十一五 辅导教材

普通高等教育“十一五”国家级规划教材·辅导教材

精品课程教材 国家

高等教育精品教材 北京 GAODENG JIAOYU JINGPIN JIAOCAI 辅导教材

北京高等教育精品教材·辅导教材　高等院校精品教材系列

BEIJING GAODENG JIAOYU JINGPIN JIAOCAI

理论力学
学习指导与题解

◎ 白若阳　水小平　刘海燕　编著

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

普通高等教育“十一五”国家级规划教材・辅导教材
北京高等教育精品教材・辅导教材
高等院校精品教材系列

理论力学学习指导与题解

白若阳　水小平　刘海燕　编著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry

内 容 简 介

本书是与全国优秀教师和北京市教学名师水小平教授编著的《理论力学教程》配套的教学参考、学习辅导与考研指导用书。

本书按照主教材的体系结构顺序编写，对每章的教学内容和重点、难点做了简洁、清晰、深入的归纳与总结，且在某些阐述方面比主教材还有所提高；对部分概念性较强的思考题和比较典型或综合性较强的习题给予了详细解答，大多数题目还给出了一题多解，在所有选解习题的后面都附有关于分析思路、解题关键、易犯错误、拓展问题的“解析”，目的是帮助读者加深对基本概念和基本理论的理解，加强对解题的基本方法和技巧的掌握，着力培养分析问题和综合解决问题的能力，进而提高学习能力、工程应用能力和应试水平，进一步拓宽视野，激发创新思维。另外，本书还附有6套自测题，以便读者自行检验和总结对理论力学知识的掌握情况。

本书继承了主教材的风格特点，结构严谨、层次分明、内容丰富、深入浅出、通俗易懂，可与主教材配套使用，是高等院校理工科相关专业本科生的学习和应试指导书，同样适合高职高专、自学考试和成人教育的学生在学习提高时使用，也可作为研究生入学考试的复习、青年教师的教学及工程技术人员的应用的参考书独立使用。

图书在版编目（CIP）数据

理论力学学习指导与题解/白若阳，水小平，刘海燕编著．—北京：电子工业出版社，2014.3
高等院校精品教材系列
ISBN 978-7-121-22552-9

I. ①理…　II. ①白…　②水…　③刘…　III. ①理论力学－高等学校－教学参考资料　IV. ①O31

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 037901 号

策划编辑：余　义
责任编辑：余　义
印　　刷：三河市双峰印刷装订有限公司
装　　订：三河市双峰印刷装订有限公司
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　　邮编：100036
开　　本：787×1092　1/16　印张：23.5　字数：602 千字
印　　次：2014 年 3 月第 1 次印刷
定　　价：49.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：（010）88258888。

前　言

理论力学是一门理论性、系统性和灵活性都很强的技术基础课，是力学类、航空类、航天类、机械类、材料类、能源类、动力类、土建类、船舶类、水利类等专业的必修课。大多数授课教师认为这门课不容易讲透，要使学生全面掌握解题方法就更难。很多学生对这门课有一种共同的感觉，那就是“听懂容易，做题难，而且很容易做错”，有的甚至于对考试产生了畏难情绪。为了帮助读者更好地学习理论力学，我们在总结自己丰富的教学经验和对课程多年的研究成果的基础上，精心编写了这本《理论力学学习指导与题解》，相信能够对学生的课程学习及考研提供有力帮助，希望对青年教师的备课也有参考价值。

本书与全国优秀教师、第三届北京市高等学校教学名师奖获得者水小平教授编著的普通高等教育“十一五”国家级规划教材和北京高等教育精品教材——《理论力学教程》（电子工业出版社）相配套，并按照主教材的体系结构顺序编写。“内容提要”对本章知识进行了系统梳理，以提纲挈领的形式列出该章的基本概念、基本原理和基本公式及相关的物理意义，尽可能采用表格对教学内容进行归纳和提炼，使读者容易发现知识的内在联系和发展变化，系统地掌握本章的知识体系和主要内容；在相关知识的后面，对重点进行了强调，对难点进行了剖析，给出了学习和解题时应注意的事项，并在某些阐述方面比主教材还有所提高，以方便读者更好复习和深入理解。“思考题及解答”精选了主教材中概念性较强和具有启发性的思考题，并给予了详细解答，以帮助读者掌握容易混淆或易于错误理解的概念，并将重要概念的理解引向深入。“习题及解答”精选了主教材中比较典型或综合性较强的习题，并给予了详细解答，使读者领会正确的解题思路、基本的分析方法、规范化的解题步骤和灵活的计算技巧，将概念分析和问题求解有机结合，大多数题目还给出了一题多解，以增强学生分析问题的能力、灵活运用知识的能力和发散思维的能力；在所有选解习题的后面都附有“解析”，有的特别点明解题的关键，有的详细点出学生在解题中容易混淆的概念或容易忽略的问题，有的明确指出初学者常犯的错误及其根源，有的对相关问题展开了进一步的分析与讨论，让读者加深、加宽对问题本质的理解，以启迪读者的思维，进一步开阔视野，达到深入理解课程内容和有效提高解题能力的目的，起到触类旁通、举一反三的作用。另外，还附有 6 套自测题（均选自北京理工大学历届理论力学课程期末考试题，所有考试题均是课程组教师自编题目），以便读者自行检验和总结对理论力学知识的掌握情况。

本书的“内容提要”部分由水小平教授精心编写，白若阳副教授参与了部分工作；“思考题及解答”和“习题及解答”部分先由白若阳副教授认真编写，水小平教授再进行细致修改并做了进一步的完善；刘海燕副教授仔细校核了全书内容和所有思考题和习题的解答。工程力学课程组的韩斌、廖力、秦晓桐、张强、李海龙、赵希淑等老师在本书的编写过程中也参与了部分工作。

本书在编写过程中得到北京理工大学各级领导的关心和支持，也得到了宇航学院力学系许多教师，尤其是工程力学课程组全体教师的鼓励和帮助。首届高等学校国家级教学名师奖获得者梅凤翔教授对书稿进行了详细审阅，并提出了许多宝贵意见。电子工业出版社对本书的出版提供了热情帮助和大力支持。在此，作者一并表示诚挚的感谢。

由于作者的水平有限，书中疏漏、欠妥和有误之处在所难免，恳请读者批评指正。

白若阳　水小平　刘海燕

2013 年 12 月

目　录

第一篇　运　动　学

第二篇　静　力　学

第三篇　动　力　学

第一篇 运 动 学

运动学是研究物体运动的几何性质的科学，也就是从几何学方面来研究物体机械运动的描述方法和各运动学量之间的相互关系，而不研究物体的运动原因。运动学虽然不深入研究物体机械运动的本质，却也有重大意义。首先，动力学问题的解决不能离开运动学，因为只有将物体的运动规律与运动学结合起来才能解决动力学问题；其次，在机构学中，常常需要研究某些部分的运动情况，以考察它是否能完成所规定的任务，这往往纯粹是运动学问题。这说明，运动学在理论力学中成为一个独立的部分，不仅为动力学打下坚实基础，而且它本身也能直接应用于工程实际。从力学的发展史来看，运动学在 19 世纪，当工业上普遍使用机器时，由法国科学家安培建议独立成篇，以后它的发展与机构学的研究紧密地联系在一起。运动学研究的力学模型是点和刚体（其上任意两点之间的距离永远保持不变的物体），即运动学包括点的运动学和刚体运动学两个部分。

第1章 运动学基础

1.1 内容提要

1.1.1 参考体、参考系和运动学的研究任务

为了描述运动，必须首先确定某个不变形的物体为参照物，这个参照物就称为参考体。为了运动描述定量化，一般在参照物上固连某一坐标系，这个坐标系就称为参考系。描述质点或刚体相对于参考系位置的参量就是坐标。在运动学中，不考虑运动的原因，只是从几何的角度给出物体运动的描述方法，在给定独立运动的情况下，建立非独立运动与独立运动的关系。或者说，运动学是研究物体运动的几何性质，就是在独立运动给定的情况下，确定质点或刚体的坐标、点的速度和加速度、刚体的角速度和角加速度。

1.1.2 约束及其分类

事先给定的限制物体运动的条件称为约束。按照约束的不同特点，可将约束分为不可伸长的柔性体约束（只限制物体沿柔性体伸长方向的运动）、光滑面约束（只限制物体沿接触处公法线进入约束面的运动）、光滑圆柱铰链约束（相连的两物体只允许发生绕销钉轴线的相对定轴转动）、光滑固定铰支座约束（与之相连的物体只能绕固定支座作定轴转动）、光滑活动铰支座约束（与光滑面约束的性质一致）、光滑球铰链支座约束（与之相连物体上圆球中心受固定球窝的限制不能发生位移，但该物体可作任何方向的转动）、固定端约束（与之相连的物体在接触处既不能发生任何线位移，也不能发生任何角位移）和链杆约束（与之相连物体的连接点不能发生使链杆伸长或缩短方向的任何位移）等。

1.1.3 刚体运动的分类

1. 刚体的平移

刚体运动时，若其上的任一直线永远平行于其初始位置，则称刚体作平移运动，简称平移或平动。刚体平移时，其上各点轨迹相同，当轨迹为直线时称为直线平移，当轨迹为曲线时称为曲线平移，圆弧平移是曲线平移的特殊情况。平移刚体的角速度和角加速度恒为零。在任一瞬时，平移刚体上各点的速度相同，加速度也相同，因此，描述刚体的平移运动可简化为刚体上任一点的运动，或者说，刚体平移时可归纳为点的运动。

2. 刚体的定轴转动

刚体运动时，若其上或其延拓部分上有且只有一条直线始终固定不动，则称刚体作定轴转动。作定轴转动的刚体，其上各点均在垂直于转动轴的平面内作圆周运动。

3. 刚体的平面运动

刚体运动时，其上任一点与某固定平面的距离始终保持不变，则称刚体作平面运动。作平面运动的刚体，其上各点都在平行面内运动，即各点的轨迹都为平面曲线（直线为其特殊情况），刚体上与

这个固定平面平行的同一截面上各点的轨迹、速度、加速度一般都不相同，但刚体上垂直于这个固定平面的同一直线上各点的轨迹形状、速度、加速度却一定相同。

4. 刚体的定点运动

刚体运动时，若其上或其延拓部分上有且只有一个点固定不动，则称刚体作定点运动。

5. 刚体的一般运动

刚体运动时，若刚体在空间的运动不受任何限制，即刚体在空间中可自由运动，则称刚体作一般运动。

1.1.4 机构、广义坐标、自由度

将各刚体在接触处施以一定形式的约束，可以实现某种预期运动的系统，称为机构，也称为机械系统。机构的位置总可以由某些独立的几何参数所确定，这些独立的几何参数称为机构的广义坐标。若系统所受的约束都是对坐标的限制，则这些独立几何参数的数目反映了系统能够自由运动的程度，称为机构的自由度数。对于给定机构，其自由度数是确定的，而其广义坐标的选择可以采用不同的方案。对于同一机构、不同广义坐标的选择，对其运动描述的难易程度会有一定的不同。定轴转动刚体的自由度数为 1，平移刚体的自由度数为 1～3，一般平面运动刚体（非平移和非定轴转动的平面运动刚体）的自由度数为 1～3。

1.1.5 点的一般运动及其描述方法

研究点的一般运动，就是要研究点的运动几何性质，即研究点的几何位置随时间的变化规律。常用的方法有：

1. 矢径法

点的矢径形式的运动方程即将所研究的点 M 相对于参考空间某固定点 O 的矢径表示为时间的函数，即 $\vec{r}=\overrightarrow{OM}=\vec{r}(t)$，于是，点的速度为 $\vec{v}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t}=\dot{\vec{r}}(t)$，点的加速度为 $\vec{a}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t}=\dot{\vec{v}}=\ddot{\vec{r}}(t)$。①

2. 直角坐标法

若在参考空间的某固定点 O 处建立与参考空间固连的直角坐标系 $Oxyz$，则

$$\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}\,,\quad \vec{v}(t)=\dot{x}(t)\vec{i}+\dot{y}(t)\vec{j}+\dot{z}(t)\vec{k}\,,\quad \vec{a}(t)=\ddot{x}(t)\vec{i}+\ddot{y}(t)\vec{j}+\ddot{z}(t)\vec{k}$$

3. 自然坐标法（弧坐标法）

对于非自由质点 M，当已知其运动轨迹的曲线方程时，为确定该动点的运动，可在轨迹上选择一点 O 为原点，某一侧为正向，原点 O 至动点 M 的弧长 $s=\overset{\frown}{OM}$ 为坐标，称为弧坐标或自然坐标，动点 M 在每一瞬时的位置可由其弧坐标唯一确定 $s=s(t)$，它是一个代数量。以该动点为原点建立自然轴系，沿坐标轴的三个基矢量分别为 $\vec{e}_{\mathrm{t}}$（轨迹切向，并沿弧坐标的正向）、$\vec{e}_{\mathrm{n}}$（轨迹主法向，指向曲率中心）和 $\vec{e}_{\mathrm{b}}$（轨迹副法向），且有 $\vec{e}_{\mathrm{b}}=\vec{e}_{\mathrm{t}}\times\vec{e}_{\mathrm{n}}$，则点的速度和加速度在自然轴系中的表示式为

$$\vec{v}=v\vec{e}_{\mathrm{t}}\,,\quad v=\dot{s}\,;\quad \vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(v\vec{e}_{\mathrm{t}})}{\mathrm{d}t}=\dot{v}\vec{e}_{\mathrm{t}}+\frac{v^2}{\rho}\vec{e}_{\mathrm{n}}$$

或

$$\vec{a}=\vec{a}_{\mathrm{t}}+\vec{a}_{\mathrm{n}}\,,\quad \vec{a}_{\mathrm{t}}=a_{\mathrm{t}}\vec{e}_{\mathrm{t}}\,,\quad \vec{a}_{\mathrm{n}}=a_{\mathrm{n}}\vec{e}_{\mathrm{n}}\,,\quad a_{\mathrm{t}}=\dot{v}=\ddot{s}\,,\quad a_{\mathrm{n}}=\frac{v^2}{\rho}=\frac{\dot{s}^2}{\rho}$$

① 由于学生在习题解答过程中通常用手书写，故为了便于学生区别与表达矢量，本书中的矢量均采用加箭头的手写表达方式，而非黑斜体——编者注。

式中，$\vec{a}_t$ 为切向加速度，表示速度大小的变化率；$\vec{a}_n$ 为法向加速度，表示速度方向的变化率。当 $\vec{a}_t \cdot \vec{v} > 0$ 时为加速运动，当 $\vec{a}_t \cdot \vec{v} < 0$ 时为减速运动，当 $\vec{a}_t = 0$ 时为匀速运动。$\vec{a}_n$ 总是指向该点所处位置的曲率中心（即指向曲线内凹的一侧）。需要注意的是，自然轴系只表示轨迹曲线在指定点的走向，任一瞬时都随点的运动而改变，因而并无坐标的意义。

建立点的运动方程的关键，是要选择合适的坐标系，并将点置于一般位置时来列写。同时必须注意，无论使用哪种坐标，一定要先确定坐标原点及坐标正向，一般在图中标出。

在上述三种描述点的运动方法中，矢径法表达形式简单，适用于理论推导；而具体计算时采用直角坐标法和自然坐标法。直角坐标法从点在空间中的三个直角坐标随时间的变化情况来分析点的运动，用于点的轨迹未知或已知的情况；自然坐标法结合点的轨迹的几何性质分析点的运动，其物理意义明确，如果点的运动轨迹已知，且弧长随时间的变化规律也已知，一般采用自然坐标法。当点的轨迹未知，仍使用点的速度沿轨迹的切线方向及切向和法向加速度的概念，同一点速度和加速度在直角坐标系和自然轴系下求得的大小和方向必然是一致的。

当已知与机构自由度数相等的独立运动，即已知机构的整体运动情况，求解机构上某点在给定位置的速度、加速度及曲率半径这类问题时，应先将机构放置于一般位置（通常将所研究的点放置于直角坐标系的第一象限内或弧坐标的正向），选择决定机构位置的广义坐标（通常为构件上某固连直线与参考空间某固定方向的夹角 φ 或参考空间中某固定点至某动点的位移 x），根据几何关系和机构已知的运动条件，求出广义坐标对时间的一阶、二阶导数的表达式，然后将所研究点的位置坐标表示为广义坐标的函数，得到其运动方程，再对运动方程求导，根据相关公式即得问题的一般解，最后将给定位置的已知值代入即可得到问题的答案。这种求解方法常称为解析法，其中 $\dot{\varphi}$、$\ddot{\varphi}$ 的正转向与 φ 正转向相同或 $\dot{x}$、$\ddot{x}$ 的正方向与 x 的正方向相同。若用运动方程在某一特定瞬时的具体值对时间求导或用速度在这一特定瞬时的具体值对时间求导都是错误的。

1.1.6 刚体的基本运动及其描述方法

1. 刚体的平移

设 A、B 为平移刚体上的任意两点，则 $\vec{r}_A = \vec{r}_B + \overrightarrow{BA}$（$\overrightarrow{BA}$ 为常矢量），$\vec{v}_A = \vec{v}_B$，$\vec{a}_A = \vec{a}_B$，因此，只要找出刚体上的某一个容易分析计算的特征点，通过研究该特征点的运动就可以求出平移刚体上各点的速度和加速度。当刚体为曲线平移时，其上点的加速度可分解为切向加速度和法向加速度，要注意区分圆弧平移刚体和定轴转动刚体的差别，即圆弧平移刚体既无角速度，也无角加速度，而定轴转动刚体一般既有角速度，又有角加速度。

2. 刚体的定轴转动

刚体定轴转动的运动方程：

$$\varphi = \varphi(t)$$

刚体的角速度矢量：

$$\vec{\omega} = \omega\vec{k}\ , \quad \omega = \dot{\varphi}$$

刚体的角加速度矢量：

$$\vec{\alpha} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\vec{k} = \alpha\vec{k}\ , \quad \alpha = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$$

刚体作定轴转动时，其角速度和角加速度是反映整个刚体转动性质的物理量，虽然其上点的轨迹为圆周运动，但由于点的运动只分为直线运动和曲线运动，点不是刚体，说明点无转动的概念，所以不能说“某点的角速度和角加速度”。

定轴转动刚体上的点 M 相对于转轴上某确定点 O 的矢径为 $\vec{r}$，则其速度与加速度的矢量表达式为

$$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}\,，\quad \vec{a}=\vec{\alpha}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\vec{v}\,，\quad \vec{a}_{\mathrm{t}}=\vec{\alpha}\times\vec{r}\,，\quad \vec{a}_{\mathrm{n}}=\vec{\omega}\times\vec{v}=\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

如果定轴转动刚体上某点 M 至转轴的垂直距离为 ρ，则该点的速度、切向加速度、法向加速度的大小分别为

$$v=\rho\omega\,，\quad a_{\mathrm{t}}=\rho\alpha\,，\quad a_{\mathrm{n}}=\rho\omega^2$$

即均与 ρ 成正比，由此可知：在刚体垂直于转轴的截面上，由转轴出发的同一直线上各点的速度分布呈直角三角形，如图 1-1 所示，而加速度分布呈锐角三角形，加速度 $\vec{a}$ 与该点至转轴的连线的夹角 θ 为

$$\theta=\arctan\frac{a_{\mathrm{t}}}{a_{\mathrm{n}}}=\arctan\frac{\alpha}{\omega^2}$$

对同一瞬时的不同点，θ 角都相同，如图 1-2 所示，且加速度矢量 $\vec{a}$ 到 $\overrightarrow{MO}$ 的转向与角加速度 α 的转向相同。

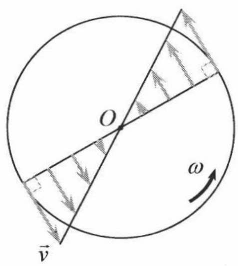


图 1-1　定轴转动刚体上点的速度分布规律

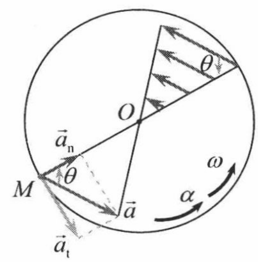


图 1-2　定轴转动刚体上点的加速度分布规律

对于一些平移和定轴转动相结合的情况，要注意分析结合点的加速度，例如由皮带和定轴圆轮组成的传动系统中，皮带在直线段上的点的加速度和曲线段上的点的加速度是有区别的，在结合部位进入到曲线段后和脱离曲线段前是有法向加速度的，而在直线段中是没有法向加速度的。

1.2　思考题及解答

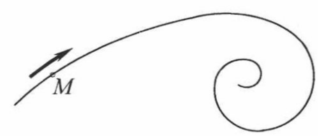
1-2　如果刚体上每一点轨迹都是圆，则该刚体一定作定轴转动吗？为什么？

解答：刚体上每一点轨迹都是圆，该刚体不一定作定轴转动。例如，某一刚体作平移运动，若其上某一点轨迹是圆，则其上所有点的轨迹都是圆，但该刚体不是作定轴转动，而是作圆弧平移运动。

1-3　若某刚体作平面运动，其上各点轨迹不相同，试问其上某点的轨迹为圆弧可能吗？试举例说明。

解答：某刚体作平面运动，其上各点轨迹不相同，但其上某一点的轨迹可能为圆弧。例如，一个在固定不动的圆弧凹面或圆弧凸面上作纯滚动的圆盘，其圆心点的轨迹为圆弧，但其他各点的轨迹都是各不相同的平面曲线。

1-5　如图所示，点 M 沿螺旋线自外向里运动，若它走过的弧长与时间的一次方成正比，试问该点速度大小的变化情况和该点加速度大小的变化情况。



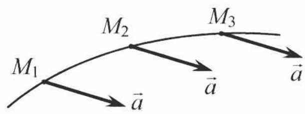
思考题 1-5 图

解答：设 $s=kt$（k 为常数），则 $v=\dot{s}=k=\mathrm{const}$，$a_{\mathrm{t}}=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=0$，$a_{\mathrm{n}}=\dfrac{v^2}{\rho}\neq\mathrm{const}$。

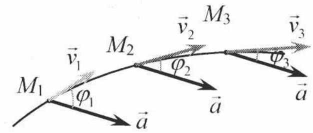
即该点的速度大小不变，为匀速，切向加速度为零。法向加速度不为零，也不等于常数，当点 M 沿螺旋线自外向里运动时，ρ 越来越小，a_n 越来越大。也就是说，点 M 作匀速率曲线运动，但加速度却越来越大。

1-6 如图所示，点作曲线运动，已知点的加速度为常矢量，试问该点是否作匀变速运动？

解答：如解答图所示，设 $\vec{a}$ 与点 M 的运动速度方向的夹角为 φ，则 $a_t = a\cos\varphi$，在图中 φ 越来越小，a_t 越来越大，说明该点的速度大小越来越大，是加速运动，但不是匀加速运动。



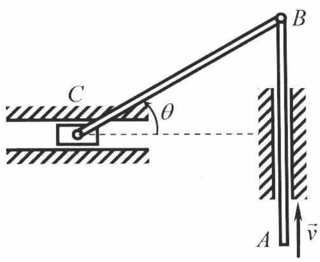
思考题 1-6 图



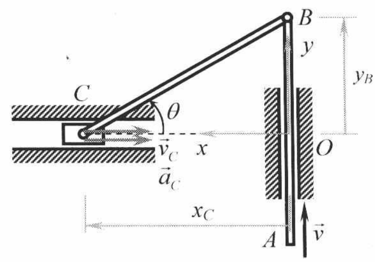
思考题 1-6 解答图

1.3 习题及解答

1-1 图示平面机构，杆 AB 沿铅垂导槽以匀速 $\vec{v}$ 向上运动，通过连杆 BC 带动滑块 C 沿水平直槽运动，若 $BC=l$，且初始瞬时 $\theta=0^\circ$，试求 $\theta=30^\circ$ 时，滑块 C 的速度和加速度。



习题 1-1 图



习题 1-1 解答图

解：建立如解答图所示的直角坐标系 Oxy，则

$$x_C = l\cos\theta,\quad y_B = vt = l\sin\theta,\quad v = \dot{y}_B = l\cos\theta\cdot\dot{\theta} \quad\Rightarrow\quad \dot{\theta} = \frac{v}{l\cos\theta}$$

$$v_C = -\dot{x}_C = l\sin\theta\cdot\dot{\theta} = l\sin\theta\cdot\frac{v}{l\cos\theta} = v\tan\theta\ (\rightarrow),\quad a_C = \dot{v}_C = \frac{v}{\cos^2\theta}\cdot\dot{\theta} = \frac{v^2}{l\cos^3\theta}$$

当 $\theta=30^\circ$ 时：$v_C = v\tan\theta\big|_{\theta=30} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}v\ (\rightarrow)$，$a_C = \dfrac{v^2}{l\cos^3\theta}\bigg|_{\theta=30^\circ} = \dfrac{8\sqrt{3}v^2}{9l}\ (\rightarrow)$

解析：

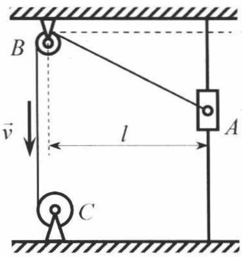
（1）建立恰当的参考坐标系是解决问题的关键。本题中，点 C 作水平直线运动，点 B 作铅垂直线运动，注意到坐标原点不能运动，所以建立了固定直角坐标系 Oxy 为参考系，这样可方便地写出点 B、C 的直角坐标。

（2）由于 $\vec{v}_B$ 的方向与 y 轴正向相同，所以 $v_B = \dot{y}_B$；由于 $\vec{v}_C$ 的方向与 x 轴正向相反，所以 $v_C = -\dot{x}_C$；由于图示 $\vec{v}_C$ 与 $\vec{a}_C$ 的方向相同，所以 $a_C = \dot{v}_C$。

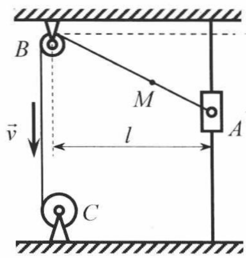
（3）若在滑块 C 上建立直角坐标系 Cxy（x 轴水平向右）并将 x_C 写成 $x_C = l\cos\theta$，则是错误的，因为点 C 是运动的，Cxy 不是大地上的固连坐标系，而是平移坐标系。

（4）可以在滑块 C 的初始位置（此时杆 CB 处于水平位置）处建立与大地固连的直角坐标系 C_0xy（x 轴水平向右），则此时 $x_C = l - l\cos\theta$，$v_C = \dot{x}_C$。

1-5 图示平面系统，套筒 A 由绕过定滑轮 B（大小不计）的不可伸长的绳索牵引而沿轨道上升，定滑轮 B 到导轨的水平距离为 l，铅垂绳索以等速 $\vec{v}$ 下拉，试求套筒 A 的速度和加速度与坐标 x 的关系。



习题 1-5 图



习题 1-5 解答图

解： 如解答图所示，设 $AB = s$，由几何关系知

$$s^2 = l^2 + x^2 \tag{a}$$

式中，$s = l_0 - vt$（l_0 是 AB 段绳子的初始长度），所以

$$\dot{s} = -v, \quad v_{Ax} = \dot{x} = -v_A, \quad a_{Ax} = \dot{v}_{Ax} = \ddot{x} = -a_A = -\dot{v}_A$$

由式(a)得到 $$2s \cdot \dot{s} = 2x \cdot \dot{x} \quad \Rightarrow \quad v_A = -\dot{x} = \frac{s}{x}v = \frac{\sqrt{l^2 + x^2}}{x}v \quad (\uparrow)$$

$$a_A = \dot{v}_A = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{s}{x}v\right) = \frac{-vx - (s)\cdot\left(-\dfrac{s}{x}v\right)}{x^2}v = \frac{-vx^2 + s^2 v}{x^3}v = \frac{l^2}{x^3}v^2 \quad (\uparrow)$$

解析：

（1）由于所求数值 v_A、a_A 均大于 0，所以 $\vec{v}_A$、$\vec{a}_A$ 在图中所设方向与真实方向相同。

（2）当一个矢量的方向与坐标轴方向平行时，该矢量在该坐标轴上的投影（为代数量）与它的大小不一定是相等关系，本题中由于 $\vec{v}_A$、$\vec{a}_A$ 的方向均与 x 轴正向相反，所以 $v_A = -\dot{x}$，$a_A = -\ddot{x}$。由于 AB 段绳长是变短的，题中 v 是速度大小，所以 $\dot{s} = -v$。

（3）铅垂段绳子上各点速度大小都为 v；由于 AB 段绳子上各点的轨迹互不相同，所以其上各点速度的大小和方向都不相同，但其上各点速度在 $\overrightarrow{AB}$ 方向上的投影却相等，都等于 v。铅垂段绳子上各点加速度都为零，但 AB 段绳子上各点（B 点除外）的加速度却不等于零，它们的大小和方向也不相同，且在 $\overrightarrow{AB}$ 方向上的投影也不相等。以上结论可由点的速度和加速度在极坐标中的表示 $\vec{v}_M = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$，$\vec{a}_M = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi$ 得到说明。其中，ρ 为点 B 至绳上确定点 M 的距离，$\vec{e}_\rho$ 为 $\overrightarrow{BM}$ 方向单位矢量，φ 为 $\overrightarrow{BM}$ 与铅垂向下方向的夹角，$\vec{e}_\varphi$ 为 $\vec{e}_\rho$ 逆时针转过 90° 所得方向的单位矢量。具体推导过程请读者自己完成。

1-8 图示为牛头刨床中的摇杆机构，曲柄 O_1A 以匀角速度 ω 绕轴 O_1 作顺时针转动，套筒 A 可沿摇杆 O_2B 滑动，并同时带动摇杆 O_2B 绕轴 O_2 摆动，O_1、O_2 处于同一铅垂直线上，固连于滑枕上的销钉 D 放置于摇杆 O_2B 的直槽内，已知 $O_1A = r$，$O_1O_2 = 3r$，滑枕到轴 O_2 的距离为 $6r$，$t = 0$ 时，$\varphi = 0$，试求任一瞬时，滑枕沿水平滑道运动速度和加速度。

解： 建立如解答图所示的直角坐标系 O_2xy。

由几何关系得到

$$x_D = 6r\tan\theta$$

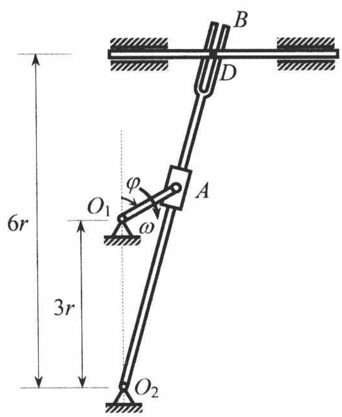
其中
$$\tan\theta=\frac{O_1A\sin\varphi}{O_1O_2+O_1A\cos\varphi}=\frac{r\sin\varphi}{3r+r\cos\varphi}=\frac{\sin\varphi}{3+\cos\varphi}$$

则
$$x_D=6r\tan\theta=6r\frac{\sin\varphi}{3+\cos\varphi}=\frac{6r\sin\varphi}{3+\cos\varphi}$$

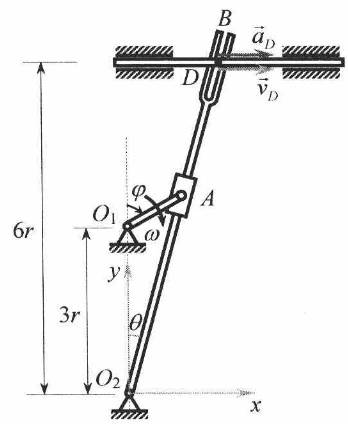
$$v_D=\dot{x}_D=6r\dot{\varphi}\frac{\cos\varphi(3+\cos\varphi)-\sin\varphi(-\sin\varphi)}{(3+\cos\varphi)^2}=6r\omega\frac{1+3\cos\varphi}{(3+\cos\varphi)^2}$$

$$a_D=\dot{v}_D=6r\omega\frac{-3\dot{\varphi}\sin\varphi(3+\cos\varphi)^2-(1+3\cos\varphi)\cdot 2(3+\cos\varphi)(-\dot{\varphi}\sin\varphi)}{(3+\cos\varphi)^4}$$

$$=6r\omega^2\frac{(3\cos\varphi-7)\sin\varphi}{(3+\cos\varphi)^3}$$



习题 1-8 图



习题 1-8 解答图

解析：

（1）在滑枕上的销钉 D 相对于摇杆 O_2B 的直槽滑动，套筒 A 又沿摇杆 O_2B 有相对滑动，所以本问题属于双重复合运动问题。

（2）销钉 D 在作直线平移的滑枕上，销钉 D 的运动轨迹为水平直线，则销钉 D 的运动方程为 $x_D=f(t)$，$y_D=0$。

（3）曲杆 O_1A 的角速度为 $\omega_{O_1A}=\dot{\varphi}=\omega$，转向为顺时针方向；摇杆 O_2B 的角速度为 $\omega_{O_2B}=\dot{\theta}=\left(\arctan\dfrac{\sin\varphi}{3+\cos\varphi}\right)'=\dfrac{1+3\cos\varphi}{(3+\cos\varphi)^2}\omega_{O_1A}$，从而建立了曲杆 O_1A 的角速度与摇杆 O_2B 的角速度之间的关系。请注意，不能直接对 $\omega_{O_2B}=\dfrac{1+3\cos\varphi}{(3+\cos\varphi)^2}\omega_{O_1A}$ 求时间的一阶导数而得到 $\alpha_{O_2B}=\dfrac{1+3\cos\varphi}{(3+\cos\varphi)^2}\alpha_{O_1A}$，因为 φ 是随时间变化的，$\dfrac{1+3\cos\varphi}{(3+\cos\varphi)^2}$ 也是时间的函数。

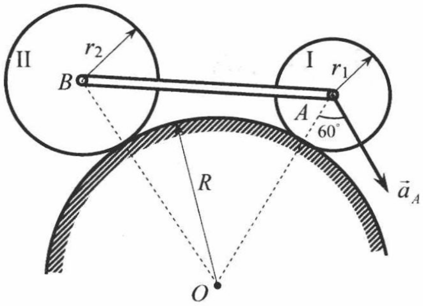
1-9 图示轮 I、II 的半径分别为 $r_1=15$ cm，$r_2=20$ cm，它们的中心分别铰接于杆 AB 的两端，两轮在半径 $R=45$ cm 的固定不动的曲面上运动，在图示瞬时，点 A 的加速度大小为 $a_A=120$ cm/s^2，其方向与 OA 线成 60° 夹角，试求杆 AB 的角速度、角加速度及点 B 的加速度大小。

解：

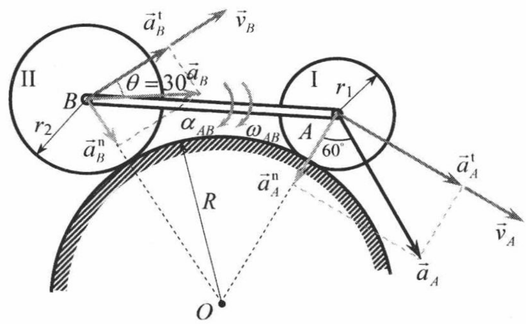
1．运动分析

如解答图所示，由于在运动过程中三角形 OAB 的形状保持不变，所以杆 AB 绕轴 O 作定轴转动。

圆轮 I 的中心点 A 作圆周运动（以点 O 为圆心，半径为 $R+r_1$）；圆轮 II 的中心点 B 作圆周运动（以点 O 为圆心，半径为 $R+r_2$）。



习题 1-9 图



习题 1-9 解答图

2．点 A 的速度与加速度

$$a_A^{\mathrm{n}} = a_A \cos 60^\circ = \frac{1}{2} a_A = \frac{v_A^2}{R+r_1} \quad \Rightarrow \quad v_A = \sqrt{(R+r_1)a_A^{\mathrm{n}}} = \sqrt{\frac{1}{2}(R+r_1)a_A}$$

$$a_A^{\mathrm{t}} = a_A \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} a_A$$

3．杆 AB 的角速度及点 B 的速度

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{R+r_1} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}(R+r_1)a_A}}{R+r_1} = \sqrt{\frac{120}{2(45+15)}} = 1 \text{ rad/s} \quad \text{（顺时针）}$$

$$v_B = (R+r_2)\omega_{AB} = (R+r_2)\sqrt{\frac{a_A}{2(R+r_1)}}$$

4．杆 AB 的角加速度及点 B 的加速度

$$\alpha_{AB} = \frac{a_A^{\mathrm{t}}}{R+r_1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a_A}{R+r_1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{120}{45+15} = \sqrt{3} \text{ rad/s}^2 \quad \text{（顺时针）}$$

$$a_B^{\mathrm{n}} = \frac{v_B^2}{R+r_2} = \frac{R+r_2}{R+r_1} \cdot \frac{a_A}{2}, \quad a_B^{\mathrm{t}} = (R+r_2)\alpha_{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{R+r_2}{R+r_1} a_A$$

$$a_B = \sqrt{(a_B^{\mathrm{n}})^2 + (a_B^{\mathrm{t}})^2} = \frac{R+r_2}{R+r_1} a_A = \frac{45+20}{45+15} \times 120 = 130 \text{ cm/s}^2$$

$$\theta = \arctan \frac{a_B^{\mathrm{n}}}{a_B^{\mathrm{t}}} = \arctan \frac{\sqrt{3}}{3} = 30^\circ$$

解析：

（1）轮 I 中心点 A 的运动轨迹为以点 O 为圆心、以 $R+r_1$ 为半径的圆周曲线；轮 II 中心点 B 的运动轨迹为以点 O 为圆心、以 $R+r_2$ 为半径的圆周曲线。换言之，杆 AB 上的两点 A、B 随杆 AB 作平面运动始终与点 O 的距离保持不变，所以杆 AB 上任意点与点 O 的距离也保持不变，可见杆 AB 绕轴 O 作定轴转动。或者想象将杆 AB 延拓为一个三角板 OAB，显然三角板 OAB 绕轴 O 作定轴转动。判断出杆 AB 作定轴转动是本题的求解关键。另外，此题中的两个圆轮在固定不动凸曲面上不一定作纯滚动。

（2）利用定轴转动刚体上点的速度的加速度的分布特征也可快速求出点 B 的速度和加速度，$v_B = \dfrac{OB}{OA} v_A$，方向垂直于 OB 向右；$a_B = \dfrac{OB}{OA} a_A$，$\vec{a}_B$ 与 $\overrightarrow{BO}$ 的夹角与 $\vec{a}_A$ 与 $\overrightarrow{AO}$ 的夹角相同，都为 60°。

第 2 章　刚体的平面运动

2.1 内容提要

2.1.1 刚体平面运动研究的简化和运动方程

刚体运动时，若其上任一点与某个固定平面之间的距离始终保持不变，则称刚体作平面运动。刚体的平面运动可用其上与这个固定平面相平行的某一截面的平面图形在其自身所在平面内的运动来研究，这个平面图形可以按研究需要任意延拓，但其上任意两点之间的距离始终保持不变。该平面图形在其所处平面内的位置可由图形上任一直线 AB 的位置确定，若在平面图形所在平面上建立固定直角坐标系 Oxy，则直线 AB 的位置完全由点 A 的坐标和 AB 与 Ox 轴夹角确定（如图 2-1 所示），即刚体的平面运动方程为

$$\begin{cases} x_A = x_A(t) \\ y_A = y_A(t) \\ \varphi = \varphi(t) \end{cases}$$

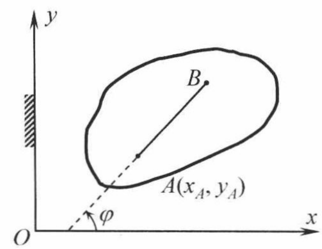


图 2-1　刚体平面运动的描述

显然，如果 φ 为常数，则刚体是平移；若 x_A 和 y_A 都为常数，则刚体作定轴转动，这说明，刚体的平面平移和定轴转动是平面运动的特殊情况，或者说，刚体的平面运动包含了平面平移和定轴转动两种基本运动形式。通常，将不是平面平移和定轴转动的平面运动称为一般平面运动。

2.1.2 平面运动刚体的角速度 ω 和角加速度 α

平面运动刚体的方位角 $\varphi = \varphi(t)$，即为其上任一直线 AB 与 x 轴夹角，一般规定由 Ox 轴正向转至 $\overrightarrow{AB}$ 方向为逆时针转向时为正。当然，也可以将 x 轴改为参考系中某个固定方向，也就是说，平面运动刚体上某固连直线与惯性空间某固定方向的夹角都可以称为平面运动刚体的方位角，由这个固定方向转至这条固连直线的转向称为方位角的转向。

平面运动刚体的角速度 ω：

$$\omega(t) = \dot{\varphi}(t) \quad 或 \quad \vec{\omega} = \omega\vec{k} = \dot{\varphi}\vec{k}$$

平面运动刚体的角加速度 α：

$$\alpha(t) = \dot{\omega}(t) = \ddot{\varphi}(t) \quad 或 \quad \vec{\alpha} = \alpha\vec{k} = \dot{\omega}\vec{k} = \ddot{\varphi}\vec{k}$$

平面运动刚体的角速度和角加速度是其方位角对时间 t 的一阶和二阶导数，它们的正转向与方位角的正转向一致，即平面运动刚体的角速度和角加速度的方向总是垂直于其平面图形所在的平面，一般以逆时针转向，即 z 轴正向为正。

必须注意，平面运动刚体的角速度和角加速度是描述刚体整体转动情况的运动量，即角速度和角加速度都是相对"体"而言的，在给定瞬时它们都是确定值，它们不需要转轴，只需要说明转向，这说明，平面运动刚体的角速度和角加速度都是自由矢量。而刚体上点的运动量是速度和加速度，点无

角速度和角加速度的概念。研究刚体的平面运动就是要建立其上“点”的运动量（速度、加速度）与“体”的运动量（角速度、角加速度）之间的关系。

2.1.3 速度分析

用几何法进行速度分析是研究某瞬时平面运动刚体上各点速度矢量应满足的几何关系，即速度分布规律，有三种方法：

1. 速度瞬心法

某一瞬时，当平面运动刚体的角速度不为零时，其上唯一存在速度等于零的点 P，称它为速度瞬心。平面运动刚体上各点的速度分布，可以看成该瞬时平面图形绕过速度瞬心 P 且垂直于运动平面的轴（速度瞬时转轴）作瞬时转动时图形上各点的速度分布，即 $\vec{v}_M = \vec{\omega} \times \overrightarrow{PM}$ 。必须注意，速度瞬心是该平面运动刚体上或其延拓部分上的点，在不同的瞬时平面运动刚体有不同的速度瞬心，因此，刚体的平面运动可以认为是绕一系列速度瞬心所作的瞬时转动。

使用速度瞬心法分析平面运动刚体上点的速度的前提是在各种情况下找到速度瞬心 P 的位置，表 2-1 提供了确定速度瞬心的基本方法。

表 2-1 确定速度瞬心 P 位置的基本方法

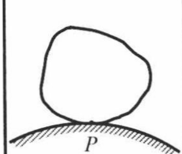
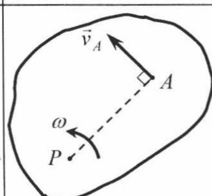
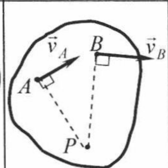
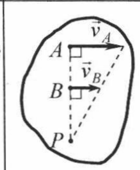
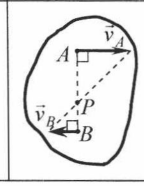
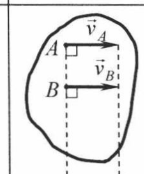
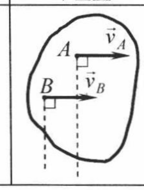
刚体沿固定表面作纯滚动	已知刚体上一点的速度 $\vec{v}_A$ 和刚体的角速度 ω	刚体上两点的速度方向不平行	刚体上两点的速度方向平行			
			两点速度与两点连线垂直，大小不等		两点速度矢量相等	
			两速度同向	两速度反向	与两点连线垂直	与两点连线不垂直
						
P 为刚体与固定表面的接触点	$PA=\dfrac{v_A}{\omega}$	P 为两点速度垂线的交点	P 为两点连线与两点速度矢端连线的交点		P 在无穷远处	
刚体瞬时转动					刚体瞬时平移	

表 2-1 说明，作一般平面运动的刚体，在某瞬时的运动不是瞬时转动就是瞬时平移，对于瞬时平移可以理解为速度瞬心在无穷远处。必须注意，速度瞬心的速度为零，但它的加速度却不为零，显然，定轴转动刚体转轴上的点的速度和加速度都为零，这说明速度瞬时转轴与定轴是不一样的。瞬时平移就是刚体瞬时不转，即该瞬时刚体的角速度 $\omega = 0$，但该瞬时刚体的角加速度 $\alpha \neq 0$，也就是说，在这之前和之后刚体都是有角速度的，瞬时平移刚体上各点的速度在该瞬时都相同，但其上各点的加速度在该瞬时却不相同，这与平移刚体既无角速度也无角加速度以及平移刚体上各点的速度和加速度在同一瞬时都相同是不一样的，所以，解题时“将平移写成瞬时平移”或“将瞬时平移写成平移”都是错误的。对于平面系统，每个作一般平面运动的刚体在同一瞬时都有自己的速度瞬心，即作平面运动的不同刚体，在同一瞬时，它们的速度瞬心也是不一样的。

2. 两点的速度关系（速度的基点法）

同一刚体上，任一点 B 的速度等于基点 A 的速度和该点 B 相对于以基点 A 为原点的平移坐标系 $Ax'y'$ 的速度 $\vec{v}_{BA}$ 的矢量之和，即