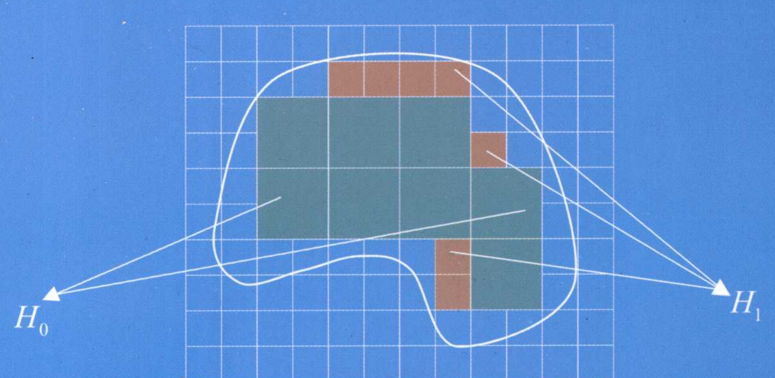
普 通 高 等 教 育 “十 二 五” 规 划 教 材
新世纪新理念高等院校数学教学改革与教材建设精品教材

丛书主编：朱长江 彭双阶
执行主编：何 穗

实变函数

SHIBIAN HANSHU

何 穗
刘敏思 ◎主编



華中師範大學出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

新世纪新理念高等院校数学教学改革与教材建设精品教材

实变函数

主　编：何　穗　刘敏思

副主编：罗小兵　刘　军

姜海波　肖应雄

华中师范大学出版社

内 容 提 要

本书是为高等院校数学与应用数学专业学生编写的实变函数课程的教材。全书共七章，内容包括：集合论初步、欧氏空间中的点集、勒贝格测度理论、勒贝格可测函数理论、勒贝格积分理论、微分与积分、抽象测度与抽象积分简介。每章将习题分为 A、B 两组，其中 A 组题为基本题，B 组题为能力提高题，适宜在教学中灵活使用。

本书可作为综合性大学和高等师范院校数学专业及相关专业的教材或教学参考书，也可供有关研究人员、科技工作者参考。

新出图证(鄂)字 10 号

图书在版编目(CIP)数据

实变函数/何穗　刘敏思 主编.—武汉:华中师范大学出版社,2013.8

(普通高等教育“十二五”规划教材/新世纪新理念高等院校数学教学改革与教材建设精品教材)

ISBN 978-7-5622-6090-5

Ⅰ.①实…　Ⅱ.①何…②刘…　Ⅲ.①实变函数—高等学校—教材　Ⅳ.①O174.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 099251 号

实变函数

©何　穗　刘敏思　主编

编辑室:第二编辑室　**电话**:027－67867362

责任编辑:袁正科　**责任校对**:易　雯　**封面设计**:胡　灿

出版发行:华中师范大学出版社

社址:湖北省武汉市珞喻路 152 号　**邮编**:430079

销售电话:027－67863426/67863280(发行部)　027－67861321(邮购)　027－67863291(传真)

网址:http://www.ccnupress.com　**电子信箱**:hscbs@public.wh.hb.cn

印刷:武汉理工大印刷厂　**督印**:章光琼

开本:787 mm×1092 mm　1/16　**印张**:12　**字数**:273 千字

版次:2013 年 8 月第 1 版　**印次**:2013 年 8 月第 1 次印刷

印数:1—2000　**定价**:21.60 元

欢迎上网查询、购书

普通高等教育“十二五”规划教材

新世纪新理念高等院校数学教学改革与教材建设精品教材

丛书编写委员会

丛书总序

未来社会是信息化的社会，以多媒体技术和网络技术为核心的信息技术正在飞速发展，信息技术正以惊人的速度渗透到教育领域中，正推动着教育教学的深刻变革。在积极应对信息化社会的过程中，我们的教育思想、教育理念、教学内容、教学方法与手段以及学习方式等方面已不知不觉地发生了深刻的变革。

现代数学不仅是一种精密的思想方法、一种技术手段，更是一个有着丰富内容和不断向前发展的知识体系。《国家中长期教育改革和发展规划纲要(2010—2020年)》指明了未来十年高等教育的发展目标："全面提高高等教育质量"、"提高人才培养质量"、"提升科学研究水平"、"增强社会服务能力"、"优化结构办出特色"。这些目标的实现，有赖于各高校进一步推进数学教学改革的步伐，借鉴先进的经验，构建自己的特色。而数学作为一个基础性的专业，承担着培养高素质人才的重要作用。因此，新形势下高等院校数学教学改革的方向、具体实施方案以及与此相关的教材建设等问题，不仅是值得关注的，更是一个具有现实意义和实践价值的课题。

为推进教学改革的进一步深化，加强各高校教学经验的广泛交流，构建高校数学院系的合作平台，华中师范大学数学与统计学学院和华中师范大学出版社充分发挥各自的优势，由华中师范大学数学与统计学学院发起，诚邀华中和周边地区部分颇具影响力的高等院校，面向全国共同开发这套"新世纪新理念高等院校数学系列精品教材"，并委托华中师范大学出版社组织、协调和出版。我们希望，这套教材能够进一步推动全国教育事业和教学改革的蓬勃兴盛，切实体现出教学改革的需要和新理念的贯彻落实。

总体看来，这套教材充分体现了高等学校数学教学改革提出的新理念、新方法、新形式。如目前各高等学校数学教学中普遍推广的研究型教学，要求教师少

讲、精讲，重点讲思路、讲方法，鼓励学生的探究式自主学习，教师的角色也从原来完全主导课堂的讲授者转变为学生自主学习的推动者、辅导者，学生转变为教学活动的真正主体等。而传统的教材完全依赖教师课堂讲授、将主要任务交给任课教师完成、学生依靠大量的被动练习应对考试等特点已不能满足这种新教学改革的推进。如果再叠加脱离时空限制的网络在线教学等教学方式带来的巨大挑战，传统教材甚至已成为教学改革的严重制约因素。

基于此，我们这套教材在编写的过程中注重突出以下几个方面的特点：

一是以问题为导向、引导研究性学习。教材致力于学生解决实际的数学问题、运用所学的数学知识解决实际生活问题为导向，设置大量的研讨性、探索性、应用性问题，鼓励学生在教师的辅导、指导下于课内课外自主学习、探究、应用，以加深对所学数学知识的理解、反思，提高其实际应用能力。

二是内容精选、逻辑清晰。整套教材在各位专家充分研讨的基础上，对课堂教学内容进一步精炼浓缩，以应对课堂教学时间、教师讲授时间压缩等方面的变革；与此同时，教材还在各教学内容的结构安排方面下了很大的功夫，使教材的内容逻辑更清晰，便于教师讲授和学生自主学习。

三是通俗易懂、便于自学。为了满足当前大学生自主学习的要求，我们在教材编写的过程中，要求各教材的语言生动化、案例更切合生活实际且趣味化，如通过借助数表、图形等将抽象的概念用具体、直观的形式表达，用实例和示例加深对概念、方法的理解，尽可能让枯燥、繁琐的数学概念、数理演绎过程通俗化，降低学生自主学习的难度。

当然，教学改革的快速推进不断对教材提出新的要求，同时也受限于我们的水平，这套教材可能离我们理想的目标还有一段距离，敬请各位教师，特别是当前教学改革后已转变为教学活动“主体”的广大学子们提出宝贵的意见！

朱长江
于武昌桂子山
2013 年 7 月

前言

本书是为高等院校数学与应用数学专业学生编写的实变函数课程的教材。主要内容包括集合论初步、欧氏空间中的点集、勒贝格测度理论、勒贝格可测函数理论、勒贝格积分理论、微分与积分、抽象测度与抽象积分简介。

实变函数是数学与应用数学专业的一门主干课程，其理论既是经典分析和现代分析之间的桥梁，更是现代分析学的重要理论基础。它的中心内容是勒贝格测度和勒贝格积分理论。运用集合论的思想和方法分析、解决问题贯穿于全课程是这门课程有别于数学专业其他课程的最显著的特点。正是由于这一特点，该课程一直以来都是高等院校数学专业教师难教、学生难学的课程之一。为了便于教和学，我们力图从学生的实际出发，由浅入深地编写了这本教材。在编写过程中，我们注意了以下几点：

1. 既注重基本理论的科学性，又充分考虑内容的承启性、启发性以及内容所涉及的思想方法。

2. 既保持理论体系的相对完整性和深度，又力求语言简练、图文并茂、深入浅出、循序渐进，增强可读性，便于读者自学。

3. 既注意观点与方法的现代性，又尽量与传统分析的有关内容和方法衔接，以便读者在进一步加深对传统分析理论和方法认识的同时，能在数学思想和数学方法的提高和创新上有所收获。

教材中我们对重要的概念、定理和典型的证明方法作了解释，还列出了一些思考题，帮助读者对相关知识进一步加深理解。另外，为了使读者在学习过程中对课程内容的发展历史有所了解，在本书的第一至第四章的最后都分别安排了关于部分重要数学家简介的阅读材料。本书的习题编排如下：每章习题分为 A、B 两组，其中 A 组题为基本题，题型丰富，适宜于读者在学完相应内容后独立完成，B 组题为能力提高题，其中的大部分习题，读者经深入思考后也可独立完成，但有少部分题难度较大，这些题可在教师的指导下完成。本书编写分工如下：第一章

的第一、二节由肖应雄编写，第三、四、五节由姜海波编写，第二章由罗小兵编写，第三章和第七章的第一节由刘军编写，第四、五章由刘敏思编写，第六章和第七章的第二节由何穗编写，全书由何穗和刘敏思统稿。

在本书的编写过程中，我们参考了国内外的一些实变函数教材，其主要书目列在本书最后的参考文献中。在此，对文献的作者深表谢意！

尽管我们在编写过程中做出了较大努力，但限于编者水平，书中肯定存在不少疏漏和不妥之处，恳切希望广大读者批评指正。

编者

2013 年 6 月

目 录

第1章 集合

集合论产生于19世纪80年代,由德国数学家康托(Cantor)创立,其思想几乎渗透到了所有的数学学科,成为现代数学的主要基石之一。集合论的观点与方法渗入数学分析,产生了实变函数论。本章介绍了集合的一般理论,主要包括集合的概念及运算、集合的对等与基数(势)、可数集与不可数集等。

1.1 集合及其运算

1.1.1 集合的概念

把具有某种特征或满足一定性质的所有对象或事物视为一个整体时,这一整体就称为**集合**,而这些事物或对象称为该集合的**元素**。集合是数学中最原始的概念之一。

一般的,集合的符号常用大写字母$A,B,C,\cdots$表示,集合中的元素常用小写字母$a,b,c,\cdots$表示。

设X是一个集合,若a为X的元素,则记为$a\in X$;$a\notin X$表示a不是X的元素。对一个集合X来说,某事物或对象a,或者a是X的元素,或者a不是X的元素,二者必居其一。

不含任何元素的集称为**空集**,用符号$\varnothing$表示。约定分别用$\mathbf{R}$(或$\mathbf{R}^1$),$\mathbf{Q}$,$\mathbf{N}$和$\mathbf{Z}$表示实数集,有理数集,自然数集和整数集;定义在闭区间$[a,b]$上的连续函数全体构成一个集合,记为$C[a,b]$。

表示一个集合通常有两种方法。一种是列举法,即将该集合的所有元素都列举出来,例如,

$$A=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}\right\},$$

又如,

$$\mathbf{N}=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}。$$

另一种是描述法,将具有某种性质P的元素全体记为

$$Z=\{x\mid x\text{具有性质}P\},$$

例如,

$$B=\{x\mid x^2=2\}。$$

定义1.1 设有两个集合A和B,若$x\in A$,必有$x\in B$,则称A是B的子集或B包含A,记为

$$A\subset B\text{或}B\supset A。\tag{1.1}$$

若 $A \subset B$,且存在 $x \in B$ 满足 $x \notin A$,则称 A 是 B 的真子集。若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$,则称 A 与 B 相等或相同,记为 $A = B$。

显然,$A \subset A$,$\varnothing \subset A$。

例 1 设 $y = f(x)$ 是定义在 $E \subset \mathbf{R}^n$ 上的实值函数,c 为某一实数,集合

$$E[x \mid f(x) \leqslant c] = \{x \in E \mid f(x) \leqslant c\}$$

表示满足 $f(x) \leqslant c$ 且属于 E 的 x 的全体。

例 2 设 A 是任一集合,集合 $2^A = \{B \mid B \subset A\}$ 为 A 的一切子集构成的集合,称为 A 的幂集。显然,2^A 是非空的。

定义 1.2 设 Λ 是一个非空集合,对于每个 $\alpha \in \Lambda$,指定一个集合 A_α,于是得到许多集合,它们的总体称为以 Λ 为指标集的集合族,记为 $\{A_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ 或 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$。

特别地,若 $\Lambda = \mathbf{N}$,则称 $\{A_n\}$ 为集合列(简称集列)。

1.1.2 集合的运算

定义 1.3 设 A,B 是两个集合。

(1) 称集合

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

为 A 与 B 的并集,即由 A 与 B 的全部元素构成的集合;

(2) 称集合

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

为 A 与 B 的交集,即由 A 与 B 的公共元素构成的集合。

若 $A \cap B = \varnothing$,则称 A 与 B 互不相交;若 $A \cap B \neq \varnothing$,则称 A 与 B 相交。

例 3 若 $f(x)$ 是定义在 $E \subset \mathbf{R}^n$ 上的实值函数,a,b 和 c 为实数且 $a \leqslant b, c \geqslant 0$,则

$$E[x \mid a \leqslant f(x) \leqslant b] = E[x \mid f(x) \geqslant a] \cap E[x \mid f(x) \leqslant b],$$

$$E\left[x \,\middle|\, |f(x)| > c\right] = E[x \mid f(x) > c] \cup E[x \mid f(x) < -c]。$$

关于集合的交和并的运算可推广到任意多个集合的情形,设有集合族 $\{A_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$,定义其并集与交集分别为

$$\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha = \{x \mid \text{存在 } \alpha \in \Lambda,\ \text{使 } x \in A_\alpha\},$$

$$\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha = \{x \mid \text{任意 } \alpha \in \Lambda, \text{有 } x \in A_\alpha\}。$$

特别地,当 $\Lambda = \mathbf{N}$ 时,记

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \mid \text{存在 } n \in \mathbf{N}, \text{使 } x \in A_n\},$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \mid \text{任意 } n \in \mathbf{N}, x \in A_n\}。$$

例 4 设 $A_n = (n-1, n]\ (n = 1, 2, \cdots)$,则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = (0, +\infty)$,$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$。

例 5 设 $x_0 \in \mathbf{R}^1$,$A_n = \left\{x \,\middle|\, |x - x_0| < \dfrac{1}{n}, x \in \mathbf{R}^1\right\}\ (n = 1, 2, \cdots)$,则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (x_0 - 1, x_0 + 1),\quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x_0\}。$$

定理 1.1　(1) 交换律：$A \cup B = B \cup A$，$A \cap B = B \cap A$；

(2) 结合律：$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$；$A \cap (B \cap C) = A \cap (B \cap C)$；

(3) 分配律：$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$；

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)。$$

更一般地，有

(4) $A \cap (\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} (A \cap B_\alpha)$；

(5) $A \cup (\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha) = \bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} (A \cup B_\alpha)$；

(6) 设$\{A_n\}$和$\{B_n\}$为两集列，则有 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (A_n \cup B_n) = (\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) \cup (\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n)$。

证明　仅证(5)。

若 $x_0 \in A \cup (\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha)$，则 $x_0 \in A$ 或 $x_0 \in \bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha$。若 $x_0 \in A$，则对 $\forall \alpha \in \Lambda$，有 $x_0 \in A \cup B_\alpha$，从而 $x_0 \in \bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} (A \cup B_\alpha)$；若 $x_0 \in \bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha$，则对 $\forall \alpha \in \Lambda$，有 $x_0 \in B_\alpha$，故 $x_0 \in A \cup B_\alpha (\forall \alpha \in \Lambda)$，从而 $x_0 \in \bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} (A \cap B_\alpha)$。

反之，若 $x_0 \in \bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} (A \cup B_\alpha)$，则对 $\forall \alpha \in \Lambda$ 有 $x_0 \in A \cup B_\alpha$，即 $x_0 \in A$ 或 $x_0 \in B_\alpha$。若 $x_0 \in A$，则有 $x_0 \in A \cup (\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha)$；若 $x_0 \notin A$，对 $\forall \alpha \in \Lambda$，有 $x_0 \in B_\alpha$，则 $x_0 \in \bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha$，从而 $x_0 \in A \cup (\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha)$。所以 $A \cup (\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha) = \bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} (A \cup B_\alpha)$。

定义 1.4　设 A，B 是两个集合，称集合

$$A \backslash B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$$

是 A 与 B 的差集，也记为 $A - B$，即在集合 A 中而不在集合 B 中的一切元素构成的集合。若 $B \subset A$，则称 $A \backslash B$ 为 B 相对于 A 的补集或余集。

通常，在讨论问题的范围内，若所涉及的集合总是某个给定集合 X 的子集，则称 X 为**全集**，此时 $X \backslash B$ 也称为 B 的**补集或余集**，也简记为 B^c。

容易证明，集合的差集和余集有下列性质。

定理 1.2　(1) $A \cup A^c = X$，$A \cap A^c = \varnothing$，$(A^c)^c = A$，$X^c = \varnothing$，$\varnothing^c = X$；

(2) $A \backslash B = A \cap B^c$；

(3) 若 $A \subset B$，则 $A^c \supset B^c$；

(4) $(A \backslash B) \cap C = (A \cap C) \backslash (B \cap C)$，$(A \backslash B) \backslash C = A \backslash (B \cup C)$。

定理 1.3　(德·摩根(De. Morgan)法则)

(1) $X \backslash \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha = \bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} (X \backslash A_\alpha)$；

(2) $X \backslash \bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} (X \backslash A_\alpha)$。

特别地，若 X 为全集，则有

(3) $(\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha)^c = \bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha{}^c$；

(4) $(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha)^c = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha{}^c$。

证明 仅证(3),其余留作习题。

任取 $x\in(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha)^c$,则 $x\notin\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$。从而对一切 $\alpha\in\Lambda_\alpha$,有 $x\notin A_\alpha$,即 $x\in A_\alpha{}^c$,故 $x\in\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha{}^c$。

反之,若 $x\in\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha{}^c$,则对一切 $\alpha\in\Lambda$ 有 $x\notin A_\alpha$,从而 $x\notin\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$,即 $x\in(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha)^c$。

例 6 设$\{f_n(x)\}$是定义在集合X上的一列实值函数,令集合$A=\{x\mid \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0\}$,则有

$$A=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\left\{x\,\middle|\,|f_n(x)|<\frac{1}{k}\right\}。$$

证明 由于$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$ 当且仅当对任意 $k\geqslant1$,存在 $m\geqslant1$,当 $n\geqslant m$ 时,有 $|f_n(x)|<\frac{1}{k}$ 成立。因此若 $x\in A$,则$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$,从而对任意的 $k\geqslant1$,存在 $m\geqslant1$,使得对任意的 $n\geqslant m$,$x\in\left\{x\,\middle|\,|f_n(x)|<\frac{1}{k}\right\}$,所以

$$x\in\bigcap_{n=m}^{\infty}\left\{x\,\middle|\,|f_n(x)|<\frac{1}{k}\right\},$$

从而

$$x\in\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\left\{x\,\middle|\,|f_n(x)|<\frac{1}{k}\right\},$$

由 k 的任意性,有

$$x\in\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\left\{x\,\middle|\,|f_n(x)|<\frac{1}{k}\right\},$$

于是

$$A\subset\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\left\{x\,\middle|\,|f_n(x)|<\frac{1}{k}\right\},$$

类似可证相反的包含关系,故结论成立。

在例 6 中,集合 A 的表达式看起来较复杂,但它是通过比较简单的集合

$$\left\{x\,\middle|\,|f_n(x)|<\frac{1}{k}\right\}$$

的运算得到的,以后我们会看到集合的这种表示方法是很有用的。

接下来介绍集合列的极限运算。

例 6 中涉及的集合

$$\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\left\{x\,\middle|\,|f_n(x)|<\frac{1}{k}\right\}$$

实际上是

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left\{x\,\middle|\,|f_n(x)|<\frac{1}{k}\right\},$$

所以集合 A 的表达式可以变为

$$A=\bigcap_{k=1}^{\infty}\varlimsup_{n\to\infty}\left\{x\,\middle|\,|f_n(x)|<\frac{1}{k}\right\}。$$

定义 1.5 设 X 和 Y 是两个集合，称集合

$$X\times Y=\{(x,y)\mid x\in X,y\in Y\}$$

是 X 与 Y 的直积集，简称 X 与 Y 的直积，其中 $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$ 是指 $x_1=x_2$ 且 $y_1=y_2$。

一般的，可定义任意多个集合的直积

$$\prod_{k=1}^{n}X_k=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_k\in X_k,k=1,2,\cdots,n\},$$

$$\prod_{k=1}^{\infty}X_k=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\mid x_k\in X_k,k\in\mathbf{N}\},$$

$$\prod_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha=\{(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}\mid x_\alpha\in X_\alpha,\alpha\in\Lambda\}。$$

例 7 $\mathbf{R}^2=\mathbf{R}^1\times\mathbf{R}^1=\{(x_1,x_2)\mid x_i\in\mathbf{R}^1,i=1,2\}$；

$\mathbf{R}^n=\underbrace{\mathbf{R}^1\times\mathbf{R}^1\times\cdots\times\mathbf{R}^1}_{n}=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\mathbf{R}^1,i=1,2,\cdots,n\}$ 称为 n 维欧几里得空间（欧氏空间）；

$\mathbf{Q}^n=\underbrace{\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}\times\cdots\times\mathbf{Q}}_{n}=\{(r_1,r_2,\cdots,r_n)\mid r_i\in\mathbf{Q},i=1,2,\cdots,n\}$ 称为 $\mathbf{R}^n$ 中的有理点集；

$\mathbf{R}^\infty=\underbrace{\mathbf{R}^1\times\mathbf{R}^1\times\cdots\times\mathbf{R}^1\times\cdots}_{\infty}=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\mid x_n\in\mathbf{R}^1,n\in\mathbf{N}\}$ 称为实数列全体所构成的集合。

1.1.3 集合列的极限集

集合列的极限集运算类似于数列的极限运算。下面我们引进集合列的极限集运算。

定义 1.6 设 $\{A_k\}$ 是一列集合，分别称集合

$$\varlimsup_{k\to\infty}A_k=\limsup_{k\to\infty}A_k\triangleq\{x\mid 存在无穷多个\,k,使\,x\in A_k\},$$

$$\varliminf_{k\to\infty}A_k=\liminf_{k\to\infty}A_k\triangleq\{x\mid 只有有限个\,k,使\,x\notin A_k\}$$

为集合列 $\{A_k\}$ 的上极限集与下极限集。

若 $\varlimsup\limits_{k\to\infty}A_k=\varliminf\limits_{k\to\infty}A_k$，则称集合列 $\{A_k\}$ 有极限或是收敛的，此时 $\varlimsup\limits_{k\to\infty}A_k=\varliminf\limits_{k\to\infty}A_k$ 称为集合列 $\{A_k\}$ 的极限集，也记为 $\lim\limits_{k\to\infty}A_k$。

显然：

(1) $x\in\varlimsup\limits_{k\to\infty}A_k$ 等价于存在 $\{A_k\}$ 的子集列 $\{A_{k_i}\}$，使得 $x\in A_{k_i}(i=1,2,\cdots)$；

(2) $x\in\varliminf\limits_{k\to\infty}A_k$ 等价于存在 $N>0$，当 $k>N$ 时，$x\in A_k$；

(3) $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k\subset\varliminf\limits_{k\to\infty}A_k\subset\varlimsup\limits_{k\to\infty}A_k\subset\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$。