平面几何新路

PINGMIANJIHEXINLU

基础研究

张景中 著

教育数学丛书

§初步探索之一 距离与直线

§初步探索之二 面积与平面

§初步探索之三 角度与面积

教育数学丛书

平面几何新路

基础研究

张景中 著

四川教育出版社
一九九六年·成都

(川)新登字 005 号

责任编辑　冉崇玉
封面设计　何一兵　刘　洪
版面设计　唐　瑛

平面几何新路基础研究　　张景中　著

四川教育出版社出版　　（成都盐道街三号）
四川教育出版社发行　　四川协力印刷厂印刷

开本 787×1092 毫米　1/32 印张 3.5　插页5 字数 73 千
1996 年 9 月第一版　　1996 年 9 月第一次印刷
印数:1--2000 册

ISBN7—5408—2946—x/G・2837　　定价:4.60 元

内容简介

从公理出发展开整个体系，是古典几何学的传统方法．但欧几里得的公理体系在逻辑上漏洞很多．希尔伯特的公理体系在逻辑上虽严谨，却又失之繁琐而不实用．故两千多年来还没有一个真正严谨地建立起来的欧几里得几何体系．

本书提出一个与面积法相适应的平面几何公理体系，并证明了它等价于欧几里得——希尔伯特公理体系．此书可供中学数学教师，师范院校数学教师，数学爱好者及数学研究工作者参考．

前　　言

从数学教育的观点和实用的观点看来，几何学是不一定要从公理出发来展开的. 著名数学家吴文俊教授曾指出："中国古代的几何学，没有公理体系，但是有原理，例如出入相补原理等等. 中学几何课上，讲公理不如讲原理，例如三角形全等的条件，就是一个原理. 我们选择若干个原理，将几何内容串起来，比公理系统要好. 一部经典力学，就是从三大定律(三个原理)推演而来的. 也有人认为，从原理出发不严格，使用公理体系才能做到严密，这是唬人骗人.

因此，作为教育数学丛书之一，这本讲基础研究的书，也就是讲公理体系的书，是比较最不重要的. 对于作者，是可写可不写的，对于本丛书多数读者，也是可读可不读的.

不少谈几何的书或文章，往往夸大了几何公理的作用. 其实，几何的力量不在于公理而在于方法. 说欧几里得的几何原本是从几条公理出发建立起严整的体系，那是相对于他之前的工作而言. 如果真正靠他的公理，不靠直观，不靠欧氏之前积累的技巧与方法，《原本》的逻辑推理是很难展开的.《原本》的功劳主要是突出了公理化的思想. 它力图实践公理化思想，实际上却漏洞颇多. 希尔伯特的《几何基础》，虽然实现了欧氏公理体系的严谨化，但又失之繁琐，以至于没有谁愿意在他的"基础"上去重建几何的大厦. 这一名著推动了数学中公理化

的思潮，对几何学的发展却没有起很大的作用．两千多年来，尽管有无数大师——欧几里得、笛卡儿、希尔伯特以至柯尔莫哥洛夫等为之辛勤地工作，但欧氏几何的水平，从方法论的角度而言，仍停留在小学四则杂题的水平．教几何的老师，说不清学了这些几何知识究竟能解些什么样的问题，是因为教科书上也说不清，因为几何学家本来就说不清．这个困难，这个从教育的角度看来的大问题，靠研究公理是无法解决的．

正因为如此，本丛书的目的主要在于发展新的方法，使数学更适于教育．《教育数学探索》提出了基本的思路；《平面几何新路》展开了几何的新方法与新体系（由于迁就当前的数学教育现实，这是一次很不彻底的展开）；《平面几何新路——解题研究》则致力于把初等几何从小学四则杂题的发展阶段提高到代数方程的阶段．至于本书，其重要性远不足和以上三册相比，不过是适应传统兴趣的一些粗浅的讨论而已．

尽管如此，对几何公理体系有兴趣的读者仍可以看到，我们在这里提出的公理体系，由于和先进的方法紧密联系，比起以前的体系，有很明显的优越性．

本书的写法，与许多数学书以及本丛书的前三册也不尽相同．这里一开始不是展示作者所得到的结论，而是力图重现作者的思维过程，吸引读者一同思考、讨论．从纯学术的观点看，读者会从书中发现或发掘不少可供进一步研究的问题．

由于时间仓促及学识粗疏，错误不当之处在所难免，欢迎批评指正．

目　　录

1. 几何公理体系浅谈…………………………………… (1)
2. 欧几里得——希尔伯特体系………………………… (8)
3. 以向量或度量为基础的几何体系 ………………… (16)
4. 面向数学教育的几何公理体系 …………………… (23)
5. 初步探索之一　距离与直线 ……………………… (29)
6. 初步探索之二　面积与平面 ……………………… (36)
7. 初步探索之三　角度与面积 ……………………… (56)
8. 平面几何公理体系的不同方案 …………………… (71)
9. 从平面几何到立体几何 …………………………… (89)
10. 进一步的问题……………………………………… (98)
丛书后记……………………………………………… (102)

§1 几何公理体系浅谈

在本丛书的另外几本中，引进了一套新的几何解题方法。这套方法仅仅是方法，它可以在任何几何体系中运用——只要在这个体系中能建立我们的方法所赖以发展的几个基本工具：共边定理，共角定理，勾股差定理等等。

几何学是一座美丽的城市。要方便地游览城市的各个景点，就需要好的市内交通系统，交通工具。这交通系统和交通工具，也就是几何学的展开结构和解题方法。但要从外部到达这个城市，则往往要经由城市的大门，车站，机场。几何学的公理系统，好比是城市的大门，机场，车站。

当然，城市可以没有大门、机场或车站。城市可能是全方位开放的，旅游者不必经由大门，机场或车站也能进来一饱眼福。学几何，研究几何，欣赏几何，也可以不考虑公理系统。中国古代数学家在几何学上有辉煌的贡献，但他们完全没有想到过应当搞一个公理系统。他们关心的是找寻有效的解题方法，计算几何量的方法。在欧几里得之前，古希腊学者们在几何学领域已有了十分丰富的成果，他们也没有想到要建立一个公理体系。

但是，正如现代化的城市总要兴建机场、车站才能更加繁

荣一样，几何学的蓬勃发展促进了公理体系的出现，而公理体系的出现又引导几何学的研究走向更高级的阶段.

古希腊学者喜欢论辩.几何问题是他们论辩的重要内容之一.他们不满足于推导实用的几何计算公式，而对几何图形的丰富多彩的性质的来龙去脉更有着浓厚的兴趣.为了说明图形何以会有这样那样的性质，就要讲道理，这就是证明.

如果这证明仅仅出于实用的目的，怕得到的公式不正确，弄清它的道理，那就用不着打破沙锅问到底，只要大致说个明白就行了.我国古代数学家给出了勾股定理的证明.这证明就是大致说个明白，画个正方形，里面摆四个一样的直角三角形，算算面积，就把勾股定理算出来了.如果打破沙锅问到底，就还可以提出不少问题.比如，为什么平面上能画出个正方形来？如果平面上画不出正方形，这个证明也就失去了依据.对这样的问题，中国古代数学家似乎不想提，更不准备回答.但从逻辑上说，这样提问题并没有错.事实上，并不是随便什么表面上都能画正方形的.平面上能画出正方形（严格地说，欧几里得平面上才能画出正方形来.在非欧平面上，是画不出正方形的.），是因为它是“平”的.那么，这“平”又是什么意思呢？能不能用更准确的语言加以刻划呢？这种提问题的方法，在现代数学中是司空见惯.理所当然的.而在古代，却是一个了不起的创造.具体地说，是古希腊人在论辩中逐渐学会了这种打破沙锅问到底的方法.

沙锅有底，打破了也就完了.但讨论具体问题，比如几何证明题，如果没完没了的问下去，却也不是个办法.为什么甲成立？因为根据乙；为什么乙成立，因为根据丙；为什么丙成立，因为根据丁；….这样，问的人不费吹灰之力便可得寸进

尺，答者竭尽心力还不免理屈词穷．这也太不公平了．而且无助于认识真理，增长智慧．

又要寻根究底把道理讲清楚，又不能没完没了地问下去，这个矛盾如何解决呢？古希腊人找到了一个办法：大家商定共同承认若干条最基本的根据，叫做公理（或公设）．对公理（公设），就不能再问了．寻根究底的底，就是公理．

有一种说法，认为公理是“自明之理”．其实也不尽然．因为什么叫“自明”，并无客观的标准．欧几里得的第五公设，或者叫平行公理，很多数学家就认为不是自明之理．

另一种说法，认为公理是被亿万次实践检验为正确的真理．这有道理，但不全面．因为无法说清楚．检验多少次才算公理？谁来判定检验的结果？欧氏几何里，三角形内角和等于180°，是因为有平行公理——过直线外一点有且仅有一条平行线．在罗氏非欧几何里，三角形内角和小于180°，是因为平行公理变了——过直线外一点，至少有两条平行线．那么，究竟平行线是一条还是两条，如何用实践检验呢？这是很难说清楚的问题．

现代数学认为，所谓公理，就是对所研究的对象的性质的基本约定．中国象棋里，“马走日字象走田”，这种约定，就可以说是中国象棋里的公理．我们不能说，马走日字象走田是自明之理，也不能说是经过实验检验总结出马走日字象走田．只能说，这是约定．研究象棋，可以总结出一些棋的规律，如“单车难破士象全”．这些规律的正确性，是可以证明，可以讨论的．你可以问：“为什么单车难破士象全”？但不能问“为什么马走日字象走田”．因为这是公理，是约定，是寻根究底的底．

这么说，既是约定，就可以随心所欲，天马行空，任意创设

公理系统了吗?

实际不然.对于数学公理,还是应当有些要求,有些标准.这里有逻辑上的标准,也有实际提出来的标准.

逻辑标准,是 19～20 世纪德国数学家希尔伯特首先明确地说出来的.共三条:

第一条叫做相容性.也就是说,在同一公理系统之中,公理不能相互矛盾.不能由它们推出相互矛盾的命题.

第二条叫做独立性.是指系统中每条公理都是必要的,它不能由系统中其它公理推出.

第三条叫做完备性.就是说这些公理对于所研究的数学领域已经足够了,不可能再添加新的独立公理了,加上去,就有矛盾.

这三项标准中,最重要的是相容性.如果一个系统自相矛盾,不知所云,那就没有必要去创建它,发展它.但是,目前推不出矛盾,并不见得就没有矛盾,将来也许会出现矛盾.那末,又怎样证明公理系统的相容性呢?在数学里,一个公理系统的相容性往往是用构造模型的方法来说明的.也就是说,设法在某一组已知的事物上来验证(或解释)所考虑的公理系统.如果这些公理能在这组事物上得到满足,就把这组事物叫做公理系统的一个模型.公理之间有矛盾,模型就不可能存在.可见,这模型不应当在本公理系统之内来建立.否则,就是假定了自己的相容性来说明自己的相容性,成了循环论证了.既然要在另一个系统内建立模型,那就要假定模型所在的系统相容.例如,假定了自然数公理系统是相容的,便可在自然数系统内建立一个模型,来证明实数公理系统是相容的.而在实数系统中,又可以建立笛卡儿坐标系,构成欧氏几何公理系统的

一个模型，证明欧氏几何公理体系的无矛盾性. 这样，欧氏几何公理体系的无矛盾性，即相容性，就归结为自然数公理系统的无矛盾性.

公理系统的独立性不象无矛盾性那末重要. 因为它不影响整个系统的构造和性质. 如果已明明白白地知道其中一条公理能由其它公理推出来，那就把它从公理中去掉，改称定理好了. 问题在于，要确定一条公理能否由其它公理推出来，有时是十分困难的. 欧几里得之后两千多年间，许多出色的数学家致力于研究欧氏第五公设——平行公理——的独立性. 它们猜想这条公理能够由其它公理推出来，但又无法证明或否定这个猜想. 直到十九世纪，这项研究导至非欧几何的发现，并且在欧氏几何内建立了非欧几何的模型，才最终确定了平行公理的独立性. 可见公理体系中独立性的研究是多么困难. 现在，人们对公理的独立性并不非常重视. 特别是在数学教育中，为了化繁为简，不妨多用几条公理. 我国长期使用的初中几何课本里所介绍的几何公理，就不满足独立性这个要求.

至于完备性，更不必要. 不完备的公理系统所刻划的对象，内容往往更丰富，更深刻. 现代数学所研究的许多公理系统，都是不完备的. 不过，对于欧氏几何，人们希望它的公理系统是完备的. 这是因为，几何公理是从现实世界的空间性质抽象而来的. 几何学应当完全地反映现实世界的空间性质. 如果不完备，就意味着现实世界某些空间性质尚未在几何学中得到反映和说明，这当然不能令人满意.

前面说了公理系统应当具备的逻辑特色. 说来说去，根本上只有相容性才是必要的. 只要相容，无矛盾，也就是能够自圆其说，就可以成为一个公理系统. 但是，这并不意味着一切

能够自圆其说的公理体系都应受到重视，都能得到发展. 比如一个工厂，它能生产许多产品. 这产品只要合法，就允许生产. 但合法不等于有销路. 没有销路，尽管产品合法，工厂最后还是要关停并转. 如果公理系统中的公理是从现实世界中抽象得来的，是人们长期实践经验的结晶，这个系统推出的理论、公式就能反过来在实践中得到应用，人们就关心这种系统，就会有更多的人研究它，发展它，学习它，传播它. 这系统也就源远流长，不会湮没了. 在这个意义上，几何学和它的公理系统，应当经受实践的考验. 它源于实践，并在实践中发展和更加完善.

在实践中积累的大量知识，经过整理、提炼，系统化，最后形成若干条最基本的规律，即公理. 这是许多成功的数学公理系统产生的必由之路. 从逻辑上，是先有公理，然后才能从公理推出各种命题，构成丰富的知识体系. 而在实际的发展过程中，则是先积累了丰富的知识，并已初步形成系统，有了条理，才提炼出公理的.

这正如，通常是先有城市，而且城市发展到一定规模，才兴建机场、车站. 有了机场、车站，城市则更加繁荣. 但也有例外，由于对欧氏几何第五公设的研究，人们发现了新的几何学——非欧几何. 这好像因修建机场而发现了另一座城市，或者说因修建机场而发现可以顺便兴建另一座城市. 非欧几何是先有了公理，才在公理基础上推演出来的.

因研究公理而发现一片新天地——非欧几何，这是数学史上一件大事. 从此，数学家对公理方法异常重视，掀起了研究公理方法的热潮. 到二十世纪 50 年代，公理方法已经进入了数学的各个分支.

对几何这个古老的数学分支，数学家特别垂青. 不但旧的公理体系受到彻底的分析、研究，得到补充、完善以至重建，并且一个又一个的新公理体系也诞生了. 在这个古老城市的周围，大大小小的机场和车站出现了. 可惜的是，对城市内部的交通系统与交通工具，关心者不多，因而改善甚少.

我们所引进的新的几何方法，就是致力于改善这个古老城市的市内交通系统. 这新的交通系统，和周围已有的机场、车站是可以并网运行的. 但是，如果有了与新交通系统配套的新机场、新车站，岂不更加方便?!

这本小书的目的，就是提出一个为古老的几何学城市建设新机场、新车站的方案.

也就是说，我们准备提出一个与面积方法紧密配合的几何公理体系.

为了说明建立几何的新公理体系的需要，我们应当先大体了解一下目前已有的一些几何公理体系的特点. 这样，既便于比较我们的公理体系与原有的体系的不同之点，也有助于说明我们的体系在逻辑上与其它体系的等价性. 借鉴前人和他人的成果. 也正是推陈出新的必由之路.

§2 欧几里得—希尔伯特体系

几何学的第一个公理系统，是古代希腊数学家欧几里得(约公元前 330~公元前 275 年)在他的杰作《几何原本》中提出来的.《原本》中总结了当时几何学的丰富成果，建立了几何学推理体系，给出了几种典型的几何证题方法.

原本共十三卷. 在第一卷里，引入 23 个定义，5 个公设和 5 个公理，以及 48 个作为几何证题基本工具的最重要的定理. 以后各卷分别涉及圆、正多边形、比例与相似、算术、代数恒等式、可公度与不可公度的概念、立体几何及体积计算的穷竭法. 它确是世界上最早的，内容丰富、结构严整的空前科学巨著. 它的问世不仅标志着作为一门科学的几何学的诞生，也标志科学中公理方法的诞生.

欧几里得试图对每个基本几何概念加以定义. 后来数学家认识到，这是不可能的，因而也是无意义的劳动.《原本》中 23 个定义的前几个是：

定义

(1)点是没有部分的.

(2)线有长无宽.

(3)线的界限是点.

(4)直线是这样的线，它上面的点是同样地放置着的.

(5)面有长和宽.

(6)面的界是线.

(7)平面是这样的面，它上面的直线是同样地放置着的.

接着，就是平角、直角、垂线、圆以及三角形等基本几何图形的定义.

在《原本》中所引入的公设和公理如下：

公设

(1)从每一点到另一点可引直线.

(2)每一条直线都可以无限延长.

(3)以任意点为中心可作半径等于任意长的圆.

(4)凡直角都相等.

(5)同一平面上两直线与第三直线相交，若其中一侧的两个内角之和小于二直角，则该两直线必在这一侧相交.

公理

(1)等于同量的量相等.

(2)等量加等量，其和相等.

(3)等量减等量，其差相等.

(4)能迭合的量相等.

(5)全体大于部分.

在欧几里得看来，所谓公理，是适用于一切科学的真理.至于公设，则只适用于几何.但后来的数学家并不这么区分，大家认为公设也就是公理.

在两千多年前的古希腊时代，《原本》的出现无疑是一辉煌的科学高峰.但随着人类的科学水平的提高，大家逐渐认识

到，欧几里得所创建的这个几何体系，在逻辑上尚欠严谨. 主要是：

①定义不清楚. 当时，欧几里得试图对一切基本几何概念都加以定义. 后来的数学家认识到，这是不可能的. 例如，《原本》中关于点的定义说“点是没有部分的”，关于线则说“线有长无宽”，“线的界限是点”等. 这里用了“部分”、“长”、“宽”、“界限”等词，但这些词的意义都不明确. 在定义(4)和(7)中，用了所谓“同样放置着的”说法，也不知道所指为何. 这样的定义含糊不清，在几何推理中不起作用. 在两千年中，许多数学家为把几何的基本概念弄得更清楚而付出了巨大的努力. 这方面的努力到 1899 年德国数学家希尔伯特的名著《几何基础》出版时才算大功告成.

②公理不完备，缺少顺序公理、合同公理和连续公理. 因此，《原本》中的推理不得不参照图形，求助于直观. 也就是说，达不到现代数学所要求的严谨性.

③有些公理不独立，不是必要的. 如第 4 公设“凡直角皆相等”就容易从别的公理推出来.

欧几里得之后，很多数学家致力于改善几何学公理体系使之更清楚，更严谨. 直到 19 世纪，德国数学家希尔伯特出版了《几何基础》这本近代公理方法的经典著作，才解决了《原本》所存在的这些问题.

在《几何基础》中，阐明了近代公理方法的基本思想：一个公理系统中，最初的一些基本概念是不加定义的. 既然不加定义，在推理中又如何使用这些基本概念呢？这就要列出若干条公理来规定这些基本概念之间的关系，即在逻辑推理中使用这些基本概念的方法. 从基本概念和公理出发，通过推理，可