21世纪高职高专规划教材

JINGJI YINGYONG SHUXUE

经济应用数学

姬天富　骆汝九　主编

苏州大学出版社
SOOCHOW UNIVERSITY PRESS

21 世纪高职高专规划教材

经济应用数学

主编　姬天富　骆汝九

苏 州 大 学 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

经济应用数学 / 姬天富，骆汝九主编. —苏州：苏州大学出版社，2011.8(2012.1 重印)
21 世纪高职高专规划教材
ISBN 978-7-81137-774-3

Ⅰ.①经… Ⅱ.①姬…②骆… Ⅲ.①经济数学-高等职业教育-教材 Ⅳ.①F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 170352 号

经济应用数学
姬天富　骆汝九　主编
责任编辑　李　娟

苏州大学出版社出版发行
(地址：苏州市十梓街 1 号　邮编：215006)
宜兴市盛世文化印刷有限公司印装
(地址：宜兴市万石镇南漕河滨路 58 号　邮编：214217)

开本 787mm×1092mm　1/16　印张 13.25　字数 330 千
2011 年 8 月第 1 版　2012 年 1 月第 2 次修订印刷
ISBN 978-7-81137-774-3　定价：24.00 元

苏州大学版图书若有印装错误，本社负责调换
苏州大学出版社营销部　电话：0512-65225020
苏州大学出版社网址 http://www.sudapress.com

《经济应用数学》编委会

前　言

培养学生的数学素养和提高教学水平，更新教学内容，把创新能力和创新精神的培养放到突出位置，是当前高职院校数学课程教学改革的主要目标.加强高职院校教材建设则是实现这一目标的尤为重要的一环.为此，我们组织江苏省数所高职院校具有多年从事经济应用数学方面的科研与教学改革经验的专家、教授，结合高职院校经贸、财会、管理、金融、物流等专业学生的实际数学需求，遵循“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则，编写了本教材.本教材具有以下特点：

1. 注重以实例引入概念，并最终回到数学应用的思想，加强对学生数学应用意识、兴趣及能力的培养.重点培养学生用数学原理和方法消化、吸收经济概念、经济原理和专业知识的能力.

2. 注重基础知识、基本方法和基本技能的训练，不过分追求复杂的计算和变换，在例题配置和习题选取等方面注意与专业结合.书中各节配有习题，每章配有复习题，书末附有习题答案及提示，既方便教学，也有利于学生更好地掌握所学知识.

3. 每章的最后一节安排的是本章内容在经济管理方面应用的实例以及对经济管理现象的解释及分析，有利于培养学生用数学模型分析及解决经济管理问题的能力.

4. 每章后都附有阅读材料，介绍一些与本章内容有关的数学知识，有利于学生了解数学知识的来龙去脉和前人为此而付出的辛勤劳动，激发学生学习数学的主观能动性.

本书的基本教学时数约60学时，教师可根据实际学时和实际需要对教学内容进行适当的删减，以便更好地适应所在学校的教学需求.

本书在编写过程中参考了一些教材，在此编者向有关作者表示感谢！

本教材的编写，我们力求完善，但书中难免有不妥之处，希望得到专家、同行以及广大读者的批评指正.

编者

2011年8月

目　录

第1章 函 数

在自然现象、工程技术和经济生产中，我们经常会遇到几个紧密相关的变量. 为了研究这些变量之间的相互依赖关系，本章引入函数的一般定义，讨论函数的特性，并介绍常用的几种经济学中的函数.

1.1 函数及其性质

本节我们将在复习中学数学知识的基础上进一步讨论函数的概念及其性质.

1.1.1 区间与邻域

集合是数学中的一个基本概念. 在数学中，我们把具有某种属性的对象的全体，称为一个集合. 把组成集合的对象称为集合的元素. 对于集合中的元素，它具有确定性、无序性和互异性. 例如，某班级的同学就组成一个集合，班级中的每位同学就是该集合中的元素.

习惯上，我们用大写的英文字母表示集合，如 A,B,C 等，用小写的英文字母表示集合中的元素，如 a,b,c 等.

我们把自然数集记作 **N**，整数集记作 **Z**，有理数集记作 **Q**，实数集记作 **R**.

一、区间

设 a,b 为实数，且 $a<b$.

(1) 满足不等式 $a<x<b$ 的所有实数 x 的集合，称为以 a,b 为端点的开区间，记作 (a,b)，如图 1-1 所示，即

$$(a,b)=\{x|a<x<b\}.$$

(2) 满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的所有实数 x 的集合，称为以 a,b 为端点的闭区间，记作 $[a,b]$，如图 1-2 所示，即

$$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}.$$

图 1-1

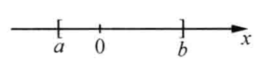

图 1-2

(3) 满足不等式 $a<x\leqslant b$(或 $a\leqslant x<b$)的所有实数 x 的集合，称为以 a,b 为端点的半开半闭区间，记作 $(a,b]$(或 $[a,b)$)，如图 1-3(或图 1-4)所示，即

$$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}(\text{或}[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}).$$

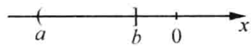

图 1-3

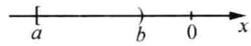

图 1-4

以上三类区间为有限区间,有限区间右端点 b 与左端点 a 的差 $b-a$,称为区间的长.

还有以下几类无限区间:

(4) $(a,+\infty)=\{x|x>a\}$,$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}$.

(5) $(-\infty,b)=\{x|x<b\}$,$(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\}$.

(6) $(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}$,即全体实数的集合.

二、邻域

定义 1.1.1 设 $a,\delta\in\mathbf{R}$ 且 $\delta>0$,称开区间 $(a-\delta,a+\delta)=\{x||x-a|<\delta\}$ 为点 a 的 δ 邻域,记作 $U(a,\delta)$. 其中点 a 称为邻域的中心,δ 称为邻域的半径. 如图 1-5 所示.

例如,$|x-1|<0.5$,即为以点 $x_0=1$ 为中心,以 0.5 为半径的邻域,也就是开区间(0.5,1.5),如图 1-6 所示.

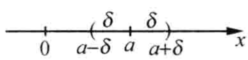

图 1-5

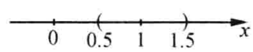

图 1-6

后面我们还经常用到集合

$$\{x|0<|x-x_0|<\delta,\delta>0\}.$$

这是在点 x_0 的邻域内去掉点 x_0,其余的点所组成的集合,即集合 $(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$,称为以 x_0 为中心,δ 为半径的空心邻域,如图 1-7 所示.

例如,$0<|x-1|<0.5$,即表示以 $x_0=1$ 为中心,半径为 0.5 的空心邻域(0.5,1)∪(1,1.5),如图 1-8 所示.

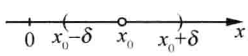

图 1-7

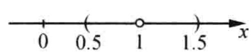

图 1-8

一般用 $U(x_0,\delta)$(或 $U(x_0)$,$\mathring{U}(x_0,\delta)$(或 $\mathring{U}(x_0)$))分别表示点 x_0 的邻域与空心邻域.

1.1.2 函数的概念

定义 1.1.2 若 D 是某个非空实数集合,设有一个对应法则 f,使对每一个 $x\in D$,都有一个确定的实数 y 与之对应,则称这个对应法则 f 为定义在 D 上的一个函数,也称变量 y 是变量 x 的函数,记作 $y=f(x)$,$x\in D$. 其中 x 称为自变量,y 称为因变量,集合 D 称为函数的定义域,记作 $D(f)$.

$x_0\in D(f)$ 所对应的 y 值,记作 y_0 或 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$,称为当 $x=x_0$ 时函数 $y=f(x)$ 的函数值.

全体函数值的集合称为函数 $y=f(x)$ 的值域,记作 Z 或 $Z(f)$.

函数的对应法则也常常用 g,h,F,Q,X 等表示,那么相应的函数当用 x 表示自变量时记为 $g(x)$,$h(x)$,$F(x)$,$Q(x)$,$X(x)$ 等. 有时为了方便,函数也可直接记作 $y=y(x)$,此时等

号左边的 y 表示函数值,右边的 y 表示对应法则.

我们把函数的定义域和对应法则称为函数的两个要素.当两个函数的两个要素分别相同时,称这两个函数是相同的,而不考虑它们分别使用的是什么字母.例如,函数 $f(x)=\sin^2x+\cos^2x$ 与 $g(x)=1$ 是相同的函数,而 $f(x)=x+1$ 与 $g(t)=\dfrac{t^2-1}{t-1}$ 是不同的函数只是因为它们的定义域不相同.

下面介绍几个特殊函数.

例 1 符号函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$ 它的定义域为 $\mathbf{R}$,值域 $Z=\{-1,0,1\}$,其图象如图 1-9 所示.

例 2 取整函数 $y=[x]$,这里的记号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.例如,$[0.6]=0$,$[\sqrt{2}]=1$,$[-0.1]=-1$,$[-3.5]=-4$.函数 $y=[x]$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,值域为全体整数,图象如图 1-10 所示.

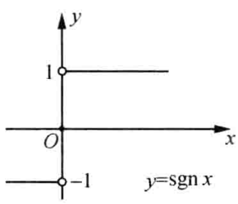

图 1-9

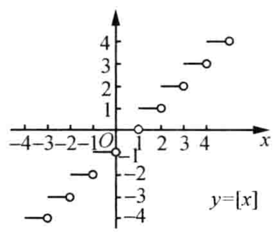

图 1-10

例 3 求下列函数的定义域:

(1) $y=\sqrt{2x-1}+\dfrac{1}{3x-2}$;　　(2) $y=\lg(x+1)+\arcsin\dfrac{x-1}{3}$.

解 (1) 要使函数 y 有定义,x 应满足不等式组 $\begin{cases}2x-1\geqslant 0,\\ 3x-2\neq 0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x\geqslant\dfrac{1}{2},\\ x\neq\dfrac{2}{3}.\end{cases}$

于是所求的定义域 $D=\left\{x\,\middle|\,x\geqslant\dfrac{1}{2}\text{且 }x\neq\dfrac{2}{3}\right\}$ 或 $D=\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3}\right)\cup\left(\dfrac{2}{3},+\infty\right)$.

(2) 要使函数 y 有定义,x 应满足不等式组 $\begin{cases}x+1>0,\\ \left|\dfrac{x-1}{3}\right|\leqslant 1,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x>-1,\\ -2\leqslant x\leqslant 4,\end{cases}$ 化简得 $-1<x\leqslant 4$.

于是所求函数的定义域 $D=\{x\mid -1<x\leqslant 4\}$ 或 $D=(-1,4]$.

1.1.3 函数的几种特性

一、函数的奇偶性

定义 1.1.3 给定函数 $y=f(x)$.

(1) 如果对所有的 $x\in D(f)$,有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为偶函数.

(2) 如果对所有的 $x\in D(f)$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

由定义知，函数具有奇偶性，其定义域必定是关于原点对称的，而且奇函数的图象关于原点对称，偶函数的图象关于 y 轴对称.

例 4 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=x^2-2x^4+3$；

(2) $f(x)=\frac{1}{2}(a^{-x}-a^x)$ $(a>0,a\neq1)$；

(3) $f(x)=x^3-1$.

解 (1) 函数的定义域为 $\mathbf{R}$，又因为

$$f(-x)=(-x)^2-2(-x)^4+3=x^2-2x^4+3=f(x),$$

所以 $f(x)=x^2-2x^4+3$ 是偶函数.

(2) 函数的定义域为 $\mathbf{R}$，又因为

$$f(-x)=\frac{1}{2}(a^x-a^{-x})=-\frac{1}{2}(a^{-x}-a^x)=-f(x),$$

所以 $f(x)=\frac{1}{2}(a^{-x}-a^x)$ 是奇函数.

(3) 函数的定义域为 $\mathbf{R}$，又因为

$$f(-x)=(-x)^3-1=-x^3-1\neq f(x)\text{，同时 } f(-x)\neq -f(x),$$

所以 $f(x)$ 既不是奇函数也不是偶函数.

二、函数的单调性

定义 1.1.4 如果函数 $y=f(x)$ 对区间 (a,b) 上的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 上是单调增加的；如果对于 (a,b) 上的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上是单调减少的.

显然，函数 $y=x^2$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调增加，在区间 $(-\infty,0)$ 上单调减少，在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 上不具有单调性.

三、函数的周期性

定义 1.1.5 函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，如果存在正常数 T，使得对任意 $x\in D$，有 $f(x)=f(x\pm T)$ 恒成立，则称函数 $y=f(x)$ 为周期函数，T 称为 $f(x)$ 的一个周期. 其中的最小正数 T 称为最小正周期，简称周期.

例如，$y=\sin x$，$y=\cos x$ 均以 2π 为周期，$y=\tan x$，$y=\cos^2 x$ 均以 π 为周期. 特别地，对于正弦型曲线 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$，其周期为 $T=\frac{2\pi}{|\omega|}$.

四、函数的有界性

定义 1.1.6 设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，如果存在一个正数 M，对于所有的 $x\in(a,b)$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是有界的. 反之，如果不存在这样的正数 M，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内是无界的.

例 5 判断下列函数在指定的区间上是否有界：

(1) $f(x)=\sin x, x\in(-\infty,+\infty)$;

(2) $f(x)=x^2+1, x\in[0,+\infty)$;

(3) $f(x)=x^2+1, x\in[-4,3]$.

解 (1) 因为当 $x\in(-\infty,+\infty)$时,恒有 $|f(x)|\leqslant 1$,所以 $f(x)=\sin x$ 在区间$(-\infty,+\infty)$上有界.

(2) 因为不存在正数 M,使得 $|f(x)|\leqslant M(x\in[0,+\infty))$,所以 $f(x)=x^2+1$ 在区间$[0,+\infty)$上无界.

(3) 取 $M=f(-4)=17$,则对于任意 $x\in[-4,3]$,都有 $|f(x)|\leqslant 17$,所以 $f(x)=x^2+1$ 在区间$[-4,3]$上有界.

上例的(2)、(3)两个小题的结果表明:一个函数是否有界,与所给定的实数集密切相关,同一函数在不同的实数集上是否有界的结论可能不一样.

1.1.4 反函数与复合函数

一、反函数

函数 $y=f(x)$反映了两个变量 x,y 之间的依赖关系,当自变量 x 取定一个值之后,因变量 y 的值也随之确定,但是,这种关系有时候往往需要倒过来. 例如,设某种商品的销售总收益为 y,销售量为 x,已知该商品的单价为 k. 对于每一个给定的销售量 x,可以通过对应的函数关系 $y=kx$ 确定销售总收益 y. 反过来,对每一个给定的销售总收益 y,可以由规则 $x=\dfrac{y}{k}$ 确定销售量 x. 我们称后一种函数$\left(x=\dfrac{y}{k}\right)$是前一种函数($y=kx$)的反函数,或称它们互为反函数.

定义 1.1.7 设 $y=f(x)$是定义在 D 上的一个函数,值域为 Z. 如果对每一个 $y\in Z$,都有一个确定的且满足 $y=f(x)$的 $x\in D$ 与之对应,其对应法则记作 f^{-1},则称这个定义在 Z 上的函数 $x=f^{-1}(y)$为 $y=f(x)$的反函数,或称它们互为反函数.

由于一个函数与自变量及因变量用何种字母表示无关,为了研究方便,对于反函数 $x=f^{-1}(y)$,习惯上仍用 x 作自变量,y 作因变量,写成 $y=f^{-1}(x)$的形式.

由反函数的定义可知,反函数 $y=f^{-1}(x)$的定义域是函数 $y=f(x)$的值域,而反函数的值域就是 $y=f(x)$的定义域.

$y=f(x)$与 $y=f^{-1}(x)$的关系是 x 与 y 互换,所以它们的图象关于直线 $y=x$ 对称,如图 1-11 所示.

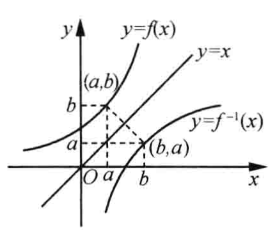

图 1-11

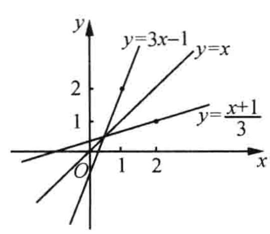

图 1-12

例 6 求下列函数的反函数:

(1) $y=3x-1$;

(2) $y=x^2(0<x<+\infty)$;

(3) $y=x^2(-\infty<x<+\infty)$.

解 (1) 由 $y=f(x)=3x-1$ 可得

$$x=f^{-1}(y)=\frac{y+1}{3}.$$

将上式中的 x 换成 y,y 换成 x,得 $y=3x-1$ 的反函数是 $y=\frac{x+1}{3}$,其图象如图 1-12 所示.

(2) 由 $y=x^2(0<x<+\infty)$,解出

$$x=\sqrt{y}(0<y<+\infty).$$

将式中的 x 换成 y,y 换成 x,得 $y=x^2(0<x<+\infty)$的反函数是 $y=\sqrt{x}(0<x<+\infty)$.

(3) 由 $y=x^2(-\infty<x<+\infty)$,解出 $x=\pm\sqrt{y}(0<y<+\infty)$. 可见,与 y 对应的 x 值不是唯一的. 由反函数的定义可知,$y=x^2(-\infty<x<+\infty)$没有反函数.

定理 1.1.1(*反函数存在定理*) 若函数 $y=f(x)$在某个区间上是单调函数,则它的反函数存在,且也是单调函数.

二、复合函数

定义 1.1.8 设函数 $y=f(u)$的定义域为 D,若函数 $u=\varphi(x)$的值域为 Z,且 $Z\cap D$ 为非空集合,则称 $y=f[\varphi(x)]$为复合函数. 其中 x 为自变量,y 为因变量,u 称为中间变量.

例 7 已知 $y=f(u)=\sqrt{u}$,$u=\varphi(x)=a-x^2$,考察当 $a=1$ 及 $a=-1$ 时,函数 $y=f[\varphi(x)]$ 是不是复合函数.

解 (1) 当 $a=1$ 时,$y=\sqrt{u}$,$u=1-x^2$,因为

$D(f)=[0,+\infty)$,$Z(\varphi)=(-\infty,1]$,$Z(\varphi)\cap D(f)=[0,1]$,

所以函数 $y=f[\varphi(x)]=\sqrt{1-x^2}$是复合函数且其定义域是$[-1,1]$.

(2) 当 $a=-1$ 时,$y=\sqrt{u}$,$u=-1-x^2$,因为

$D(f)=[0,+\infty)$,$Z(\varphi)=(-\infty,-1]$,$Z(\varphi)\cap D(f)=\varnothing$,

所以函数 $y=f[\varphi(x)]=\sqrt{-1-x^2}$不是复合函数.

例 8 设 $f(x)=\sqrt{1+x^2}$,求:(1) $f[f(x)]$;(2) $f\{f[f(x)]\}$.

解 (1) $f[f(x)]=\sqrt{1+[f(x)]^2}=\sqrt{1+(\sqrt{1+x^2})^2}=\sqrt{2+x^2}$.

(2) 由(1)知 $f[f(x)]=\sqrt{2+x^2}$,所以 $f\{f[f(x)]\}=\sqrt{1+(\sqrt{2+x^2})^2}=\sqrt{3+x^2}$.

例 9 设 $f(x)=\begin{cases} e^x, & 0<x\leqslant 1, \\ 1+x, & 1<x\leqslant 2, \end{cases}$ 求 $f(x+1)$.

解 设 $u=x+1$,则 $f(x+1)$可以看做是由函数 $f(u)$和 $u=x+1$ 复合而成的,而

$$f(u)=\begin{cases} e^u, & 0<u\leqslant 1, \\ 1+u, & 1<u\leqslant 2. \end{cases}$$

将 $u=x+1$ 代入,得

$$f(x+1)=\begin{cases}e^{x+1}, & 0<x+1\leqslant 1,\\ 2+x, & 1<x+1\leqslant 2,\end{cases}$$

即
$$f(x+1)=\begin{cases}e^{x+1}, & -1<x\leqslant 0,\\ 2+x, & 0<x\leqslant 1.\end{cases}$$

相应地可以利用复合函数的概念,将一个比较复杂的函数看成是由几个简单函数复合而成的,这样方便对函数进行研究.

例 10 指出函数 $y=e^{\sqrt{x^2+1}}$是由哪些函数复合而成的.

解 函数 $y=e^{\sqrt{x^2+1}}$是由 $y=e^u$,$u=\sqrt{v}$,$v=x^2+1$ 复合而成的.

1.1.5 初等函数

我们经常讨论的一些函数都是由几种最简单的函数复合而成的,这些最简单的函数就是我们在中学已学过的基本初等函数,包括:

(1) 常值函数:$y=C$(C 为常数);

(2) 幂函数:$y=x^\alpha$(α 为常数);

(3) 指数函数:$y=a^x$($a>0$ 且 $a\neq 1$);

(4) 对数函数:$y=\log_a x$($a>0$ 且 $a\neq 1$);

(5) 三角函数:$y=\sin x$,$y=\cos x$,$y=\tan x$,$y=\cot x$,$y=\sec x$,$y=\csc x$;

(6) 反三角函数:$y=\arcsin x$,$y=\arccos x$,$y=\arctan x$,$y=\mathrm{arccot}\, x$.

关于基本初等函数的相关详细内容见附录 2.

定义 1.1.9 由常数和基本初等函数经过有限次加、减、乘、除四则运算和有限次函数的复合运算构成的,并且可以用一个解析表达式表示的函数,称为初等函数.

例如,$y=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$,$y=\dfrac{x+\sin x}{\cos^2 x}$,$y=e^{x-\sin x}$都是初等函数,而分段函数 $y=f(x)=\begin{cases}e^{\sin x}, & x<0,\\ x+1, & x\geqslant 0\end{cases}$就是非初等函数,因为在其定义域内不能用一个数学式子表示.

1.1.6 建立函数关系式举例

为了解决实际问题,先要给问题建立数学模型,即建立函数关系.为此我们需要明确问题中的因变量与自变量,再根据题意建立等式,从而得出函数关系,然后确定函数的定义域和实际问题的定义域.在实际问题中,除了要考虑函数的解析式,还要考虑变量在实际问题中的含义.

例 11 已知铁路线上 AB 段的距离为 b km,工厂 C 距 A 处为 a km,AC 垂直于 AB(图 1-13).为了运输方便,要在 AB 线上选定一点 D 向工厂 C 修筑一条公路 CD.已知铁路上货运的运费为 m[元/(吨·千米)],公路上的运费为 n[元/(吨·千米)]($m<n$),试将每吨货物的运费(元)表示为距离 AD 的函数.

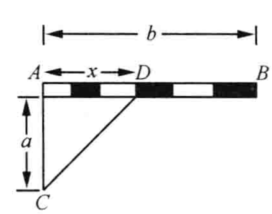

图 1-13

解 设 $AD=x$(km),每吨货物的运费为 y,根据题意得

$$CD=\sqrt{a^2+x^2},BD=b-x,$$

则

$$y=m(b-x)+n\sqrt{a^2+x^2}.$$

其定义域为$[0,b]$.

例 12 某运输公司规定每吨货物每千米的运费为:在 100 千米以内 3 元/千米,超过 100 千米,超过部分 2 元/千米,求每吨货物的运费 m(元)和里程 s(千米)之间的函数关系.

解 根据题意可以得到函数关系

$$m=\begin{cases}3s, & 0<s\leqslant 100,\\ 3s+2(s-100), & 100<s.\end{cases}$$

这里每吨货物的运费 m 和里程 s 之间的函数关系是用分段函数表示的,定义域为$(0,+\infty)$.

习题 1.1

1. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\sqrt[3]{1-5x}+\dfrac{2x+1}{x^2-3x-4}$;

(2) $y=\lg(5-x)+\arcsin\dfrac{x-1}{6}$;

(3) $y=\sqrt{3x-2}-\ln(5-x)+\dfrac{1}{x^2-4}$;

(4) $y=f(x-1)+f(x+1)$,已知 $f(x)$的定义域为$(0,3)$.

2. 判断下列各题中两个函数是否为相同的函数,并说明理由.

(1) $f(x)=|x|,g(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0;\end{cases}$

(2) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1},g(x)=x+1$;

(3) $f(x)=\ln x^2,g(x)=2\ln x$;

(4) $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{x},g(x)=\ln(1-x)-\ln x$.

3. 判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=\dfrac{\cos x}{x}$;

(2) $f(x)=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$;

(3) $f(x)=x^2e^{\cos x}$;

(4) $f(x)=(x^2+x)\sin x$.

4. 求下列函数的周期:

(1) $y=3\tan\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)$;

(2) $y=\sin^2x$.

5. 下列函数可以看成是由哪些简单函数复合而成的?

(1) $y=\sin^2x$;

(2) $y=\arcsin(\ln x)$;

(3) $y=\log_a\sqrt{1+x^2}(a>0,a\neq 1)$;

(4) $y=e^{\cos\frac{1}{x}}$.

6. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}1-x, & x\geqslant 0,\\ 2-x, & x<0,\end{cases}$求 $f[f(3)]$.

7. 设函数 $f(x)=x^3$，$\varphi(x)=\sin\sqrt{x}$，求 $f[\varphi(x)]$，$\varphi[f(x)]$.

8. 依法纳税是每一个公民应尽的义务，国家征收个人工资、薪金所得税是分段计算的.根据最新个税征收办法(2011 年 9 月 1 日起实施)：扣除三险一金后月收入不超过 3500 元的免征个人所得税，超过 3500 元的部分需征税. 设月应纳税金额为 x(x=扣除三险一金后月收入−3500)，税率如下表所示：

级数	月应纳税金额	税率
1	不超过 3500 元部分	3%
2	超过 3500 至 4500 元部分	10%
3	超过 4500 至 9000 元部分	20%
4	超过 9000 至 35000 元部分	25%
5	超过 35000 至 55000 元部分	30%
6	超过 55000 至 80000 元部分	35%
7	超过 80000 元部分	45%

注：三险一金是指养老保险、失业保险、医疗保险和住房公积金.

(1) 设纳税额为 $f(x)$，试用分段函数表示 1～3 级纳税额 $f(x)$的计算公式.

(2) 某人 2011 年 9 月份扣除三险一金后月收入为 8500 元，试计算这个人在 9 月份应缴纳的个人所得税.

9. 求下列函数的反函数：

(1) $y=2^x+1$； (2) $y=\dfrac{1+x}{1-x}$.

1.2 经济学中的常用函数

我们用数学方法去研究和解决实际问题时，经常需要建立数学模型，即建立函数关系式. 经济学中许多问题的解决也都依赖于先建立变量之间的函数关系，然后通过微积分等知识分析这些经济函数的性质. 本节介绍几种常见的经济函数.

1.2.1 需求函数与价格函数

一、需求函数

在实际生活中，消费者对某种商品的需求是指购买者既有购买商品的欲望，又有购买商品的能力. 消费者对某种商品的需求量取决于商品的价格，消费者的人数，消费者的收入、习性、嗜好等. 为了简化问题的分析，现在我们假定除商品价格外的其他因素都保持某种状态不变. 为此我们可以建立商品的需求量 Q 与该商品的价格 P 之间的函数关系，并称其为需求函数，记作 $Q=Q(P)$. 这里，价格 P 是自变量，需求量 Q 是因变量，P 取非负值.

一般地，降低商品价格可以使需求量增加，提高商品价格可以使需求量减少. 因此，需求函数通常是价格的单调减少函数. 如图 1-14 所示.

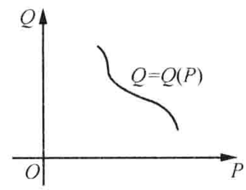

图 1-14

在企业管理和经济学中常见的需求函数有：

(1) 线性需求函数：$Q=a-bP(a\geqslant 0, b\geqslant 0)$；

(2) 二次需求函数：$Q=a-bP-cP^2(a\geqslant 0, b\geqslant 0, c\geqslant 0)$；

(3) 指数需求函数：$Q=ae^{-bP}(a\geqslant 0, b\geqslant 0)$.

二、价格函数

需求函数 $Q=Q(P)$ 的反函数即为价格函数，记作 $P=P(Q)$. 价格函数同样也反映商品的需求量与价格之间的关系.

例 1 某超市销售某种商品，当该商品售价为 100 元/件时，每天的销售量为 10 件，售价每提高 10 元，销售量相应地减少 1 件，试求需求函数和价格函数.

解 设商品的需求量为 Q，价格为 P，由题意可得

$$Q=10-\frac{P-100}{10},$$

即需求函数为

$$Q=20-\frac{1}{10}P.$$

所以价格函数为

$$P=200-10Q.$$

1.2.2 供给函数

在市场经济规律下，某种商品的供给量的大小依赖于该商品价格的高低. 记商品的供给量为 S，P 为商品的价格，则商品供给量 S 是价格 P 的函数，称其为供给函数，记作 $S=S(P)$.

一般地，商品的供给量随商品价格的上涨而增加，随价格的下降而减少. 因此，商品供给函数 S 是商品价格 P 的单调增加函数.

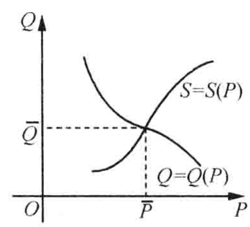

图 1-15

常见的供给函数有线性函数、二次函数、幂函数、指数函数等，其中线性供给函数可以表示为 $S=-c+dP(c\geqslant 0, d\geqslant 0)$.

在市场中，商品最理想的状态是供需平衡，即商品的需求量与供给量相等，此时的价格 $\overline{P}$ 称为均衡价格，对应的 $\overline{Q}$ 称为均衡数量. 如图 1-15 所示.

例 2 已知某商品的供给函数 $S=\frac{2}{3}P-4$，需求函数 $Q=20-\frac{1}{3}P$，试求该商品处于市场供需平衡状态下的均衡价格和均衡数量.

解 当 $P=\overline{P}$ 时，有 $S=Q=\overline{Q}$，解方程

$$\frac{2}{3}\overline{P}-4=20-\frac{1}{3}\overline{P},$$