知识体系。《国家中长期教育改革和发展规划纲要(2010—2020年)》指明了未来十年高等教育的发展目标："全面提高高等教育质量"、"提高人才培养质量"、"提升科学研究水平"、"增强社会服务能力"、"优化结构办出特色"。这些目标的实现，有赖于各高校进一步推进数学教学改革的步伐，借鉴先进的经验，构建自己的特色。而数学作为一个基础性的专业，承担着培养高素质人才的重要作用。因此，新形势下高等院校数学教学改革的方向、具体实施方案以及与此相关的教材建设等问题，不仅是值得关注的，更是一个具有现实意义和实践价值的课题。

为推进教学改革的进一步深化，加强各高校教学经验的广泛交流，构建高校数学院系的合作平台，华中师范大学数学与统计学学院和华中师范大学出版社充分发挥各自的优势，由华中师范大学数学与统计学学院发起，诚邀华中和周边地区部分颇具影响力的高等院校，面向全国共同开发这套"新世纪新理念高等院校数学系列精品教材"，并委托华中师范大学出版社组织、协调和出版。我们希望，这套教材能够进一步推动全国教育事业和教学改革的蓬勃兴盛，切实体现出教学改革的需要和新理念的贯彻落实。

总体看来，这套教材充分体现了高等学校数学教学改革提出的新理念、新方法、新形式。如目前各高等学校数学教学中普遍推广的研究型教学，要求教师少

讲、精讲，重点讲思路、讲方法，鼓励学生的探究式自主学习，教师的角色也从原来完全主导课堂的讲授者转变为学生自主学习的推动者、辅导者，学生转变为教学活动的真正主体等。而传统的教材完全依赖教师课堂讲授、将主要任务交给任课教师完成、学生依靠大量的被动练习应对考试等特点已不能满足这种新教学改革的推进。如果再叠加脱离时空限制的网络在线教学等教学方式带来的巨大挑战，传统教材甚至已成为教学改革的严重制约因素。

基于此，我们这套教材在编写的过程中注重突出以下几个方面的特点：

一是以问题为导向、引导研究性学习。教材致力于学生解决实际的数学问题、运用所学的数学知识解决实际生活问题为导向，设置大量的研讨性、探索性、应用性问题，鼓励学生在教师的辅导、指导下于课内课外自主学习、探究、应用，以加深对所学数学知识的理解、反思，提高其实际应用能力。

二是内容精选、逻辑清晰。整套教材在各位专家充分研讨的基础上，对课堂教学内容进一步精炼浓缩，以应对课堂教学时间、教师讲授时间压缩等方面的变革；与此同时，教材还在各教学内容的结构安排方面下了很大的功夫，使教材的内容逻辑更清晰，便于教师讲授和学生自主学习。

三是通俗易懂、便于自学。为了满足当前大学生自主学习的要求，我们在教材编写的过程中，要求各教材的语言生动化、案例更切合生活实际且趣味化，如通过借助数表、图形等将抽象的概念用具体、直观的形式表达，用实例和示例加深对概念、方法的理解，尽可能让枯燥、繁琐的数学概念、数理演绎过程通俗化，降低学生自主学习的难度。

当然，教学改革的快速推进不断对教材提出新的要求，同时也受限于我们的水平，这套教材可能离我们理想的目标还有一段距离，敬请各位教师，特别是当前教学改革后已转变为教学活动“主体”的广大学子们提出宝贵的意见！

朱长江
于武昌桂子山
2013 年 7 月

前　言

《高等几何》《数学分析》与《高等代数》并列为大学本科数学专业的三门最重要的专业基础课。在当前的大环境下，高等教育培养人才目标的不断改革和快速发展的社会节奏使得《高等几何》课程有逐渐弱化的趋势。即便如此，仍然有许多院校的数学专业开设了《高等几何》这门课程，体现了这门课程的重要性。

传统的《高等几何》课程一般包括空间解析几何、射影几何、几何基础等内容。但由于课时的限制，现在的《高等几何》课程一般只讲授射影几何的相关知识。按照克莱因的观点，射影几何是研究射影不变量和不变性质的一门学科。在射影几何里，有许多无与伦比的精美定理，他们不仅形式对称美观，而且具有极高的应用价值。比如笛萨格定理及其逆定理、巴士卡定理及其逆定理、布利安香定理及其逆定理等不仅在共点与共线问题的讨论中非常有用，而且被广泛地应用于航空、测量、绘图、摄影等领域。

《高等几何》对初等几何具有重要的指导意义。许多初等几何的问题如果用高等几何知识来解决，不仅能使证明简单明了，而且得到的结论往往更具有一般性。因此，《高等几何》课程应该成为数学专业尤其是师范院校数学专业的必修课（尽管目前在某些师范院校不是），每个数学专业的学生都应该学好这门课程。

这本《高等几何》教材是我们多年教学经验的总结，内容包括射影直线与射影平面、射影坐标与射影变换、二次曲线的射影理论、高等几何在初等几何中的应用举例等内容。在编写教材时，我们力求内容简单明了、通俗易懂、便于自学，而且我们还讨论了高等几何在初等几何中的应用。这本教材适合大学数学专业的学生使用，同时也适合中学数学教师作为教学参考书使用，对航空、测量、绘图、摄影等专业的学生以及从事相关领域研究和工作的技术人员也具有参考价值。

限于作者水平，书中难免存在诸多不足之处，望广大读者不吝赐教。

编者

2013.5.10

目 录

第 1 章

射影直线与射影平面

1.1 中心射影与无穷远元素

1.1.1 中心射影

首先讨论平面上两直线间的中心射影。

如图1-1,设在平面 π 上有两条直线 l 和 l',点 O 是平面上位于这两条直线外的任意一点。对直线 l 上的任意一点 P,过 O,P 作直线交直线 l' 于点 P'。定义映射 $\varphi: l \to l'; P \mapsto P'$,则称 φ 为从 l 到 l' 的**中心射影**,点 O 叫做**射影中心**。

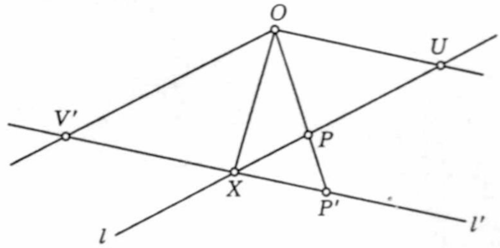


图 1-1

注意,在上述中心射影中,直线 l,l' 的交点 $X = l \times l'$ 是自对应点;直线 l 上有一个点 U 在上述中心射影下无像点;直线 l' 上也有一个点 V' 在上述中心射影下无原像点。点 U 称为 l 上的**影消点**,点 V' 称为 l' 上的影消点。影消点的存在,导致两直线间的中心射影不是一个双射。

现在讨论两平面间的中心射影。

设在空间中有两张平面 π 和 π',点 O 是这两张平面外任意一点。对平面 π 上的任意一点 P,过 O,P 作直线交平面 π' 于点 P'。定义映射 $\varphi: \pi \to \pi'; P \mapsto P'$,则称 φ 为从平面 π 到 π' 的**中心射影**,点 O 叫做**射影中心**。如图 1-2。

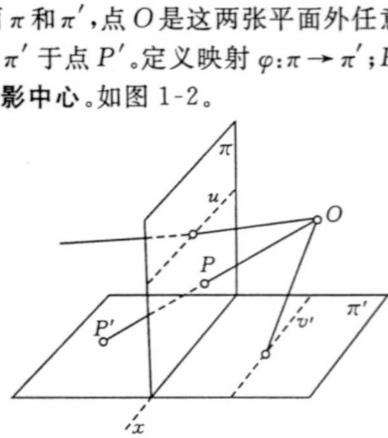


图 1-2

注意，在中心射影 φ 下，直线 $x=\pi\times\pi'$ 是自对应直线；平面 π 上有一条直线 u，它上面的点在中心射影下没有像；平面 π' 上也有一条直线 v'，它上面的点在中心射影下没有原像。这两条直线都叫做中心射影的**影消线**。由于影消线的存在，导致两平面间的中心射影不是一个双射。

定理 1.1　平面间的中心射影有如下两个性质：

(1) 保持同素性，即将点对应成点，直线对应成直线。

(2) 保持结合性，即保持点和直线的结合关系(点和直线的结合关系是指点在直线上或直线通过点)。

证明　只需证明中心射影将一平面上共线的三个点变成另一平面上共线的三个点。如图 1-3，我们取平面 π 上共线的三点 A,B,C，它们在中心射影下的像依次为点 A',B',C'。设点 A,B,C 所在的直线为 a，下面要证明点 A',B',C' 共线。由于点 O、A、B、C 共面，设它们所在的平面为 π''，π'' 与 π' 的交线记为 a'，则点 A',B',C' 在直线 a' 上。

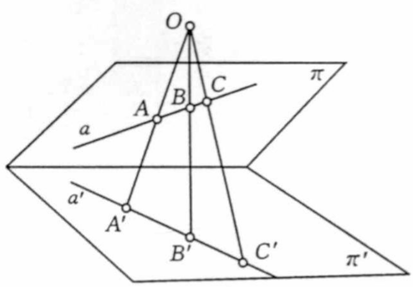


图 1-3

1.1.2　无穷远元素

为了使中心射影成为双射，我们需要改造直线、平面和空间。要求在改造直线和平面的时候满足下列三个基本关系：

(1) 两条相异的共面直线确定唯一一个点(交点)。

(2) 两个相异点确定唯一一条直线(连线)。

(3) 两个相异平面确定唯一一条直线(交线)。

我们的做法就是给平行直线添加交点。

约定 1.2　**(1) 在每一条直线上添加唯一一个点，此点不是该直线上原有的点，称为无穷远点(或理想点)，记作 P_∞。在相互平行的直线上添加的无穷远点相同，不平行的直线上添加的无穷远点不同。**

(2) 平面上全体无穷远点构成一条直线，称为无穷远直线(或理想直线)，记作 l_∞。

(3) 空间中所有无穷远点构成的集合构成一平面，称为无穷远平面(或理想平面)。

增加了无穷远点的直线叫**仿射直线**，增加了无穷远直线的平面叫**仿射平面**，增加了无穷远平面的空间叫**仿射空间**。为区别起见，我们称仿射空间原有的点为**有穷远点**或**通常点**；把除无穷远直线外的直线称为**有穷远直线**或**通常直线**；把除无穷远平面以外的平面称为**有穷远平面**或**通常平面**。

在平面上添加无穷远元素之后，没有破坏点与直线的关联关系，同时也使得中心射影成为双射。中心射影也叫**透视对应**。

例 1.3　在仿射空间中，我们有以下命题：

(1) 平面上的每一个方向有唯一的无穷远点。任意一组平行的直线交于同一无穷远点；交于同一无穷远点的直线相互平行。

(2) 不平行的直线上的无穷远点不同。

(3) 平面上的平行直线交于无穷远点，不平行的直线交于通常点，因此平面上任意两条直线交于唯一一点。

(4) 直线或者在某平面上，或者与这个平面交于唯一一点。

(5) 一组平行平面上的无穷远直线是相同的，这条无穷远直线就是这组平行平面的交线。

(6) 平面上每一条直线(无穷远直线除外) 与无穷远直线有且仅有一个交点，这个交点就是该直线上的无穷远点。

(7) 每一平面上有且仅有一条无穷远直线。

(8) 空间中任意两张平面有唯一的交线。两平行平面的唯一交线是无穷远直线；两不平行的平面的唯一交线是通常直线。

如果把通常点和无穷远点不加区别，则仿射直线就叫**射影直线**，仿射平面就叫**射影平面**，仿射空间叫**射影空间**。

1.1.3　笛萨格定理及其逆定理

在射影平面上，我们有以下笛萨格(Desargues) 定理。

定理 1.4　**(笛萨格定理) 如果两个三角形对应顶点的连线交于一点，则其对应边的交点共线。**

(笛萨格定理的逆定理) 如果两个三角形的对应边的交点共线，则其对应顶点的连线交于一点。

证明笛萨格定理可用代数方法，也可用综合法。用综合法证明要涉及空间几何，因此要构建平面射影几何的公理体系需要把这个定理作为公理。下面我们采用综合法来证明笛萨格定理，其逆定理的证明留作练习。

证明　设这两个三角形分别是 ABC 和 $A'B'C'$，令 AA'、BB'、CC' 三直线的交点为 O。因 BB' 与 CC' 交于 O，所以 B,B',C,C' 四点共面，于是 BC 与 $B'C'$ 交于一点，设为 P。同理可证 AC 与 $A'C'$ 交于一点，设为 Q，AB 与 $A'B'$ 交于一点，设为 R。

下面分两种情况证明：

(1) 三角形 ABC 和三角形 $A'B'C'$ 不共面(如图 1-4)。在这种情况下，设这两个三角形所在的平面分别为 π 和 π'。因点 P 在直线 BC 上，所以 $P \in \pi$。又因点 P 在直线 $B'C'$ 上，所以 $P \in \pi'$。因此 $P \in \pi \times \pi'$(交线)。同理可证 $Q,R \in \pi \times \pi'$，故点 P,Q,R 共线。

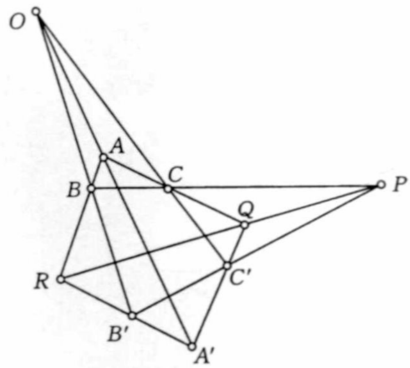


图 1-4

(2) 设三角形 ABC 和三角形 $A'B'C'$ 在同一平面 π 上。此时，过点 O 作一条异面直线 l，然后在 l 上任取两点 S 和 S'（如图 1-5）。考虑三角形 SBC 和三角形 $S'B'C'$，则这两个三角形异面（否则，如果它们共面，则这个平面必须是 π，于是点 S，S' 就在 π 上，这与 l 为异面直线矛盾）。另一方面，三角形 SBC 和三角形 $S'B'C'$ 对应顶点连线交于一点 O，由(1) 的结论可知它们对应边的交点共线。设

$$A'' = AS \times A'S', B'' = BS \times B'S', C'' = CS \times C'S',$$

则点 B''，C''，P 共线。同理可知点 A''，C''，Q 共线，点 A''，B''，R 共线。再考虑三角形 ABC 和三角形 $A''B''C''$，则它们对应顶点的连线交于一点 S。另一方面，这两个三角形不共面（否则，$B''C''$ 在 π 上，从而三角形 SBC 也在 π 上。同理三角形 $S'B'C'$ 也在 π 上，这与三角形 SBC 和三角形 $S'B'C'$ 异面矛盾），因此，由(1) 可知对应边的交点共线，即 P，Q，R 三点共线。

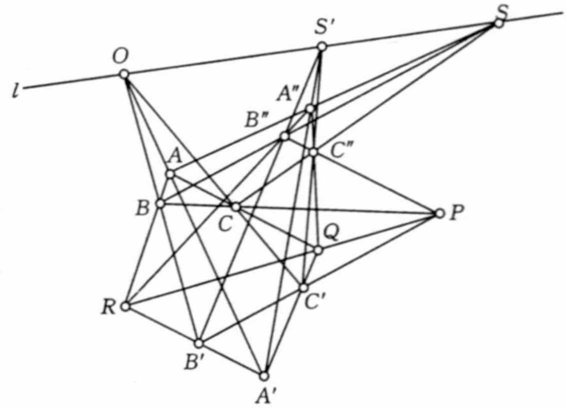


图 1-5

注意，笛萨格定理也叫**笛萨格透视定理**或**笛萨格三角形定理**。笛萨格(1593 — 1662)是法国建筑师，擅长几何。笛萨格定理见他的一本关于圆锥曲线的小册子，这本小册子给 200 多年后的庞斯雷开辟了研究射影几何的道路。

例 1.5 设 AD，BE，CF 分别为三角形 ABC 的 BC，CA，AB 边上的高（或中线），

$$X = BC \times EF, Y = CA \times FD, Z = AB \times DE,$$

证明 X，Y，Z 三点共线。

证明　如图 1-6。

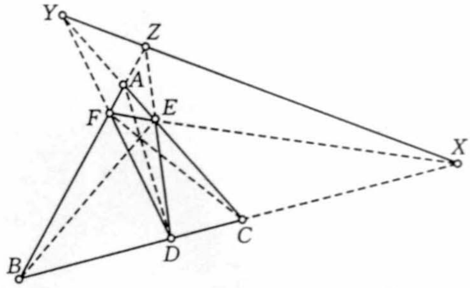


图 1-6

考虑三角形 ABC 和三角形 DEF，运用笛萨格定理即可。

例 1.6　已知平面上两条直线 a，b，P 为不在直线 a，b 上的任意一点，试在不给出 $a\times b$，过 P 点作直线 c 经过 $a\times b$。

作法：

(1) 在直线 a，b 外任取一异于 P 的点 O，过 O 点作三条直线 l_1，l_2，l_3，设

$$A_1=l_1\times a, A_2=l_2\times a, B_1=l_1\times b, B_2=l_2\times b;$$

(2) 作直线 PA_1 交 l_3 于点 A_3，作直线 PB_1 交 l_3 于点 B_3；

(3) 作 $Q=A_2A_3\times B_2B_3$；

(4) 连结点 P，Q，直线 PQ 即为所求。

画图(如图 1-7)。

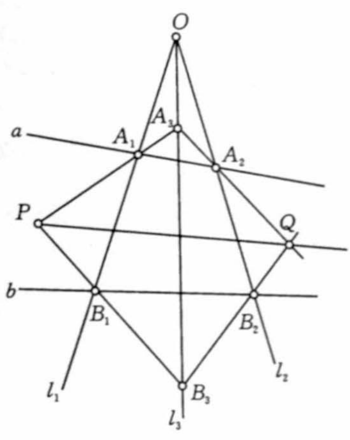


图 1-7

证明　考虑三角形 $A_1A_2A_3$ 和三角形 $B_1B_2B_3$，它们对应顶点的连线交于点 O，所以对应边的交点共线，即点 P，Q，$A_1A_2\times B_1B_2$ 共线。

注意，作图题一般都要求写出作图步骤、画出图形、证明所作图形满足题目的要求。

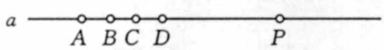
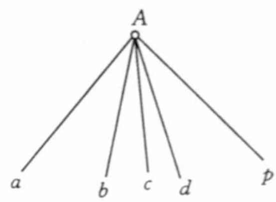
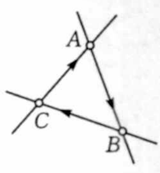
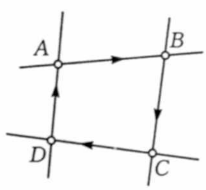
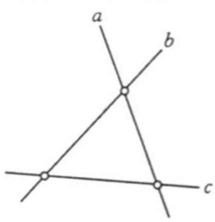
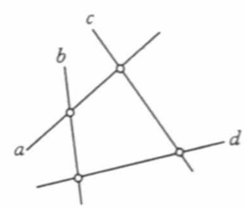
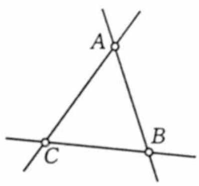
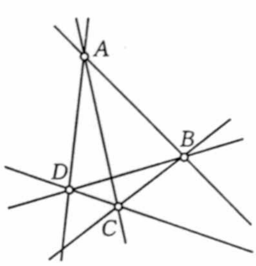
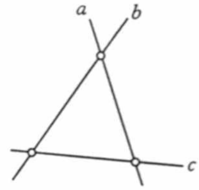
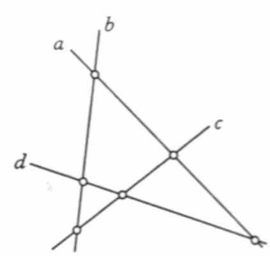
1.1.4　射影平面的对偶原理

在射影平面上，我们把点和直线称为一对**对偶元素**，把过点作直线和在直线上取点称为**对偶运算**，把图形中的对偶元素进行互换并作对偶运算称为对该图形作**对偶变换**。

设由点、直线及其关联关系(即点在直线上或直线通过点)构成的图形 Σ 已知,若对 Σ 作对偶变换,则得到一个新的图形 Σ',我们称 Σ,Σ' 为一对**对偶图形**。

下面我们列举一些对偶图形的例子:

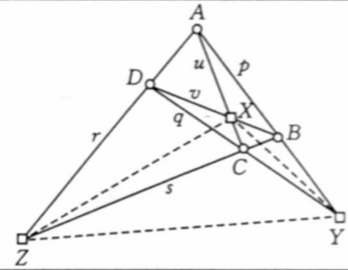
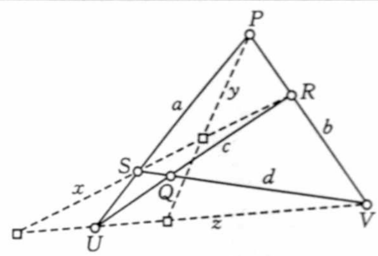
表 1-1

点 	**直线** 
点列(在一直线上的点集) 	**线束**(过一点的直线集) 
简单 n 点形:n 个点(其中无三点共线)及其两两顺次连线构成的图形。 n 个顶点,n 条边  简单三点形  简单四点形	**简单 n 线形**:n 条直线(其中无三线共点)及其两两顺次相交的交点构成的图形。 n 条边,n 个顶点  简单三线形  简单四线形
完全 n 点形:n 个点(其中无三点共线)及其每两点连线构成的图形。 n 个顶点,$\frac{n(n-1)}{2}$ 条边  完全三点形  完全四点形	**完全 n 线形**:n 条直线(其中无三线共点)及其每两直线交点构成的图形。 n 条边,$\frac{n(n-1)}{2}$ 个顶点  完全三线形  完全四线形

完全四点形和完全四线形是非常重要的一对对偶图形,下面列出了与这一对对偶图

形相关的一些概念：

表 1-2

完全四点形	四个顶点：A,B,C,D 六条边：p,q,r,s,u,v 三组对边：$p,q;r,s;u,v$ 三个对边点：X,Y,Z 一个对边三点形：XYZ	
完全四线形	四条边：a,b,c,d 六个顶点：P,Q,R,S,U,V 三组对顶点：$P,Q;R,S;U,V$ 三条对顶线：x,y,z 一个对顶三线形：xyz	

例 1.7　作下列图形(如图 1-8)的对偶图形。

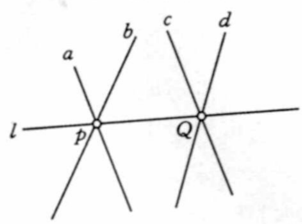


图 1-8

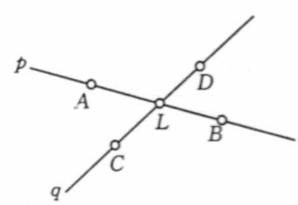


图 1-9

解　该图形有两个点 P,Q，五条直线 a,b,c,d,l，它们的关联关系：点 P,Q 在直线 l 上，直线 a,b,l 过 P 点，直线 c,d,l 过 Q 点。对偶图形应该有两条直线 p,q，五个点 A,B,C,D,L，它们的关联关系为：直线 p,q 过 L 点，点 A,B,L 在直线 p 上，点 C,D,L 在直线 q 上。所求的对偶图形如图 1-9。

在射影平面上，若命题 P 仅与点和直线的关联关系以及顺序关系有关，则称 P 为一个**射影命题**。

对一个射影命题 P 作对偶变换得到一个新的命题 P'，则称 P,P' 为一对**对偶命题**。

对偶命题举例：

表 1-3

P：过相异两点有且仅有一条直线。	P'：两相异直线有且仅有一个交点。
P：如果两个三点形的对应顶点连线共点，则其对应边的交点必定共线。	P'：如果两个三线形的对应边交点共线，则其对应顶点的连线必定共点。
P：射影平面上存在四条直线，其中没有三条共点。	P'：射影平面上存在四个点，其中没有三点共线。

可见笛萨格定理与其逆定理是一对对偶命题(注意，一般而言逆命题不一定是对偶

命题）。

一个射影命题的对偶命题仍然是射影命题，射影命题未必是真命题。然而，如果一个射影命题是真命题，则其对偶命题必定是真命题，反之亦然，这就是著名的**对偶原理**。

定理 1.8 （对偶原理）**一个射影命题 P 为真当且仅当其对偶命题 P' 为真。**

对偶原理告诉我们，每当我们证明了一个射影命题成立，则其对偶命题自动成立，不再需要进行证明。

1.1.5 射影直线与射影平面的性质及其拓扑模型

先看射影直线。

(1) 射影直线的封闭性

欧氏直线是向两个方向无限延伸的，而射影直线是封闭的，向两方前进最终都到达同一个无穷远点。如图 1-10。

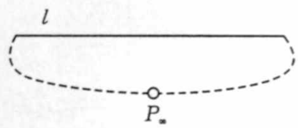


图 1-10

(2) 射影直线上点的分离性

通常直线上的一点可将其分离成两部分，射影直线上的一点不能将其分离成两部分。

通常直线上的两点可决定一个线段，射影直线上的两点不能决定一个线段。

虽然射影直线上两点不能决定一个线段，但是两点可把射影直线分成两个部分。

比如在仿射直线上，任意两点将仿射直线分成两个部分。特别地，两个通常点 A，B 将仿射直线也分成两个部分，其中一个部分含无穷远点，另一个部分不含无穷远点。我们把不含无穷远点的那一部分叫做由这两点决定的线段。

(3) 射影直线的拓扑模型

我们可以将叠合对径点的圆周作为射影直线的模型，如图 1-11 中，对径点 A_1，A_2 与射影直线上的 A 点对应，对径点 B_1，B_2 与射影直线上的 B 点对应，对径点 P_1，P_2 则与射影直线上的无穷远点 P_∞ 对应等。

圆周与叠合了对径点的圆周在拓扑上是等同的，所以圆周也可以作为射影直线的一个模型。

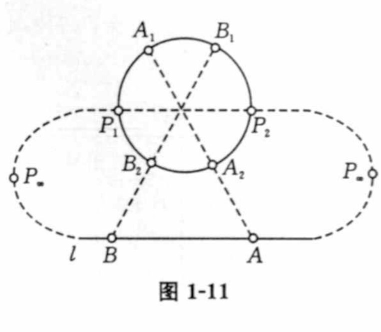


图 1-11

再来看射影平面。