普通高等教育"十二五"重点规划教材

国家工科数学教学基地 国家级精品课程使用教材

Nucleus 新核心

理工基础教材

高等数学

（下册）

第三版

上海交通大学数学系 组编

上海交通大學出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

普通高等教育“十二五”重点规划教材

国家工科数学教学基地 国家级精品课程使用教材

Nucleus

新核心

理工基础教材

高等数学

（下册）

第三版

上海交通大学数学系 组编

上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

内容提要

上海交通大学是全国工科数学教学基地，本教材专为少学时本科编写，分上、下两册. 上册(六章)包括：函数，极限与连续，导数与微分，中值定理与导数的应用，积分学，微分方程. 下册(四章)包括：向量代数与空间解析几何，多元函数微分学，多元函数积分学，无穷级数.

本书特点是结合实际，由浅入深，推理简明，便于自学；每章后附有适量的习题，书末附有习题答案.

本书可作高等院校的工业、农业、林业、医学、经济管理等专业及成人、高职教育各非数学专业的教材或教学参考书，也可供自学读者及有关科技工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下册/ 上海交通大学数学系组编. —3版. —上海：上海交通大学出版社，2013
ISBN 978-7-313-10443-4

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①上… Ⅲ. ①高等数学–高等学校–教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 305570 号

高等数学(下册)
(第三版)

组　　编：上海交通大学数学系
出版发行：上海交通大学出版社　　地　　址：上海市番禺路 951 号
邮政编码：200030　　电　　话：021-64071208
出 版 人：韩建民
印　　制：昆山市亭林印刷有限责任公司　　经　　销：全国新华书店
开　　本：787 mm×960 mm　1/16　　印　　张：11.5
字　　数：212 千字
版　　次：2002 年 1 月第 1 版　2013 年 12 月第 3 版　　印　　次：2013 年 12 月第 10 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-313-10443-4/O
定　　价：20.00 元

第三版前言

本教材是2001年第一版《高等数学》(上下册)的第三版,前两版《高等数学》(上下册)经过多年课堂教学实践,收到了不错的效果,也得到了广大读者的肯定.随着时间的推移、科技的进步,对教学和教材也提出了更高的要求.为了与时俱进,更好地适合教学的改革,提高教学的质量,我们对第二版《高等数学》(上下册)进行了修订.

由于教材的主要读者对象是高等院校非数学专业少学时类型及成人教育各专业,我们广泛听取了授课教师与上课学生的意见,在原教材基础上删除了一些要求较高的内容,对一些章节的次序也重新作了调整,特别在各章节增补了一些易于理解和难度适中的例题和习题,使学生在学习中更易循序渐进地理解、消化和掌握所学内容.

我们真诚地希望《高等数学》(上下册)的再版能给读者在学习上提供更好的帮助,也给高等数学教学适应时代发展带去裨益.

编　者

于上海交通大学

2013年8月

前　言

21世纪是科学技术迅速发展的时期，高等教育的教学改革也正朝着扩大办学规模、提高办学效益与质量的目标而不断深入．本教材是编者在结合多年课堂教学实践的基础上，根据学校教育发展多层次、多标准要求而编写的．

本教材在编写过程中尽量从实际问题引入数学概念．在叙述基本理论、基本概念时不失严密性，力求通俗易懂、由浅入深；在内容选取上，除保证必要的系统性外，尽量注意针对性与应用性，并注意加强处理实际问题的基本知识与基本方法；在例题与习题的配置上，紧密结合相关内容，难度适中，以利于读者对基本内容的理解、消化与吸收，并适量配置了部分经济管理方面应用的例题与习题．

本教材分为上、下两册．上册内容为一元函数微积分与微分方程；下册为多元函数微积分与无穷级数．上册约需90学时，下册约需54学时．由于各学科的需求不一，对本教材中加*号的内容可根据具体情况取舍．

本教材可作高等院校全日制非数学类各专业（工科类、经济管理类、农科类等）及成人教育各专业学生的教材或教学参考书；也可供自学读者和有关科技工作者参考．

本教材上册第1～2章由郑麒海副教授撰写，第3～4章由钱芝蓁副教授撰写，第5～6章由汪静副教授撰写．本教材下册第7～8章由郑麒海副教授撰写，第9章由汪静副教授撰写，第10章由钱芝蓁副教授撰写．孙薇荣教授仔细审阅了本教材全稿，提出了宝贵的意见并始终给予指导，在此，编者深表感谢．

限于编者的水平与经验，本教材存在的不当之处恳请读者指正．

编　者

2001年4月

目　　录

7　向量代数与空间解析几何

7.1　空间直角坐标系

7.1.1　空间直角坐标系的建立

在空间里选取一定点 O,过 O 点作三条互相垂直且有相同单位的数轴 Ox,Oy,Oz,就构成了**空间直角坐标系**.其中 O 点称为坐标原点,三个轴 Ox,Oy,Oz 称为坐标轴,每两个坐标轴所在的平面称为坐标平面,分别记作 xOy,yOz,zOx.

对于空间直角坐标系中三个坐标轴的方向,作如下规定:当右手四指沿 Ox 轴正向握向 Oy 轴正向时,自然伸出的大拇指指向应为 Oz 轴的正向,如图 7-1 所示.按以上确定三轴方向的方法称为右手法则.

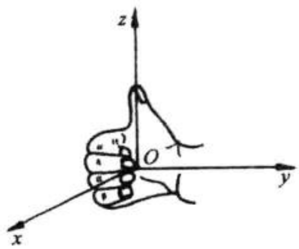

图 7-1

在图 7-2 中,设点 M 是空间任一点,过 M 点分别作 Ox 轴、Oy 轴和 Oz 轴的垂直平面,所作的三个平面与 Ox,Oy,Oz 轴的交点为 A,B,C.又设点 A,B,C 在三个轴上的坐标分别是 x,y,z,于是空间的一点 M 就对应于唯一一组有序实数 x,y,z.

反过来,设 x,y,z 是任意一组有序实数,这三个数在 Ox,Oy,Oz 轴上确定了三个点 A,B,C.过这三个点分别作 Ox,Oy,Oz 轴的垂直平面,这三个平面相交于一点,这样有序实数 x,y,z 就对应于空间这一点.

由此可见,在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中,空间的点和有序实数组(x,y,z)之间有着一一对应的关系.因此在空间直角坐标系中,可以用一组有序实数(x,y,z)来确定空间一点 M 的位置.这组有序实数叫做空间点 M 的坐标,记作 $M(x,y,z)$,其中 x 叫做横坐标,y 叫做纵坐标,z 叫做竖坐标.

三个坐标平面把空间划分为八个部分,每一个部分叫做一个卦限,规定它们的顺序如图 7-3 所示.各个卦限里点的坐标(x,y,z)的正负符号可列成下表.

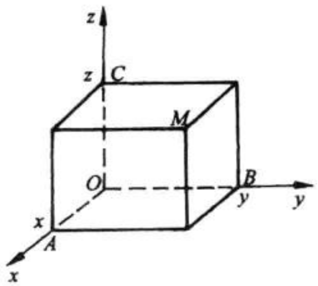

图 7-2

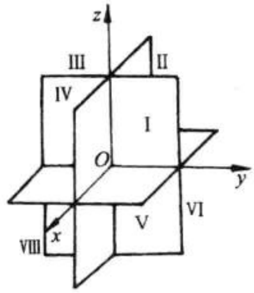

图 7-3

坐标 \ 卦限	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ	Ⅶ	Ⅷ
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

空间点 $M(x,y,z)$ 关于 xOy, yOz, zOx 平面的对称点分别为 $M_1(x,y,-z)$, $M_2(-x,y,z)$ 和 $M_3(x,-y,z)$，点 $M(x,y,z)$ 关于坐标原点的对称点为 $M_0(-x,-y,-z)$.

7.1.2 两点的距离

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间的两点，试将这两点之间的距离 $|M_1M_2|$ 用它们的坐标表示出来. 为此，过 M_1 点作三个坐标轴的垂直平面，再过 M_2 点作三个坐标轴的垂直平面，这六个平面围成一长方体，而 M_1M_2 就是这长方体的一条对角线(见图 7-4). 长方体的三条边分别等于 $|x_2-x_1|$, $|y_2-y_1|$, $|z_2-z_1|$，由勾股定理可知

$$|M_1M_2|^2=|M_1Q|^2+|QM_2|^2,$$

而

$$|M_1Q|^2=|M_1P|^2+|PQ|^2,$$

于是

$$|M_1M_2|^2=|M_1P|^2+|PQ|^2+|QM_2|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2,$$

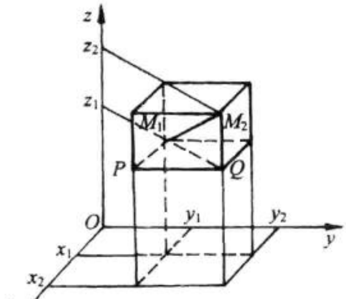

图 7-4

从而

$$|M_1M_2| = d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{7-1}$$

例 7.1　证明以 $A(4,3,1)$,$B(7,1,2)$,$C(5,2,3)$为顶点的$\triangle ABC$是一等腰三角形.

证　由式(7-1)得

$$|AB|^2=(7-4)^2+(1-3)^2+(2-1)^2=14,$$
$$|BC|^2=(5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2=6,$$
$$|AC|^2=(5-4)^2+(2-3)^2+(3-1)^2=6.$$

由于$|BC|=|AC|=\sqrt{6}$,所以$\triangle ABC$为等腰三角形.

例 7.2　求到点 $A(2,-1,3)$与到点 $B(4,1,-2)$距离相等的点的轨迹方程.

解　设动点为 $M(x,y,z)$,

由$|MA|=|MB|$　即

$$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=(x-4)^2+(y-1)^2+(z+2)^2$$

化简得

$$4x+4y-10z=7,$$

故所求轨迹方程为一个平面.

7.2　空间向量及其运算

7.2.1　空间向量的概念

在实际问题中,有一种量只有大小而没有方向,如时间、长度、质量等,它们在取定一个单位后,可以用一个数来表示,这种量叫做数量. 另外还有一种量,例如力、位移、速度等,它们都是既有大小,又有方向的量.

既有大小又有方向的量称为**向量**(或**矢量**).

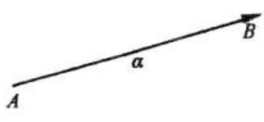

图 7-5

向量的两个特征是大小和方向. 为了说明这两个特征,可以用有向线段来表示一个向量. 图 7-5 中线段 AB 的长度表示向量的大小,由起点 A 到终点 B 的指向表示向量的方向,记作$\overrightarrow{AB}$或$\boldsymbol{\alpha}$.

向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的长度,叫做向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的**模**,记作$|\boldsymbol{\alpha}|$. 模为 0 的向量称为**零向量**,记作 $\mathbf{0}$;零向量是唯一不确定方向的向量,或者说它的方向是任意的.

对于向量,我们只考虑其大小与方向. 若向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的模相等且平行,又有相同的指向,我们称 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 相等,记作$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$. 一个向量在保持长度和方向的条件下可以自由平移,这样的向量称为**自由向量**.

7.2.2 向量的加减法和数乘

1）向量的加法

（1）平行四边形法则.

将向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的起点重合，则以 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的对角线为向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的和，记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，如图 7-6 所示.

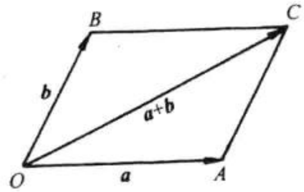

图 7-6

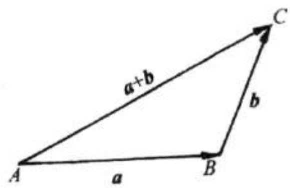

图 7-7

（2）三角形法则.

将向量 $\boldsymbol{b}$ 的起点放在向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点，则由 $\boldsymbol{a}$ 的起点指向 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，如图 7-7 所示.

利用三角形法则，可推广到多个向量的加法的情形. 如 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4\cdots+\boldsymbol{a}_n$，可先画出第一个向量，然后依次把下一个向量的起点放在前一个向量的终点上，则第一个向量的起点到最后一个向量的终点的有向线段就是这些向量的和. 该求和法叫做向量加法的**多边形法则**，如图 7-8 所示.

向量加法有下列运算性质：

（1）交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

（2）结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$（见图 7-9）.

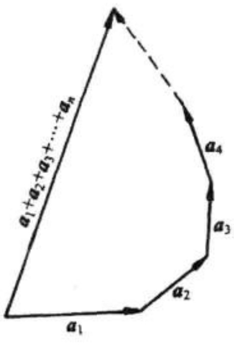

图 7-8

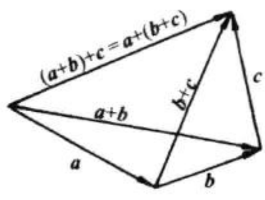

图 7-9

2）向量的减法

若一个向量与向量 $\boldsymbol{a}$ 有相同的模，且方向相反，称该向量为向量 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记作 $-\boldsymbol{a}$. 向量 $\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的负向量 $(-\boldsymbol{a})$ 之和叫做向量 $\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的差，记作 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$.

由于 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{b}$. 根据加法的三角形法则，若将 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点放在一起，则从减向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点出发指向被减向量 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量就是 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，如图 7-10 所示.

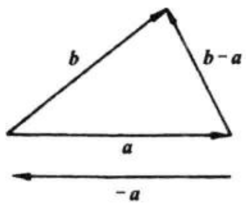

图 7-10

3）向量的数乘

实数 λ 和向量 $\boldsymbol{a}$ 的积（简称数乘）是一个向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$. 其模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\,|\boldsymbol{a}|$；$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向：当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 同向，当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 反向.

模为 1 的向量称为**单位向量**. 与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量称为 **$\boldsymbol{a}$ 的单位向量**，记作 $\boldsymbol{a}^0$. 由于 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cdot\boldsymbol{a}^0$，所以 $\boldsymbol{a}^0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$.

向量的数乘有下列运算性质：

（1）结合律　　$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.

（2）分配律　　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$,

$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

7.2.3 向量的坐标表示

1）向量在轴上的投影

已知空间一点 A，通过 A 点引 u 轴的垂直平面 π，那么平面 π 与 u 轴的交点 A' 叫做点 A 在 u 轴上的投影.

设 $\overrightarrow{AB}$ 是空间任一已知向量（见图 7-11），A'，B' 分别是 $\overrightarrow{AB}$ 的起点 A 与终点 B 在 u 轴上的投影，那么有向线段 $A'B'$ 的值就叫做 $\overrightarrow{AB}$ 在 u 轴上的投影，用 $(\overrightarrow{AB})_u$ 来表示，即

$$(\overrightarrow{AB})_u=A'B'.$$

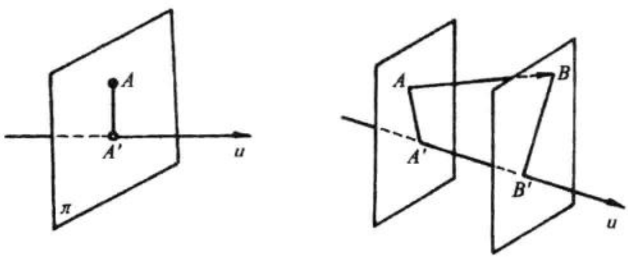

图 7-11

为了求$\overrightarrow{AB}$在u轴上的投影，先说明$\overrightarrow{AB}$与u轴的交角概念.在空间任取一点S，过S作两条射线分别与$\overrightarrow{AB}$及u轴平行，这两条射线的交角叫做$\overrightarrow{AB}$与u轴的交角，记为$(\widehat{\overrightarrow{AB},u})$(或记为$\varphi$).

定理 7.1　向量$\overrightarrow{AB}$在任一轴u上的投影等于其模乘以它与u轴交角的余弦，即

$$(\overrightarrow{AB})_u=|\overrightarrow{AB}|\cos(\widehat{\overrightarrow{AB},u}).$$

证　过$\overrightarrow{AB}$的起点A作v轴平行于u轴(见图 7-12)，且同方向，则$(\widehat{\overrightarrow{AB},v})=(\widehat{\overrightarrow{AB},u})$.

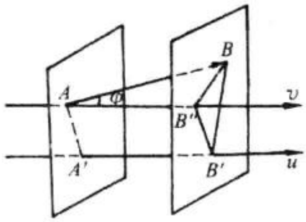

图 7-12

过A,B分别作平面与v轴垂直(此时也垂直于u轴)，显然有

$$(\overrightarrow{AB})_u=(\overrightarrow{AB})_v,$$

而

$$(\overrightarrow{AB})_v=AB''=|\overrightarrow{AB}|\cos(\widehat{\overrightarrow{AB},v}),$$

所以

$$(\overrightarrow{AB})_u=|\overrightarrow{AB}|\cos(\widehat{\overrightarrow{AB},u}).$$

推论 1　两个相等的向量在同一轴上的投影相等；反之未必成立.

定理 7.2　n个向量的和在一轴上的投影等于各向量在同一轴上投影之和，即

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\cdots+\boldsymbol{d})_u=(\boldsymbol{a})_u+(\boldsymbol{b})_u+(\boldsymbol{c})_u+\cdots+(\boldsymbol{d})_u.$$

示意图如图 7-13 所示.

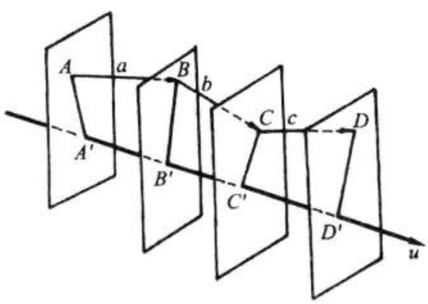

图 7-13

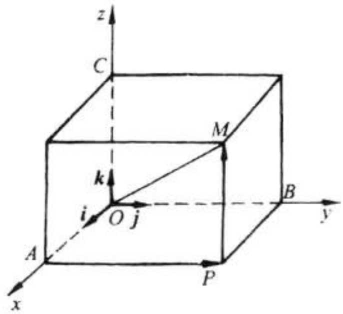

图 7-14

如图 7-14 所示，设$M(x,y,z)$是空间直角坐标系$Oxyz$中的一点，其在Ox轴，Oy轴，Oz轴上的投影点为A,B,C；在xOy平面上的投影点为P. $OA=x$，

$OB=y$ 和 $OC=z$ 分别是向径$\overrightarrow{OM}$(起点在坐标原点的向量)在 Ox 轴、Oy 轴和 Oz 轴上的投影. 若取 Ox 轴、Oy 轴和 Oz 轴正方向的单位向量为 $\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{j}$,$\boldsymbol{k}$. 由向量的加法法则有

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM}&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\\&=OA\boldsymbol{i}+OB\boldsymbol{j}+OC\boldsymbol{k}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

称 x,y,z 为向径$\overrightarrow{OM}$的坐标,同时向径可表示为

$$\overrightarrow{OM}=\{x,y,z\}.$$

一般地,若向量 $\boldsymbol{a}$ 在 Ox 轴、Oy 轴和 Oz 轴正方向的投影为 a_x,a_y,a_z,称 $\{a_x,a_y,a_z\}$为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标.

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}=\{a_x,a_y,a_z\}.$$

例 7.3 设 $A(1,1,1)$,$B(2,3,4)$,求向量$\overrightarrow{AB}$的坐标(见图 7-15).

解 分别过 A,B 点作垂直于 Ox 轴的平面交 Ox 轴于 A',B'. 则向量$\overrightarrow{AB}$在 Ox 轴方向上的投影

$$a_x=A'B'=OB'-OA'=2-1=1.$$

同理 $\overrightarrow{AB}$在 Oy 轴、Oz 轴上的投影分别为

$$a_y=3-1=2,\quad a_z=4-1=3.$$

所以向量$\overrightarrow{AB}$的坐标为$\{1,2,3\}$.

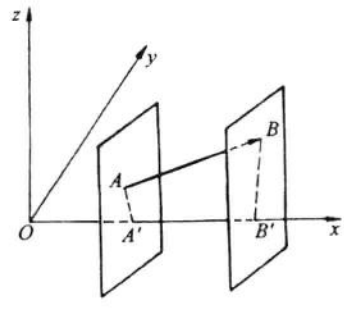

图 7-15

由例 7.3 可知,以 $M(x_1,y_1,z_1)$为起点,$P(x_2,y_2,z_2)$为终点的向量$\overrightarrow{MP}$的坐标为$\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$.

引进向量坐标之后,可将向量的运算归结为向量坐标之间的运算.

设 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$,$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$,

则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})+(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k}\\&=\{a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z\}.\end{aligned}$$

同样 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\{a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z\}$.

而

$$\begin{aligned}\lambda\boldsymbol{a}&=\lambda(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\\&=(\lambda a_x)\boldsymbol{i}+(\lambda a_y)\boldsymbol{j}+(\lambda a_z)\boldsymbol{k}\\&=\{\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z\}.\end{aligned}$$

例 7.4 设点 M_1 和 M_2 的坐标分别为(x_1,y_1,z_1)和(x_2,y_2,z_2),使 M 点分割线段 M_1M_2 为两段 M_1M 和 MM_2,且满足 $M_1M:MM_2=\lambda(\lambda\neq-1)$.

解 设 M 点的坐标为 (x,y,z)，按题意向量 $\overrightarrow{M_1M}$ 与 $\overrightarrow{MM_2}$ 同方向，且长度之比为 λ，即

$$\overrightarrow{M_1M}=\lambda\overrightarrow{MM_2}.$$

将

$$\overrightarrow{M_1M}=\{x-x_1,y-y_1,z-z_1\}$$

和

$$\overrightarrow{MM_2}=\{x_2-x,y_2-y,z_2-z\}$$

代入上式，得

$$\{x-x_1,y-y_1,z-z_1\}=\{\lambda(x_2-x),\lambda(y_2-y),\lambda(z_2-z)\},$$

$$x-x_1=\lambda(x_2-x),$$

解得

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}.$$

同样可得

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

这是一组定比分点公式，特别当 $\lambda=1$ 时，$x=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$，$y=\frac{1}{2}(y_1+y_2)$，$z=\frac{1}{2}(z_1+z_2)$ 为线段 M_1M_2 的中点坐标.

2）向量的模

设点 M 和 P 的坐标分别为 (x_1,y_1,z_1) 和 (x_2,y_2,z_2)，由两点的距离公式可知向量 $\overrightarrow{MP}$ 的模

$$|\overrightarrow{MP}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

其中 x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1 恰是向量 $\overrightarrow{MP}$ 的坐标. 一般地，若向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标为 a_x，a_y，a_z，则向量 $\boldsymbol{a}$ 的模

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}.$$

3）向量的方向角与方向余弦

向量 $\boldsymbol{a}$ 与 Ox 轴、Oy 轴和 Oz 轴正方向的交角 $(\widehat{\boldsymbol{a},Ox})=\alpha$，$(\widehat{\boldsymbol{a},Oy})=\beta$，$(\widehat{\boldsymbol{a},Oz})=\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向角**；$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向余弦**.

设 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，由定理 7.1 可知

$$a_x=|\boldsymbol{a}|\cdot\cos\alpha,\qquad a_y=|\boldsymbol{a}|\cdot\cos\beta,\qquad a_z=|\boldsymbol{a}|\cdot\cos\gamma.$$

从而得

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$