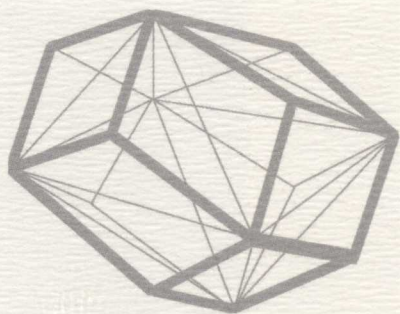




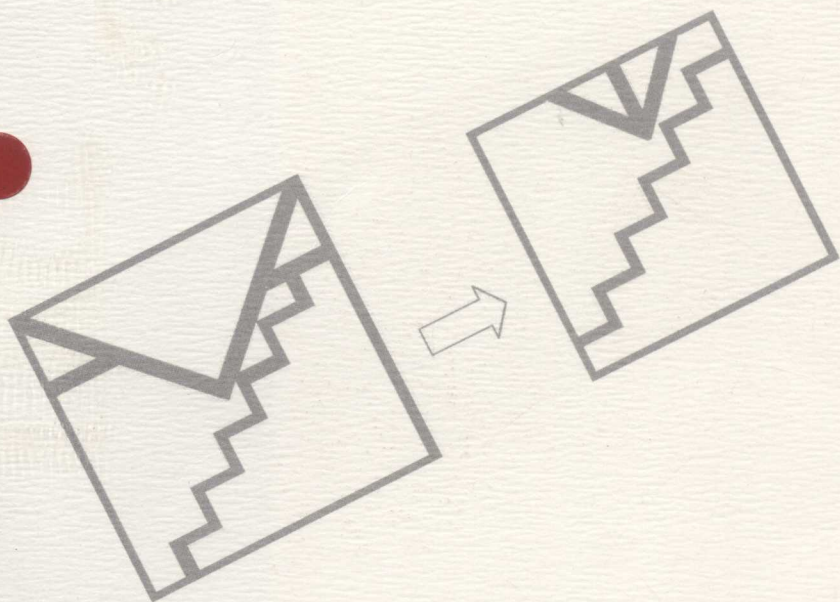
棘手又迷人的数学

剖分和组合

从七巧板到水立方



从七巧板到水立方，
从剖分到组合，
从平面到空间，
从人脑到电脑，
演化着异彩纷呈的数学世界，
迸发出闪烁智慧的思想火花。



柳柏濂
著



科学出版社

014035086

0157.3
02



介 容 内

棘手又迷人的数学

剖分和组合

从七巧板到水立方

柳柏濂/著



科学出版社

北京



北航

C1714628

0157.3
02

内 容 简 介

剖分和组合,是组合几何的重要内容.它的简易预示着复杂,无序蕴涵着有序,让人体会到从民间数学走向现代数学的发展之路.本书从七巧板的拼装开始,浏览了中外的拼图游戏、智力难题、组合证明的前世今生与成败得失.中国古代相补原理启发了现代机器证明,完美正方形的奥妙隐藏着电工学的定律.铺砌地板,从规则到不规则,只能靠数学说话;镶嵌空间,从建筑到有机物,更依赖创造性思维.数学大师的几个问题,主流数学的若干猜想,都在书中展现,人脑与电脑的竞争,数学思想的碰撞,偶尔迸出火花.

本书史料丰富,结构严谨,文笔流畅,可读性强.一切爱好数学的读者,在这里,都可以找到你的兴趣;从中学生到大学生,在这里,都可以找到你有用的东西.

图书在版编目(CIP)数据

剖分和组合:从七巧板到水立方 / 柳柏濂著. —北京:科学出版社, 2014.4

(棘手又迷人的数学)

ISBN 978-7-03-040240-0

I. 剖… II. 柳… III. 组合几何—普及读物 IV. O157.3-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 048946 号

责任编辑:李 敏 吕彩霞 / 责任校对:胡小洁

责任印制:赵德静 / 封面设计:黄华斌

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

中国科学院印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2014 年 4 月第 一 版 开本:720×1000 1/16

2014 年 4 月第一次印刷 印张:10 1/2

字数:220 000

定价:49.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

总 序

数学如一束玫瑰，棘手，但很迷人。

数学的美是迷人的，然而很多漂亮有趣的数学题，开始常常叫人产生无从下手之感，所以数学又常常是棘手的。其中组合数学的问题更是五花八门，几乎每个题目都要有独特的思路，使你在解题的思考过程中得以充分享受“从山重水复走向柳暗花明”的乐趣，体验在百思不解后豁然开朗的快乐。

擅长组合数学的柳柏濂先生，从他多年研究成果和数学教学的思考中撷取精华，写成十几篇数学小品与读者共同分享，其书名取为《数学，棘手但很迷人》，是非常贴切的。

这本书是本丛书的第一册，丛书其他分册内容形式多有不同而各具特色。编者用《棘手又迷人的数学》作为丛书的书名，想来主要是希望读者从多个角度领略数学的迷人和棘手之处。

柳先生的这些短文，引领我们走进一个颇有深度的数学世界。他不满足于浮光掠影或眼前一亮，而是与读者一同思考和探索。在脍炙人口的“阿凡提传奇”中，他选取了一个巧折金环的故事，让我们在惊叹中，欣赏数论的完备分拆和有关的新结果。接着，作者带领我们从动物园的栏栅前和每天上下往返的楼梯中，走向组合数学的前沿观光；又从法国著名数学家傅里叶的经典提问，谈到中国古代的数学泰斗祖暅的数学原



理；从生命科学“克隆”羊的伟大成就谈起，把现代图论的知识和思维奉献给读者。其他如从有机化合物谈到红楼梦的族谱，再引出信息科学技术中的密码、树结构和有相当难度的机器证明；从宋代词人的名句将我们引向他的研究专题“组合矩阵论”中寻寻觅觅；又在绞肉机旁，把函数的迭代引向“混沌”的动力系统理论；在眼花缭乱的应用中，我们领会了数学模型的真谛，尝到了数学的美味……“棘手但很迷人”，也就成为作者与读者的共同体验了。作者用几乎是文学而不是数学的笔触，给我们娓娓道出现代数学的“故事”。这不是东采西摘的材料堆砌，而是一个二十多年来承担国家自然科学基金任务的教授在研究之余的思想札记。

“棘手但很迷人”，这是数学学习甘苦的内心独白，也是数学探索“无限风光在险峰”的壮志豪言。柳柏濂教授为本丛书奉献的另一本作品，《剖分和组合：从七巧板到水立方》，用古典组合几何到现代数学的发展，充分演绎了这一主题。作者从七巧板的拼装开始，浏览了中外的拼图游戏，智力难题，叙述了组合证明的前世今生，成败得失。从问题引出理论，由探索展现历史，这里有“引无数英雄竞折腰”的勾股定理，又有“化圆为方”的历史悬案，有正方形巧思苦想的优美组合，更有一球变两球的“惑众妖言”。铺砌地板，从规则到不规则，只能靠数学说话；镶嵌空间，从建筑到有机物，更依赖创造性思维。数学大师的问题，引导出主流数学的发展，人脑电脑的竞争，迸发出数学思想碰撞的火花。如果说，《数学，棘手但很迷人》是一簇斗艳的鲜花的话，那么，《剖分和组合：从七巧板到水立方》便是一轴秀丽的长卷，让人寻踪探究，欲罢不能。

古老的幻方，是棘手但却迷人的数学主题之一。吴鹤龄先生为《好玩的数学》丛书写了一本《幻方及其他——娱乐数学经典名题》（第二版），引得许多读者对幻方入迷而且跃跃欲试，詹森先生就是其中之一。詹先生玩幻方玩得熟能生巧，玩出了创新，把“棘手”玩成了顺手。于是他为本丛书写了一本《你亦可以造幻方》，与读者分享成功的快乐。书中提供了构造奇数阶的幻方、完美幻方、对称幻方、对称完美幻方、奇偶数分开的对称幻方等多种构造幻方的方法。构造一个这样的幻方，只需两步或三步，这两三步小学生都可以做到。即使你还没有完全理解其中的道理，也能造出许多个有各种特色的幻方。

具有不确定性的事件叫随机事件。随机事件的数学问题常常是迷人而棘手的。在《好玩的数学》丛书中《趣味随机问题》一书的作者孙荣恒教授，这次又为我们带来了一串新的故事。他的新作《概率统计拾遗》，从平凡中发掘惊奇，给读者一个又一个意外。比如打麻将要掷骰子定庄的问题。有人认为自己掷骰子对自己坐庄有利，想自己坐庄者常抢着掷；有的人认为谁掷都一样，4家坐庄机会均等，都是 $1/4$ 。两种看法哪一种正确？意外的答案是都错了。由此引出的纸上作业法，有各种各样的应用。又如由鞋子配对引出的S矩阵给出四同、五同等问题的简单算法。孙先生通过简单、严谨的分析计算，得出的结论令人口服心服，其方法平凡而又有启发性。像这样来自生活的看似平凡其实暗藏玄机的问题书中不少，有的例子涉及考生的成绩，有的例子涉及法官的判决，要想真正想明白，真是要有不怕棘手的精神。

如果在棘手的辛劳之余想轻松一下，就翻翻本丛书中的另



一本《邮票王国中的迷人数学》吧。作者之一是大家熟悉的易南轩老师，他的《数学美拾趣》（第二版）深受读者欢迎，也是《好玩的数学》丛书中的一册。另一位作者王芝平老师也是作品颇丰的数学教育专家。两位先生花费了三年多的光阴和心血，收集整理了一千三百多枚与数学有关的邮票，按图索骥，向我们一一道来。邮票的轮廓联系着各种几何形体，邮票的主题或涉及数学史上的事件，或纪念数学家的丰功伟绩，或展示数学的应用，琳琅满目，美不胜收。联系着这上千余枚邮票，作者纵横畅叙，笔墨酣畅，谈古论今，说天看海，大至卫星飞船，小至象棋游戏，都和数学的美妙关联起来。不论是数学爱好者、集邮爱好者或一般的读者，都能在阅读此书时享受人类文明之雅趣。不过这并不棘手，棘手的工作作者已经代我们辛劳了。

本丛书的读者可能有男女老少，可能术业各有专攻，对数学的理解和鉴赏的角度与能力各不相同。有人认为棘手的问题，也有人能够驾轻就熟地手到擒来。但编者希望并且相信，每位翻阅过丛书的朋友都能从中看到几点迷人的星光；果真如此，那将是作者和编者最大的快乐。

2011年11月9日

前言

合合分分，分分合合，人类的历史就是剖分和组合的历史。

拼拼凑凑，凑凑拼拼，知识的探索就是寻找和拼装的探索。

从七巧板到水立方，记录了几何组合的历史：从平面到曲面，从二维到多维，从有限到无限，从规则到不规则，从可测到不可测，从游戏到应用，从猜想到定理……

在这本不算冗长的小书里，儿时摆弄过的七巧板，勾起你怀旧的回忆，它原来曾是我们祖先厅堂上可组合的家具。远在500年前埃及学者的提问，让伽利略用数学，给予了圆满的解答。美国专家罗德先生，对中国小姐的怜香惜玉，引发出剖分与重组的花轿难题。如此多娇的勾股定理，引无数文人墨客包括美国总统竞折腰。在数学的论证中，你应该体会一下什么是“沉默是金”，但过分自信的“聪明一世”，难免也会“糊涂一时”。“挖东墙，补西墙”不仅仅是老农民的权宜之计，一个简单的想法，掀起几何定理机器证明的一场革命。也许，我们在惊叹正方形拼凑的完美时，不曾料到它与电工学的联系。铺砌平面和编制地毯的复杂数学中，你可曾料到有家庭妇女的参与。不要以为“数学疯子”康威仅仅是一个骨牌高手，在现代数学的群和纽结理论中有他的重要贡献。今天，当几十万个富勒圆顶在世界各国拔地而起的时候，有谁想到，他是一位两次被哈佛除名，32岁那年差一点就自杀的发明家。当我们在



疑惑，多边形的大小相等是否组成相等的时候，鲍耶埃-盖尔文定理给我们肯定的回答。从方块向点集再走一步，数学家竟然解决了“化圆为方”的历史悬案。如果你轻易地把“一球变两球”、“蚂蚁变大象”斥为妖言惑众，那么，你还未进入现代数学家的思想领域。尽管鲍耶埃-盖尔文定理在三维空间的推广，被数学大师希尔伯特列为世纪之问，但未到一年，就被他的学生德恩宣告破解。如果说，计算机对开尔文问题的改进，催生了水立方，那么，海尔斯用电脑解决了世界难题，则给传统数学的核心价值，带来了又一次震动。

这就是《剖分和组合：从七巧板到水立方》的粗略轮廓。希望能成为你翻开它第一页时的指南。

七巧板，方方正正地藏在一个正方形的框内，恰如数学标准的规矩，这种逻辑的规矩，从欧几里得的时代开始，两千多年，薪火相传。然而，它千变万化，组合出几千种不同的图形，这犹如数学的创新，“运用之妙，存乎一心”。数学，很多人又爱又恨的数学，之所以历久不衰，源于它的创新和活力。我们没有忘记数学大师希尔伯特那句激励人心的口号：一个领域只要还有深刻的公开问题，这个领域就还有它的活力。在这本书里，你可以找到不少公开的问题，这些来自理论或实践的问题，推动着数学的发展。要知道，一个重要的数学问题的困难程度，和它的提法是否“初等”并没有太大关系。这是数学区别于其他学科的一大特点。正如规矩的七巧板如此初等，却蕴藏着巨大的变化一样。数学问题的困难程度，主要取决于它和主流数学的联系，如果联系很少，就必须在理论和方法上加以创新。创新需要的，不仅仅是知识，而更多的是灵感和勇气、洞察力和想象力。在第11节中，你将会看到，美国

加州圣地亚哥，一名没有经过专门数学训练的家庭妇女，五个孩子的母亲，玛乔里·赖斯，如何凭自己创造的一套新符号和方法去挑战权威。而“用圆顶把纽约曼哈顿包起来……”则是科学家富勒先生的梦想（第13节）。怪不得爱因斯坦说：“如果你第一次听到某个点子不觉得它荒谬，那么，这个点子也没什么值得令人期待的了。”

数学的创新，不仅是方法的创新，同时也是工具的创新。仅靠“一支笔，一张纸”研究数学的年代已经过去了。计算机的运用，给数学家插上了飞越巅峰的翅膀。如果说，七巧板是传统数学的雏形，那么水立方便是数学与计算机合作的典范。数学家用计算机证明了欧几里得几何的几乎所有定理（第9节），发现了完美正方形（第10节），创新了开尔文的设计（第18节），解决了困扰人们400多年的难题（第19节）。那位在第二次世界大战期间破译了德国最高级密码的功勋教授塔特，在谈到开普勒猜想（第19节）时说：“一台运算速度足够快的计算机，可使这个理论上的结果转化为对此问题实际的证明过程。”计算机不仅证明结论，还能发现猜想。高速计算机的出现，促进了数学，特别是离散数学的发展。

数学研究的战场上，没有常胜将军，今天，你指出了别人的错误，明天，说不定你的缺陷就暴露在大家面前；今年，你刷新了人家的结果，明年，说不定你的工作成了明日黄花。“一是一，二是二”，数学家永远是低调的，他们是知识分子集合中最老实的那个子集。本书第18节的主人公，伟大的数学家和物理学家开尔文，在庆祝他50周年教授生涯大会上谦虚地说：“有两个字最能代表我50年内在科学研究上的奋斗，就是‘失败’两字。”



1900年，当希尔伯特在巴黎第二届世界数学家大会上，激昂地陈述引领新世纪数学的23个问题，远隔万里的北京，正陷入了八国联军进犯的隆隆炮声之中。中国的思想家和改革者梁启超写下了他的《少年中国说》，“少年智则中国智……少年强则中国强”，对中国年青一代表达了情真意切的期望。知识改变命运，科技决定未来。从七巧板到水立方，给我们描述了一条数学研究的探索之路，也是实现中国梦的复兴之路。

当我完成这本书的时候，我的数学教学生涯也快50年了。从踏进大学选择数学专业开始，就和“她”不离不弃。我没有“下海”或“跳槽”的勇气，“长期从教、终身从教”。虽然，我没有经历过横财的喜悦，但却浅尝过“我找到了！”的快乐和园丁收获的喜悦。这本小册子，是我访问美国半年中的副产品，感谢广州市2013科普专项的资助，感谢西弗吉尼亚大学的H. J. Lai教授给我的热情接待。感谢我的学生尤利华教授和游志福博士为我的写作提供了多方面的帮助。也感谢相濡以沫的老伴莫慧女士，让我在写作期间，度过了一段“红袖添香夜读书”的生活。

作者

2013年9月10日



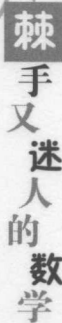
451		第三回五——回疑的种卧尔希	51
521		衣立木——衣疑的间空	81
441			81
521			81

目 录

总序

前言

1. 从七巧板谈起——从游戏到实用	1
2. 伽利略的回答——剖分等价	6
3. 要切多少块？——让数学说话	13
4. 为中国小姐遮风挡雨——罗德的花轿难题	17
5. 拼图的辉煌——勾股定理	25
6. 总统的证明——加菲尔德构图	32
7. 此时无声胜有声——不置一词的证明	38
8. 眼见不为实——成也“直观”，败也“直观”	44
9. 拆东墙，补西墙——用电脑演绎欧几里得	48
10. 完美正方形——基尔霍夫定律	58
11. 铺砌地板——从有限到无限	70
12. 进入动物世界——从凸到凹	83
13. 铺砌空间——富勒的灵感	92
14. 大小相等与组成相等——鲍耶埃-盖尔文定理	106
15. 曲线图形的组成相等——塔斯基猜想	112
16. 金饰商人的困惑——分球怪论	118



剖分和组合

从七巧板到水立方

X

1. 从七巧板谈起——从游戏到实用

我在“阿凡提巧拆金环”(见拙作《数学, 棘手但很迷人》^[1])中说到一个阿凡提的故事. 贪婪的巴依为了赖账, 与阿凡提打赌: 把一条 7 个环连成的金链, 只准许砍断 1 个环, 让阿凡提第一天取 1 个环, 第二天取 2 个环, 第三天取 3 个环……第七天取 7 个环. 聪明的阿凡提把金链的第 3 个环砍断, 7 个环的链就被分成 1 个、2 个、4 个环的小链. 阿凡提就用它们不同的组合 $1, 2, 3=1+2, 4, 5=1+4, 6=2+4, 7=1+2+4$ 打赢了这场赌.

无独有偶，在几何上，也有这样类似的“分拆”。

这是历史上的真事，而不是一个杜撰的故事。

宋朝有个叫黄伯思(1079—1118)的人,他是北宋晚期重要的文学家、书法家、理论家。他对几何图形很有研究,发明了一种用6张小桌子组成的“宴几”——请客吃饭的小桌子,可以根据吃饭人数的不同把桌子拼成不同的形状,比如3人拼成正三角形,4人拼成正四边形,6人拼成正六边形……这样用餐时亲密无间,气氛和谐。

我们没法查找黄伯思的“宴几”设计。但是，我们可以展示一种用5张小桌子组成的“宴几”——它同样有黄伯思“宴几”的组合效果(图1.1)。

如果说图 1.1 的“宴几”还不足以表现对称的效果,或者说,小桌只有拼凑的意义,而没有实用和美学的意义.那么,下面的设计就可以补全这些特点(图 1.2).

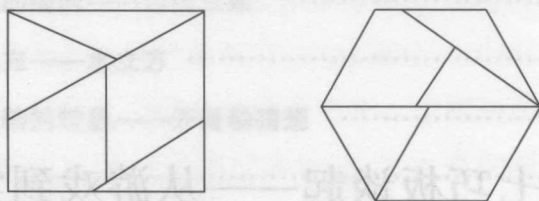


图 1.1 “宴几”的组合效果

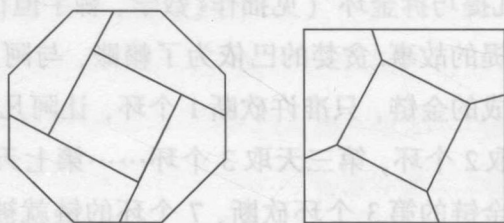


图 1.2 具有对称的效果的“宴几”

后来，有人把宴几缩小改变到只有七块板，用它拼图，演变成一种玩具。因为它十分巧妙好玩，人们叫它“七巧板”。

七巧板的完整图案为一正方形，由下面七块板组成：五块等腰直角三角形（两块小三角形、一块中三角形和两块大三角形）、一块正方形和一块平行四边形（图 1.3）。

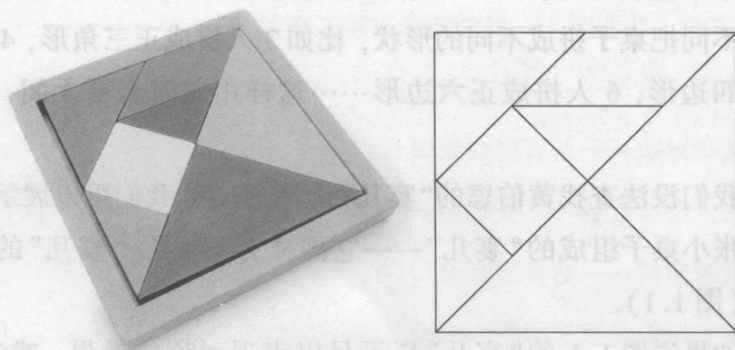


图 1.3 七巧板

“七巧板”是我国古代劳动人民的发明，其历史至少可以追溯到公元前1世纪，到了明代基本定型。明、清两代在民间广泛流传，清陆以湉《冷庐杂识》卷一中写道，“近又有七巧图其式五，其数七，其变化之式多至千余。体物肖形，随手变幻，盖游戏之具，足以排闷破寂，故世俗皆喜为之。”

到了明末清初，皇宫中的人经常用它来庆贺节日和娱乐，拼成各种吉祥图案和文字，故宫博物院至今还保存着当时的七巧板呢！

18世纪，七巧板传到国外，立刻引起极大的兴趣，有些外国人通宵达旦地玩它，并叫它“唐图”，意思是“来自中国的拼图”。19世纪七巧板成为最流行的谜题之一。它的流行大概是由于它结构简单、操作简便，但要拼出特定的图案，有时也会遇到真正的挑战，这正是七巧板的乐趣所在。著名的科学史专家李约瑟说它是“东方最古老的消遣品”之一，至今英国剑桥大学的图书馆里还珍藏着一部《七巧新谱》。美国作家埃德加·爱伦坡特竟用象牙精制了一副七巧板。据说，法国拿破仑在流放生活中，也曾用七巧板作为消遣游戏。

你可能没有想到：那简简单单的七块板，竟能拼出千变万化的图形。打开互联网百度的网页，那里就有七巧板小游戏全集(图1.4)。

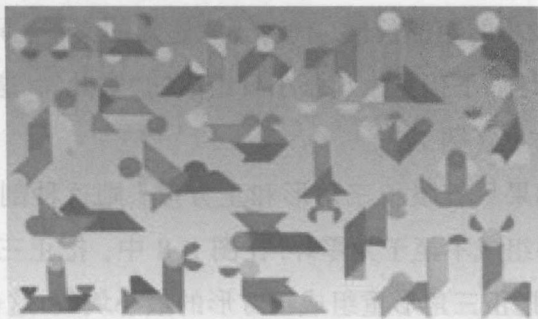


图1.4 七巧板的各种构图



上面,我们谈到由 5 张小桌组成的“宴几”,可以提供正三、四、六边形的桌子使用.如果要由一张正方形的桌子,重组出五边形的桌子,那就更复杂了.需要把正方形剖分为更无规则的 7 张小桌,然后精细地拼成一个正五边形(图 1.5).或者把正方形剖分的小桌减少为 6 张,拼成一个正五边形的大桌(图 1.6).

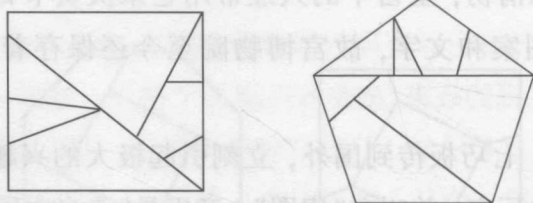


图 1.5 7 张小桌组成供 4 人和 5 人用的“宴几”

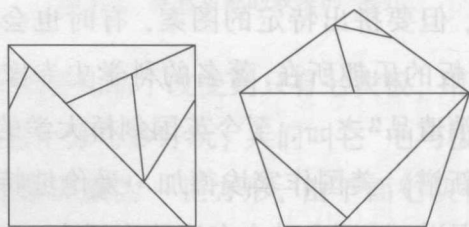


图 1.6 6 张小桌组成供 4 人和 5 人用的“宴几”

在图 1.1 的“宴几”中,美中不足的是,三角形的桌子太小了,如果希望三角形的桌子和正方形的桌子面积一样大,而且,用一张面积同样大小的矩形长桌,代替正六边形的桌子,同样可以供 6 人用.可以设计如下仍然由 5 张小桌组成的“宴几”.这应该是较为理想的设计方案(图 1.7).

当然,如果只着眼于三角形和正方形,则这种剖分可以减少一块,我们的组成不至于太零碎.在图 1.8 中,把正三角形剖分为 4 块,应该是把正三角形重组成正方形的最小块数.这也是 20 世纪初,英国趣味数学家杜登尼(H. E. Dudeney)在《迈尔日报》提出