普通高等教育“十二五”规划教材

大学数学全程解决方案系列

数学建模

（第二版）

陈东彦 刘凤秋 牛犇 编著

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材
大学数学全程解决方案系列

数学建模

（第二版）

陈东彦　刘凤秋　牛　犇　编著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是高等学校数学建模课程教材，共分 8 章：数学建模概述、初等模型、微分方程模型、概率与随机模型、统计分析模型、数学规划模型、图与网络模型、其他模型. 本书以解决实际问题为切入点，着重介绍数学模型的建立与求解方法，以及利用模型结果解决实际问题的基本过程. 各章后附有一定量的思考题供学生思考和练习.

本书可作为普通高等学校各理工科专业本科生和研究生的教材，可根据课程学时及学生构成情况选择不同内容讲授.

图书在版编目(CIP)数据

数学建模/陈东彦，刘凤秋，牛犇编著. —2 版. —北京：科学出版社，2013
（普通高等教育"十二五"规划教材・大学数学全程解决方案系列）

ISBN 978-7-03-038305-1

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①陈…②刘…③牛… Ⅲ. ①数学模型-高等学校-教材
Ⅳ. ①O141. 4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 184669 号

责任编辑：李鹏奇 王 静/责任校对：包志虹
责任印制：阎 磊/封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
北京市文林印务有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2007 年 12 月第 一 版 开本：720×1000 B5
2014 年 1 月第 二 版 印张：14
2014 年 1 月第七次印刷 字数：280 000

定价：29.00 元

“大学数学全程解决方案系列”序

目前，高等数学、线性代数、概率论与数理统计等大学数学类公共课的教材版本比较多，其中不乏一些优秀教材，它们在教育部统一的教学规范、教学设计、教学安排等框架内，为全国高等院校师生的教学和学习提供了方方面面的服务. 但从另一方面来说，不同区域的高校在师资力量、教学习惯、教学环境、学生来源、学生层次、学生求学目的等方面都存在着不小的差异，由此造成对教材的需求也存在着一些差异. 在遵照执行教育部对大学数学类公共课教学的统一要求的前提下，我想，这些差异主要来自于对这些统一要求的具体实施和尝试.

为了更好地提高教学效果，充分挖掘区域内的教学资源，增加区域内教师的交流与互动，优化创新和谐的教研氛围，培育更加适应本地区高校的优秀教材，科学出版社在广泛调研的基础上，组织了黑龙江地区高校最优秀、最有经验的教师，拟编写一套集主教材、教辅、课件为一体的立体化教材，并努力争取进入国家级优秀教材的行列. 为此科学出版社、哈尔滨工业大学数学系联合于 2006 年 5 月 27 日在哈尔滨工业大学召开了“大学数学全程解决方案系列”规划教材会议. 在这次会议上，大家推荐我作为这套丛书的编委会主任，盛情难却，我想，若能和大家共同努力，团结协作，认真领会教育部的有关精神，凭借科学出版社的优秀品牌，做出一套大学数学类的优秀教材，也的确是一件有意义的事情.

为此，我们编委会成员就这套教材作了几次讨论和交流，希望在以下方面有所突破：

在教学内容上，有较大创新，紧跟时代步伐，从知识点讲述，到例题、习题，都要体现时代的特色.

在教学方法上，充分体现各学校的优秀教学成果，集中黑龙江地区优秀的教学资源，力求代表最好的教学水平.

在教学手段上，充分发挥先进的教学理念，运用先进的教学工具，开发立体化的教学产品.

在教材设计上，节约课时，事半功倍（比如在教材上给学生预留较大的自主空间，让有进一步学习愿望的学生能够自主学习；开发的课件让老师节约课时，精心设计的练习册，让老师节约更多的检查作业的时间）.

在教学效果上，满足对高等数学有不同要求的教师、学生，让教师好用，让学生适用.

如今，这套丛书终于要面世了，今年秋季有《微积分（经管类）》、《线性代数（经

管类)》、《线性代数(理工类多学时)》、《线性代数(理工类少学时)》、《概率论与数理统计》、《数学建模》等教材陆续出版.但我想,尽管我们的初衷是美好的,教材中必定还会存在这样那样的问题,敬请各位读者、专家批评指正.

感谢哈尔滨工程大学、哈尔滨理工大学、黑龙江大学、哈尔滨师范大学、哈尔滨商业大学、黑龙江工程学院、黑龙江科技学院、哈尔滨医科大学、齐齐哈尔大学、佳木斯大学、绥化学院、黑龙江农垦职业学院、黑龙江建筑职业技术学院、黑龙江农业工程职业学院等兄弟院校领导的支持,科学出版社高等教育出版中心,哈尔滨工业大学理学院、数学系的领导与老师为这套丛书的出版也付出了努力,在此一并致谢.

王　勇

2007年7月于哈尔滨工业大学

第二版前言

近年来，数学建模方法在各领域中的应用越来越广泛，通过数学建模解决实际问题正在逐渐地成为人们的一种行为习惯. 从日常生活、生产实践到社会管理，数学量化的思想和手段都得到了较多的体现，或简单，或复杂，数学建模的方法及其解决的实际问题都在不断地发展. 从初等数学方法到现代数学理论，从传统的数学应用领域到现代经济、生态及信息等社会领域，数学建模方法也越来越多元化，数学建模所面临的实际问题越来越丰富、越来越复杂. 数学建模之所以能发挥重要作用，关键在于数学建模的本质特征：既来源于实践又应用于实践，它利用数学的理论方法对实际问题进行描述、分析、解释和模拟.

随着数学建模的发展，高校数学建模课程的教学内容与教学方法也在不断地调整与改进，近年来出版的数学建模教材充分体现了这样的变化. 为了更好地适应教学需要，我们对教材进行了修订. 在教材指导思想、重点难点选择及内容讲述方法等方面上进行了较大的调整，以期能更好地体现问题背景、模型方法和建模过程. 第 1 章介绍数学建模的基本概念、简单实例、相关问题；第 2 章至第 6 章围绕大学数学相关课程的基础知识讲述初等模型、微分方程模型、概率与随机模型、统计分析模型和数学规划模型，以实际问题为切入，以模型方法为区分，以解决问题为目标，系统地讲述数学建模的全过程；第 7 章、第 8 章围绕常用的现代数学方法讲述图与网络模型、层次分析模型、模糊数学模型、灰色系统模型和交通流模型，以相关数学方法介绍为基础，通过实例讲述应用数学方法解决问题的过程. 书中每一章后附有一定量的思考题以供读者思考与练习. 本书在编排上按照数学模型所涉及的数学方法进行分类，围绕大学数学基础知识及常用现代数学方法逐步展开，在数学模型引入时以实际问题为驱动、在建模过程讲解时以思想方法为主线，注重数学建模的理论性和实践性相结合的特点，由浅入深，适合数学建模课堂教学和竞赛培训使用.

“大学数学全程解决方案系列”编委会对本书的修订与再版给予了大力支持，责任编辑王静对本书在结构及文字处理等方面提出了很多好的建议，这对本书的顺利出版和质量提高都大有裨益，在此一并表示感谢.

由于水平所限，书中的错误及疏漏之处在所难免，望专家和读者予以批评指正.

作　者

2013 年 6 月

第一版前言

从 20 世纪 80 年代初开始，数学建模课程已经逐渐进入我国大学课堂. 现已有数百所院校开设了形式多样的数学建模类课程，20 多年来数十本教材也已出版. 1992 年开始举办并迅速发展的全国大学生数学建模竞赛，更是极大地推动了数学建模教学及其课外活动在各个院校的开展. 作为培养大学生创新能力最有效的手段之一，与数学建模相关的教学活动已被教学管理部门、学校、学生及社会多方广泛承认. 参加数学建模竞赛并取得好成绩也已成为一些学生求学、求职成功的重要经历.

教育教学工作必须反映社会发展、适应社会需要. 在我国高等教育逐步大众化的新形势下，基础课教学活动必须适应受教育对象的培养定位，融入其整体育人的大目标. 从我们国家的教育现状看，可以认为，重点院校仍然承担着精英教育的任务，普通院校则已经变成了大众教育的主战场. 教学组织形式相对松散的数学建模教学活动已成为普通院校中培养学生应用创新能力的主要手段之一. 新形势下，普通院校的教学工作面临着诸多新问题，大力开展具有针对性的教学活动十分必要. 为此，我们在总结多年从事数学建模教学与指导数学建模竞赛经验的基础上，顾及大众教育阶段普通院校教学的新情况，编写了这本《数学建模》教材，旨在通过本教材，使学生了解如何应用数学的最基础的思想和方法解决一些实际问题，重在介绍数学建模方法及数学模型的建立过程，不在模型求解环节上展开.

本教材的第 1 章概述了数学建模；第 2～6 章主要讲解初等方法、微分方程方法、差分方程方法、概率方法和数学规划方法等与大学工科教学课程密切相关的数学建模方法；第 7～11 章主要讲解微分方程稳定性方法、层次分析方法、统计分析方法、回归分析方法以及图与网络方法等需要一些专门知识的数学建模方法；第 12～16 章主要讲解交通流方法、排队论方法、模糊数学方法、灰色系统方法和模拟方法等近年发展起来的数学建模方法. 本书在第 2～11 章各章配有相应的数学建模案例，大多选自历年国内外数学建模竞赛试题，以帮助学生深入学习有关建模方法在解决实际问题中的综合运用过程. 此外，全书各章均配有一定量的习题，对学生基本概念和基本方法的掌握及思维的启发很有帮助. 凡具有大学工科数学基础知识及以上者均可使用本教材.

“大学数学全程解决方案系列”编委会对本书的出版给予了大力支持，特别感谢清华大学谢金星教授审阅了全部书稿，并提出了许多宝贵意见. 这些对本书的顺利出版和质量的提高都大有裨益. 本书在编写过程中还得到了哈尔滨理工大学教

务处及应用数学系的多方鼓励与帮助，应用数学系主任计东海教授为本书的编写和出版提供了很多具体的指导，应用数学系青年教师刘凤秋协助编者校对了全部书稿，在此一并表示衷心的感谢.

作　者

2006 年 11 月

目　　录

第 1 章　数学建模概述

随着科学技术对所研究客观对象的日益精确化、定量化和数学化，以及电子计算机技术的普及和相应数学软件的开发使用，“数学模型”已成为处理科技领域中各种实际问题的重要工具，并在自然科学、工程技术与社会科学的各个领域中得到了广泛的应用，诸如经济、管理、工农业，甚至社会学领域等. 什么是数学模型，如何建立数学模型解决实际问题，这是现代科技工作者感兴趣的问题.

1.1　数学模型与数学建模

从初等数学到高等数学，从基础数学到应用数学、计算数学、统计数学，数学作为一门自然科学学科为我们所熟悉和了解，数学尤其是现代数学中的许多理论分支给人以抽象的印象，似乎数学研究得越深入，离现实生活及实际工作就越遥远. 但是，近半个世纪以来，数学的形象发生了重大的变化，数学已不仅仅是数学家、物理学家的专利，除了传统的物理学、天文学、力学等学科与数学密不可分外，在工程技术、社会生活、信息技术等诸多领域，数学发挥着越来越重要的作用，各种途径表明数学正在逐步地应用于各个领域.

在数学应用于各个领域的过程中，数学已经由一门自然科学学科发展成为一门数学技术，在控制科学、信息科学、计算机科学、管理科学等学科中，数学技术的应用必不可少. 同时，一些新的数学分支不断涌现，比如，生物数学、经济数学、金融数学、数理医药学等，又促使数学的应用更深入和广泛.

纵观数学在各个领域的应用过程，我们不难发现数学的应用主要在于应用数学的思维、方法和成果去解决相关领域中的实际问题，数学的应用过程就是构建数学模型并通过求解数学模型解决实际问题，也就是数学建模的过程，在这一过程中发明了新思想、新知识、新规律，创造了新理论、新方法、新成果.

1.1.1　数学模型

数学是研究数量关系的科学，应用数学知识解决实际问题主要就是研究实际问题中的数量关系，这种数量关系即是“数学模型”. 例如，牛顿第二定律描述了力的瞬时作用规律，揭示了物体在力的作用下的运动加速度 a 与物体质量 m 及所受力 F 之间的数量关系，用公式表示为 $F=ma$. 可见，数学模型就是实际问题的一种抽象模拟，它用数学符号、数学公式等描述现实对象中的数量关系. 这一数量关系

的给出需要明确研究的某个特定对象和研究的目的,抓住其内在规律,并做出一些必要的简化假设,再运用数学手段进行描述. 也就是说,数学模型是通过抽象、简化的过程,用数学语言对实际对象的一个近似的刻画,以便于人们更深刻地认识所研究的对象.

数学模型在我们身边随处可见,比如,物理学中的"万有引力定律"、"能量转换定律"等都是经典的数学模型,日常生活中的"购买包装产品时选择大小包装问题"、"传染病如何预防问题"及"十字路口如何设置交通信号灯问题"等也都包含着数学模型. 那么,数学模型是如何建立起来的? 它怎样在解决实际问题中发挥作用? 数学建模将给出完美的回答.

1.1.2　数学建模的方法与步骤

什么是数学建模? 简单地说,数学建模是指应用数学的方法解决某一实际问题的全过程,这一过程往往包括:对实际问题的了解、分析和判断,解决问题所需数学方法的选择,对问题的数学描述,数学模型的建立,数学模型的求解和计算,数学模型结果在实际问题中的验证,将合理的数学结果应用于实际问题并给实际问题一个合理的解决方案.

在很多实际问题中各个量之间的关系非常复杂,很难用数量关系将它们联系起来,有时即使找到了数量关系又会由于其太复杂而不能用现有的数学方法进行处理,或者量与量之间就没有明显的数量关系,不能用现有的数学理论、数学公式去套用. 因此,数学在其他领域中的成功应用不仅需要掌握大量的数学知识,还需要对实际问题有充分的了解,并能从众多的事物和复杂的现象中找到共同的本质的东西,然后通过大量的定性和定量分析,去寻找并发现量与量之间的数量关系,再利用数学的理论与方法加以解决,并最后应用于实际问题.

数学建模有哪些方法可以遵循? 数学建模面临的问题是多种多样的,问题中所给出的已知信息也是各不相同,有的是一组实测数据或模拟数据,有的是对问题的定性描述,不同的信息将用不同的方法去处理,从而得到不同的模型. 即使面对相同的已知信息,由于建模的目的不同、分析的方法不同、采用的数学工具不同,所以得到的模型也不同. 尽管如此,人们在数学建模过程中总结出了一些基本的方法,**数学建模的方法大致有两类.**

1）机理分析方法. 根据对客观事物特性的认识,分析其因果关系,通过推理分析找出反映事物内部机理的数量规律,这种建立数学模型的方法称为机理分析方法. 用机理分析方法建立的模型常常有明确的物理或现实意义,如"牛顿第二定律"建立过程中使用的即是机理分析方法.

2）测试分析方法. 由于对客观事物的特性不能准确认识,看不清其内部机理,而只能通过实际观测获得一定量的观测数据,通过观测数据的分析和处理,按照一

定的准则在某一类模型中找出与观测数据吻合得最好的模型,这种建立数学模型的方法称为测试分析方法.用测试分析方法建立的模型一般并没有明确的物理意义,如“天气预报模型”建立过程中使用的即是测试分析方法.

在这两类建模方法中又可根据所应用的数学方法的不同而分为许多具体的方法,如机理分析方法中有微分方程方法、最优化方法等,测试分析方法中有回归分析方法、主成分分析方法等.而且在实际建模中往往是两类方法的综合运用,即先用机理分析方法确定数学模型的结构,再用测试分析的方法确定模型中的参数,如“人口预测模型”.

建立数学模型解决实际问题有哪些步骤可循?人们在数学建模过程中总结出了**数学建模的基本步骤**.

1)问题分析.了解实际问题的背景(属于哪一个领域),明确数学建模的目的(解决什么问题),收集数学建模的必要信息(相关数据和参考资料),分析研究对象的主要特征(内在机理或外部观测数据),从而对实际问题有一个比较清晰的了解.

2)模型假设.根据所研究对象的特征及建模目的,抓住主要因素忽略次要因素,对问题做出合理的简化的假设,假设既要基本符合实际情况又要适当简化,以使问题能够用数学的语言进行描述.能否做出合理的简化的假设,取决于对问题的了解是否准确、深入,取决于是否具有直观判断力、丰富想象力,以及是否具有足够的知识准备.

3)模型建立.根据所做假设,用数学的语言、符号描述出研究对象的内在规律,并建立包含常量、变量等的数学模型,模型可以是函数表达公式、代数或微分方程、算法或图形等.建立模型的原则是要尽量用简单的数学工具.

4)模型求解.采用适当求解方法对所建立的数学模型进行求解,可能是求函数的极值、求代数方程的根或微分方程的解、编写算法程序或绘制有关图形等.此时可以应用各种计算工具,特别是数学软件和计算机技术.

5)模型分析.对模型求解结果进行数学上的分析,如结果的误差分析(误差是否在允许的范围内)、统计分析(结果是否符合特定的统计规律)、模型结果对参数的灵敏度分析(模型的结果是否会因参数的微小改变而发生大的变化)、对假设的鲁棒性分析(模型的结果是否对某一假设非常依赖)等.

6)模型检验.将求解结果和分析结果解释回实际问题之中,与实际现象、实际数据进行比较,检验是否与实际相吻合.如果吻合较好,则模型及其结果可以应用于实际问题;如果吻合不好,则需对模型进行修正.此时问题常常出现在模型假设上,所以应对模型假设进行修正或补充,然后重新建模、求解、检验.

7)模型应用.当模型经过检验已成为一个具有合理性和实用性的模型后,即可以应用其解决实际问题了.

数学模型的建立过程告诉我们,数学模型是对客观对象归纳抽象的产物,数学

建模的过程就是“实践—理论—实践”的过程. 因此,数学建模需要熟练的数学技巧、丰富的想象力和敏锐的洞察力,需要大量阅读、思考别人所做的模型,尤其需要自己动手、亲身体验.

数学建模的方法多种多样,数学模型也千差万别,可以从很多不同的角度对数学模型予以划分,以便学习和使用. 按模型的应用领域划分,有人口模型、交通模型、环境模型、资源模型等;按模型的建立方法划分,有初等模型、微分方程模型、概率模型、数学规划模型、网络模型、模糊模型、灰色模型等;按模型中变量特点划分,有随机模型和确定模型、连续模型和离散模型、线性模型和非线性模型、静态模型和动态模型等;按建模目的划分,有描述模型、预测模型、优化模型、决策模型等. 为了学习和使用方便,数学建模教材中常按模型的建立方法进行划分,并遵循由浅入深、从简单到复杂的原则.

1.2　数学建模示例

1.2.1　椅子如何放稳

年长一些的人很多都有过这样的经历:教室里的地面凸凹不平,椅子(或凳子)经常放不稳,但是挪动几下可能就放稳了. 这里有什么奥秘吗?

问题　在一块凸凹不平的地面上,能使椅子放稳吗?

这个看似与数学无关的问题通过建立数学模型可以给出明确的回答.

模型假设　1)椅子的四条腿一样长,且四脚连线为正方形;

2) 地面高度连续变化,沿任何方向都不会出现间断(没有台阶那样的情况);

3) 相对于椅脚的间距和椅腿的长度而言,地面是相对平坦的,使椅子在地面上的任何位置都有三只脚同时着地.

假设 1)显然是合理的;假设 2)和 3)实际上给出了椅子能放稳的必要条件,因为在有台阶的地方是无法使椅子放稳的,而当地面上出现深沟或凸峰时,都可能使三只脚都无法同时着地.

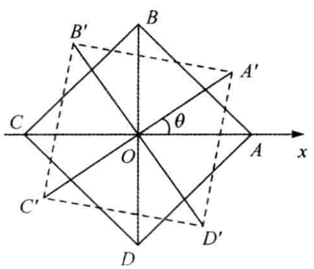

图 1.1　变量 θ 表示椅子的位置

模型建立与求解　用数学语言把椅子四脚同时着地的条件和结论描述出来.

首先,用变量表示椅子的位置. 由于椅脚连线为正方形,以正方形中心为对称点,正方形绕中心的旋转正好代表了椅子位置的改变,因此可用旋转角度变量表示椅子的位置,如图 1.1 所示.

在图 1.1 中,椅脚连线为正方形 $ABCD$,初始位置对角线 AC 与 x 轴重合,当椅子绕中心

O 逆时针旋转角度 θ 后，正方形 $ABCD$ 转至 $A'B'C'D'$ 的位置，所以可用对角线 $A'C'$ 与 x 轴的夹角 θ 表示椅子的当前位置.

其次，把椅脚着地用数学符号表示出来. 如果用某个量表示椅脚与地面的竖直距离，那么当这个量为零时就是椅脚着地了. 椅子在不同位置时椅脚与地面的距离不同，所以这个距离是位置变量 θ 的函数. 设 A,C 两脚与地面距离之和为 $f(\theta)$，B,D 两脚与地面距离之和为 $g(\theta)$. 由假设 2)，$f(\theta)$ 和 $g(\theta)$ 都是 θ 的连续函数；由假设 3)，对任意 $\theta\in[0,2\pi]$，$f(\theta)$ 和 $g(\theta)$ 至少一个为零.

于是，"改变椅子的位置使椅子四脚同时着地"就归结为如下的数学问题.

已知 $f(\theta)$ 和 $g(\theta)$ 是 θ 的连续函数，对任意 θ 有 $f(\theta)g(\theta)=0$，且 $g(0)=0$，$f(0)\geqslant 0$. 证明：存在 $\theta_0\in[0,2\pi]$ 使 $f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$.

证 若 $f(0)=0$，则 $\theta_0=0$. 若 $f(0)>0$，将椅子旋转 $\frac{\pi}{2}$，对角线 AC 与 BD 互换. 由 $g(0)=0$ 和 $f(0)>0$ 可知 $g\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$ 和 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

令 $h(\theta)=f(\theta)-g(\theta)$，则 h 是关于 θ 的连续函数，且 $h(0)>0$，$h\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$. 根据连续函数的介值性质，必存在 $0<\theta_0<\frac{\pi}{2}$ 使 $h(\theta_0)=0$，即 $f(\theta_0)=g(\theta_0)$.

又因为 $f(\theta_0)g(\theta_0)=0$，所以 $f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$.

模型解释 将一把椅子放在"凸凹不平"的地面上，如果不稳，就将椅子绕椅脚连线的正方形的中心沿逆时针旋转，那么一定存在某一个角度(位置)使椅子能够放稳.

思考 模型中假设 1)"四脚连线为正方形"并不是本质的假设，如果将其改为"椅脚连线为矩形"，椅子如何放稳呢？

1.2.2 商人安全过河

问题 三名商人各带一名随从乘船渡河，一只小船只能容纳二人，由他们自己划行. 随从们密约，在河的任一岸，一旦随从的人数比商人多，就杀人越货. 但是如何乘船渡河的决策权掌握在商人们手中. 商人们怎样才能安全渡河呢？

问题分析 该问题可归结为多步决策问题，即商人和随从要通过有限次"由此岸到彼岸"及"由彼岸到此岸"的转移过程，最后安全到达彼岸. 可利用状态转移方法进行求解.

模型建立及求解 1)状态与决策描述. 定义状态 $s_k=(x_k,y_k)$，其中 s_k 表示第 k 次渡河前此岸商人的人数为 x_k、随从的人数为 y_k，其可能值为 $x_k,y_k=0,1,2,3$. 对商人安全的状态集合称为允许状态集合，记作 S，且

$$S=\{(x,y)\mid x=0,\ y=0,1,2,3;\ x=3,\ y=0,1,2,3;\ x=y=1,2\}.$$

定义决策 $d_k=(u_k,v_k)$，其中 d_k 表示第 k 次渡河方案，渡船中商人的人数为 u_k、随从的人数为 v_k，其可能值为 $u_k,v_k=0,1,2$. 对小船可行的决策集合称为允许决策集合，记作 D，且

$$D=\{(u,v)\mid u,v=0,1,2,\ u+v=1,\ 2\}.$$

2）建立状态转移方程. 第 k 次渡河前后的状态转移规律

$$s_{k+1}=s_k+(-1)^k d_k,\quad k=1,2,\cdots \tag{1.1}$$

称为状态转移方程.

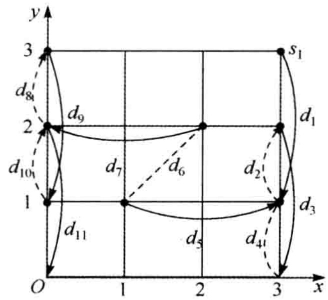

图 1.2　安全渡河问题的图解法

3）问题及求解. 由于全体渡河需要奇数次 n，从而该问题可归结为求 $d_k\in D$，使 $s_k\in S$ $(k=1,2,\cdots,n)$，并按状态转移规律实现 $s_1=(3,3)\to s_n=(0,0)$.

此问题可利用直观的图示法求解，如图 1.2 所示.

在图 1.2 中，允许状态用圆点表示，允许决策集合为沿方格线移动 1 或 2 格，其运动规律为奇次向左下方移动（实线），偶次向右上方移动（虚线）. 最终经过 $n=11$ 步转移能到达 $(0,0)$，即商人与随从能安全过河.

思考　如果商人和随从的人数增多，比如 4 名商人和 4 名随从，应该如何安全渡河？如果有 n 名商人和 n 名随从呢？

1.2.3　交通路口黄灯设置

问题　在设有交通信号灯的十字路口，绿灯和红灯转换之间要亮起一段时间黄灯，以使那些正驶在交叉路口或因离交叉路口太近而无法停下的车辆驶过路口. 那么黄灯该持续多长时间才合理呢？

问题分析　黄灯设置的主要目的是让行驶在交叉路口或离交叉路口太近的车辆驶过交叉路口. 驶近交叉路口的驾驶员在看到黄灯后要做出决定：是停车还是通过路口. 如果驾驶员依法定速度（或低于法定速度）行驶，当其决定停车时，必须有足够的停车距离；当其决定通过路口，则必须有足够的时间让其完全通过路口. 因此，黄灯需持续的时间应包括驾驶员做出决定的时间（即反应时间）、驶过停车所需最短距离的驾驶时间和通过路口所需的驾驶时间.

模型假设　1）驶过路口的驾驶员技术熟练，看到黄灯后的反应时间为常值 T_0，驾驶员按法定速度 v 行驶；

2）路口的交通状况良好，不影响驾驶员停车或通过；