高等院校精品课系列教材

名品

运筹学

第三版

Operations Research

赵可培　主编

3

上海财经大学出版社

高等院校精品课系列教材

运 筹 学

（第三版）

赵可培　主编

上海财经大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

运筹学/赵可培主编．—3版．—上海：上海财经大学出版社，2013.8
(高等院校精品课系列教材)
ISBN 978-7-5642-1645-0/F・1645

Ⅰ.①运…　Ⅱ.①赵…　Ⅲ.①运筹学-高等学校-教材
Ⅳ.①O22

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第103106号

□ 责任编辑　徐从双
□ 封面设计　钱宇辰

YUNCHOUXUE
运　筹　学
(第三版)

赵可培　主编

上海财经大学出版社出版发行
(上海市武东路321号乙　邮编200434)
网　址：http://www.sufep.com
电子邮箱：webmaster @ sufep.com
全国新华书店经销
上海华业装璜印刷厂印刷装订
2013年8月第3版　2013年8月第1次印刷

787mm×1092mm　1/16　19.5印张　499千字
印数：33 001—38 000　定价：36.00元

内容简介

本书从经济学、管理学的角度，系统地介绍了运筹学中的各主要分支：线性规划、运输问题、目标规划、动态规划、整数规划、图与网络、存储论、决策与对策论等内容。作者列举了运筹学在经济管理中应用的大量实例，力图从各类实际问题中引出运筹学各分支的基本模型，并尽可能地运用直观与通俗的语言说明运筹学中各种算法的基本方法与原理，使读者能真正掌握运筹学各种算法的精髓，以利于应用到实际问题中。为方便读者利用计算机运算本书中介绍的有关数学模型，本书还详细介绍了运用办公室自动化软件 Excel 中的宏程序“规划求解”解线性规划等模型的方法。

本书可作为经济、管理类各专业和工商管理(MBA)“运筹学”课程的教材或教学参考书，也可供各类管理人员及相关人员参考。

第三版前言

本书是为了适应高等院校各专业对“运筹学”课程教学的需要而编写的。它是在我们以前编写的《运筹学》教材的基础上，吸收了近年来运筹学的最新发展成果，结合多年来的教学实践，进一步修订补充而成的。

在本书的编写过程中，我们注意从经济学、管理学的角度介绍运筹学的基本知识，试图以各种实际问题为背景，引出运筹学各分支的基本概念、基本模型和基本方法，并且侧重各种方法及其应用。对其理论证明，我们用独立章节给出，可供有兴趣的读者选用。对于运筹学中的各种算法，我们尽量运用直观方法和通俗语言来说明其基本思想，并辅以丰富的实例说明求解的步骤，避免复杂的数学推导，使读者能真正做到知其然，更知其所以然，真正掌握运筹学各算法的精髓，能灵活应用到实际问题中去。

为方便读者利用计算机运算本书中介绍的有关数学模型，本书还详细介绍了运用办公室自动化软件 Excel 中的宏程序“规划求解”解线性规划等模型的方法。

本书在内容的选择上，兼顾了各层次读者的需要，包含了运筹学所有的主要分支，可适合研究生、本科生、专科生等各层次教学的需要。本书每章末都配有大量的习题供读者练习，以达到加深理解、巩固所学知识的目的。书末附有习题答案，便于读者自学。此外，还附有 2 篇案例，供案例教学选用。

参加本书编写的有赵可培(第一、二、三、四、六、七章)，朱幼文(第五、八章)，全书由赵可培主编。王燕军为第四章、第五章编写了部分内容和应用例题。本书案例由周玮、贾璐提供。

本书自 2000 年出版以来，深受广大读者欢迎。2008 年在第一版的基础上，对全书做了详细的修订，增加了部分运筹学的最新内容，介绍了计算机运算程序等内容。出版了第二版。近年来，运筹学与相关学科又取得了飞速的发展，为了适应教学的新形势，我们又做了部分调整和修订，推出第三版。主要的变动是在本书中，分离出了第九章排队论和第十章模拟。这两章的内容，相对独立，将来可独立成册。使其他八章的内容可以在较短的时间内完成教学。以期更好地满足广大读者的需要。

由于编者的水平有限，书中的缺点和错误在所难免，希望能得到读者的批评指正。

作 者

2013 年 7 月

目 录

绪论

什么是运筹学？对此有各种不同的说法，但基本上大同小异。在我国前几年出版的百科全书中，对运筹学是这样定义的："运筹学是应用分析、试验和定量化的方法对经济管理系统中的人力、物力和财力等资源进行统筹安排，为决策者提供有依据的最优方案，以实现最有效的管理。"

在现代经济活动中，为了提高经济效益，加速经济发展，首先要依赖于科学技术的发展，科技是第一生产力。其次要有先进、科学的管理。管理对经济的发展同样起着举足轻重的作用。著名经济学家、诺贝尔奖获得者赫伯特·西蒙(Herbert Simon)指出：决策是管理的核心；管理由一系列的决策组成；管理就是决策。正确的决策是指人们为了实现特定的目标，在掌握了大量的有关信息的基础上，运用科学的理论与方法，进行系统分析，在大量可供选择的决策方案中，选择相对最有利的方案。这里所说的科学理论与方法，包括定性分析和定量分析两个方面。运筹学研究的就是一种用定量化分析方法进行辅助决策的科学理论与方法。它在对有关决策信息分析的基础上，建立适当的定量化分析数学模型，寻找出一个或一系列对决策者目标最有利的方案，并利用计算机的高速计算能力和数学模型的强大分析能力，通过不断的计算、分析、再计算、再分析，为决策者的决策提供数量化的有科学依据的辅助决策方案，供决策者选用，以达到管理决策的最优化。

运筹学的基本思想在我国很早就产生了。春秋战国有一个"田忌赛马"的故事。田忌是齐国的一位大将。有一天齐王要和他赛马，规定各人把马分为上、中、下三等，每一次各人从自己的三类马中任选一匹马来比赛。在三次比赛中，上、中、下三种马规定各选一次，每次胜者可得千金。当时就同等级的马来说，齐王的马都比田忌的好。如果田忌以上、中、下三种马的顺序对齐王同等级的马，那就要输三千金。谋士孙膑给田忌出了个主意，他叫田忌以下马对齐王的上马，以上马对齐王的中马，再以中马对齐王的下马，这样一负二胜，反而可赢千金。这就是运筹学中的对策论思想。当然，这种思想是很朴素的，由于当时的生产力水平还很低，这种思想只能零星地应用在个别问题上，不可能成为一门系统的学科。

与其他学科一样，运筹学作为一门独立的学科，也是在社会生产力发展到一定水平后才产生的。第二次世界大战期间，英国为了抵御德国飞机的轰炸，曾邀请一批科学家研究全国空中及地面防御有关的战略战术问题，成立了一个作战研究小组，并把这个小组所进行的科学活动称为"Operations Research"。我国把它翻译成"运筹学"，这是出于《史记·汉高祖本纪》中，汉高祖曰："夫运筹帷幄之中，决胜于千里之外，吾不如子房。"这里的"运筹"，有主持战略、"作战研究"之意。

第二次世界大战后，英、美等国把对运筹学的研究从军事部门转移到工业和商业部门，对企业管理做出了很大贡献。最近二三十年，更把运筹学扩大应用到运输业、公用事业、城市规

划、财政金融、医疗卫生、农业、教育以及图书馆等各个领域中。电子计算机技术的不断发展，更为运筹学的进一步发展提供了极其有利的条件。

运筹学研究问题的方法主要有以下四个特点：

1. 在现有资源条件下。即运筹学是讨论对现有资源的科学合理的安排运用，对现有资源的运筹帷幄，以产生最好的决策效果(这里并不意味着资源不能增减)。

2. 建立相关的数学模型。运筹学对相关决策问题进行概括、抽象，建立相关的数学模型，并以数学模型为工具，进行决策分析。没有数学模型的决策分析就不是运筹学。

3. 运用计算机进行求解与分析。由于数学模型的复杂性以及相关计算机技术的发展，对数学模型的计算与分析一般均由计算机进行。它不仅可以帮助人们求出最优决策，并且方便人们对决策做出各种分析，以取得更好的效果。

4. 提供辅助决策信息。在数学模型的建立过程中，不可避免地对实际问题进行了抽象与概括，做了一定的假设，忽略了一些次要的、不便于数量化分析的因素。我们必须把在此基础上得出的最优决策放在一个适当的位置，即称为辅助决策信息。也就是说，最终的决策还必须结合其他因素，综合各方面的信息做出最终决策。运筹学为决策提供了强有力的工具，但我们也没有必要把它看成是绝对的。

由于客观世界的多样性与复杂性，抽象出的数学模型也各不相同，不同类型的数学模型即形成了运筹学的不同分支。本书对运筹学中的各主要分支进行较详细的讨论，主要内容有：线性规划、运输问题、目标规划、动态规划、整数规划、图与网络、存储论、对策与决策等。

第一章

线性规划

线性规划(Linear Programming)是运筹学中研究得比较早、理论成熟、方法有效、应用广泛的一个重要分支,在运筹学中占有重要的位置。

早在20世纪30年代末,苏联数学家康托洛维奇(Канторвич)在发表的小册子《生产组织与计划中的数学方法》中,首先提出了线性规划模型,这是有关线性规划的最早文献。其后,美国也开始研究这个问题,最有影响的是希契科克研究的运输问题及其解。后来,由于第二次世界大战的需要,军事中有关规划、侦察、后勤、生产等各方面的问题被陆续提出,人们对线性规划问题的求解与应用展开了系统的研究,并于1947年由美国人旦茨格等提出了线性规划的**单纯形算法**,较好地解决了线性规划的求解问题,从而奠定了线性规划作为一门学科的基石。随着电子计算机技术的不断发展,线性规划的求解能力大大提高,更为线性规划在经济等各领域的广泛应用提供了极为有利的条件。线性规划已成为现代化管理的一种重要的手段。

线性规划研究的对象大体可分为两大类:一类是在现有的人、财、物等资源的条件下,研究如何合理地计划、安排,可使得某一目标达到最大,如产量、利润目标等。另一类是在任务确定后,如何计划、安排,使用最少的人、财、物等资源,去实现该任务,如使生产成本、费用最少等。这两类问题从本质上说是相同的,它们都是在一组约束条件下,去实现某一个目标的最优(最大或最小)。线性规划中研究的问题要求目标与约束条件均是线性的,而目标函数只能是一个。对于目标与约束条件非线性的情况,由"非线性规划"问题专门讨论;对于多于一个决策目标的问题,将在"目标规划"中讨论。在经济管理问题中,大量的问题是线性的,从而使线性规划有着极大的应用价值。

第一节　线性规划的数学模型及其标准形式

在本节中,我们先讨论建立决策问题中的数学模型的一般方法,再给出几个线性规划问题的实例,建立它们的数学模型,最后再给出线性规划的标准形式。

一、建立决策问题数学模型的一般方法

建立决策问题数学模型一般可从以下三个方面进行考虑:

1. 确定决策变量

对于一个决策问题,首先要明确的是"要我们决策什么",也就是说,有哪些可供选择的方案。一般来说,一个决策问题总应有一种以上可供选择的方案(如果只能取唯一的决策方案,就不需要做任何讨论了),因此,我们可以将其设成变量,并以变量的不同取值来表示可供选择

的各种不同方案，这些假设的变量称为**决策变量**。

例如，在一个生产计划问题中，需要我们决策某产品的产量，则可将产量设成 x_1；在一个投资决策问题中，需要我们确定某项投资的金额，则可将其设成 x 等。如果某决策问题需的可供选择方案是有限的，则也可将其设成变量 x，并用 x 的不同取值表示不同的方案。例如，某决策问题需要我们确定是上某个项目，还是不上某个项目，则我们可用 $x=0$ 表示不上此项目，用 $x=1$ 表示上某项目。

一个决策问题到底要设多少个决策变量，取决于决策问题的本身，但所有假设的决策变量及其取不同的值，应反映与包含该决策问题所有可供选择的方案，以免在建模计算分析中，遗漏掉最优的决策方案。少设一个决策变量，实际上往往意味着这个变量取值为零；而多设一个决策变量，则其取值可以为零(往往相当于没有这个变量)，也可以不为零，则大大增加了决策方案，给了决策问题更多的机会与选择。当然，过多的决策变量会使数学模型复杂，计算困难。我们必须在两者之间作出合理的选择。计算机技术的飞速发展，使我们求解与分析大型数学模型成为可能，并变得越来越方便。

2. 建立目标函数

作为一个决策问题，在决策者的心目中，必然会有各种决策的目标，如希望产品产量最大、利润最大、成本最低等。而这些目标实现得好坏，取决于采用的决策方案，因此，我们说，决策目标是决策方案的函数，也就是决策变量的函数，称为**目标函数**。作为建立数学模型的第二步，即要对每个决策目标建立目标函数，找到目标值与决策变量的数量关系。本章中讨论的数学模型只含一个目标函数，并且这个函数关系是线性的；至于多个决策目标的数学模型，我们将在第三章中讨论。

3. 确定约束条件

一个决策问题的决策目标一般不可能无限制地被优化。在其实现优化的过程中，必然会受到有关外界条件的制约。例如，一个利润最大化的决策目标，就可能受制于资源的限制、市场容量的限制等；一个成本最小化的决策目标，就可能受制于一定的产量要求等。这些限制往往是决策方案(即决策变量)的等式或不等式，称为**约束条件**。在一个决策问题中，增加一个约束条件，往往会给决策目标带来不利影响，当然也可能没有影响，此时，这个约束条件就会成为多余的了。相反，如果遗漏了一个或几个约束条件，则可能使我们计算出的最优目标最终无法得以实现，因为它不能满足那些遗漏的约束条件。因此，在建立决策问题的数学模型时，我们必须要全面地考虑所有与决策目标有关的约束条件，建立一个完整的数学模型。

在本章线性规划模型中，我们要求模型的所有约束条件也必须是线性的。在经济管理问题中，大量的问题的确都是线性关系的，因此，这种线性的要求并不会妨碍线性规划模型在经济管理中的应用。

二、线性规划问题举例

例 1.1 (生产安排问题) 假定某工厂生产甲、乙、丙三种产品，都要经过三种不同的工序加工。每一件产品所需要的加工时间(分钟)和每天对各道工序的加工能力(每天多少分钟)以及销售各种产品的单位利润如表 1.1 所示。

表 1.1

工 序	每件产品加工时间(分钟)			每天加工能力(分钟)
	甲产品	乙产品	丙产品	
一	1	2	1	430
二	3	0	2	460
三	1	4	0	420
单位利润(元)	3	2	5	

假定所生产的三种产品都能全部售出,问:这三种产品每天要各生产多少件,才能使获得的利润最大?

解 设 x_1, x_2, x_3 是甲、乙、丙三种产品的产量,z 是工厂的总利润。那么:

$$z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

在这里,z 是目标函数,而 x_1, x_2, x_3 是决策变量。由于各种产品在三道工序的加工时间不能超过现有的加工能力,所以:

对于第一道工序,有:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 430$$

对于第二道工序,有:

$$3x_1 + 2x_3 \leqslant 460$$

对于第三道工序,有:

$$x_1 + 4x_2 \leqslant 420$$

这些限制变量的条件都是约束条件。又由于 x_1, x_2, x_3 表示产量,当然有:

$$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0$$

这些称为决策变量的**非负性约束条件**。

所以,这个问题就是要求出 x_1, x_2, x_3,它们满足以上四个约束条件,并使 $z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$ 的值最大。

例 1.2 (营养搭配问题) 如果有甲、乙、丙、丁四种食品,单价各不相同,都含有不同成分的维生素,其含量和单价如表 1.2 所示。

表 1.2

维生素	单位	甲	乙	丙	丁	每人每天最低需要量
A	国际单位	1 000	1 500	1 750	3 250	4 000
B	毫克	0.6	0.27	0.68	0.3	1
C	毫克	17.5	7.5	0	30	30
单价(元)		0.8	0.5	0.9	1.5	

现在我们希望每天得到的维生素不少于所规定的最低需要量,问:应该如何搭配各种食品,才能使所花的费用最少?

解 设 x_1, x_2, x_3, x_4 是每天采购甲、乙、丙、丁四种食品的数量,M 是每天采购食品的费用,那么:

$$M=0.8x_1+0.5x_2+0.9x_3+1.5x_4$$

约束条件：

$$1\,000x_1+1\,500x_2+1\,750x_3+3\,250x_4\geqslant 4\,000$$
$$0.6x_1+0.27x_2+0.68x_3+0.3x_4\geqslant 1$$
$$17.5x_1+7.5x_2+30x_4\geqslant 30$$
$$x_1,x_2,x_3,x_4\geqslant 0$$

所以，这个问题就是要求出 x_1,x_2,x_3,x_4，使它们满足以上的约束条件，并使 M 的值最小。

例 1.3 （切割损失问题） 假定某个造纸厂接到三份订购卷纸的定单，其长和宽的要求如表 1.3 所示。

表 1.3

定单号码	宽（米）	长（米）
1	0.5	1 000
2	0.7	3 000
3	0.9	2 000

该厂生产 1 米和 2 米两种标准宽度的卷纸。假定卷纸的长度无限制，即可以连接起来达到所需要的长度，问：应如何切割才能使切割损失的面积最小？

解 每一种标准卷纸可以有好几种切割的方式。例如，2 米宽的卷纸可以切成四个 0.5 米宽的卷纸，也可以切成两个 0.5 米宽和一个 0.9 米宽的卷纸等。所以，我们要考虑两种标准卷纸在各种切割方式下所产生的切割损失。

设 x_{ij} 是第 i 种标准卷纸按照第 j 种方式的切割的长度。那么，两种标准卷纸所有可能采用的切割方式及其切割损失如表 1.4 所示。

表 1.4

宽度（米）	1 米宽卷纸			2 米宽卷纸						需要量（米）
	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}	
0.5	2	0	0	4	2	2	1	0	0	1 000
0.7	0	1	0	0	1	0	2	1	0	3 000
0.9	0	0	1	0	0	1	0	1	2	2 000
剩余宽度	0	0.3	0.1	0	0.3	0.1	0.1	0.4	0.2	

设 s_1,s_2,s_3 分别是把标准卷纸切成 0.5 米、0.7 米、0.9 米后的剩余长度，而 z 是总的切割损失，于是：

$$z=0.3x_{12}+0.1x_{13}+0.3x_{22}+0.1x_{23}+0.1x_{24}+0.4x_{25}$$
$$+0.2x_{26}+0.5s_1+0.7s_2+0.9s_3$$

约束条件：

$$2x_{11}+4x_{21}+2x_{22}+2x_{23}+x_{24}-s_1=1\,000$$
$$x_{12}+x_{22}+2x_{24}+x_{25}-s_2=3\,000$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{25}+2x_{26}-s_3=2\,000$$

$$x_{ij} \geqslant 0, s_i \geqslant 0, \quad 对一切 i 和 j$$

所以，这个问题就是要求出上面所规定的各个 x_{ij} 和 s_i，它们满足以上的约束条件，并使 z 的值最小。

例 1.4 **（产品配套问题）** 假定一个工厂的甲、乙、丙三个车间生产同一产品，每件产品包括 4 个 A 零件和 3 个 B 零件。这两种零件由两种不同的原材料制成，而这两种原材料的现有数额分别是 100 千克和 200 千克。每个生产班的原材料需要量和零件产量如表 1.5 所示。

表 1.5

车间	每班进料数（千克）		每班产量（个数）	
	第 1 种原材料	第 2 种原材料	A 零件	B 零件
甲	8	6	7	5
乙	5	9	6	9
丙	3	8	8	4

问：这三个车间各应开多少班，才能使这种产品的配套数达到最大？

解 设 x_1, x_2, x_3 是甲、乙、丙三个车间所开的生产班数。

由于原材料的限制，故约束条件是：

$$8x_1+5x_2+3x_3 \leqslant 100$$
$$6x_1+9x_2+8x_3 \leqslant 200$$

这三个车间所生产的 A 零件总数是 $7x_1+6x_2+8x_3$，生产的 B 零件是 $5x_1+9x_2+4x_3$。因为目的是要使产品的配套数最大，而每件产品需要 4 个 A 零件和 3 个 B 零件，所以，产品的最大产量将不超过

$$\frac{7x_1+6x_2+8x_3}{4} 和 \frac{5x_1+9x_2+4x_3}{3}$$

中较小的一个。如果设 z 是产品的配套数，那么：

$$z=\min\left(\frac{7x_1+6x_2+8x_3}{4}, \frac{5x_1+9x_2+4x_3}{3}\right)$$

这个目标函数是非线性的，但可以通过适当的变换把它化为线性的。设

$$y=\min\left(\frac{7x_1+6x_2+8x_3}{4}, \frac{5x_1+9x_2+4x_3}{3}\right)$$

因为事先不知道哪一个比较小，所以上式等价于

$$\frac{7x_1+6x_2+8x_3}{4} \geqslant y 和 \frac{5x_1+9x_2+4x_3}{3} \geqslant y$$

由于在最后装配数 y 达到最大的时候，它的上限是由上面两个不等式中左边较小的一个来确定的，所以，这个问题是求 x_1, x_2, x_3，使 $z=y$ 最大。

约束条件：

$$7x_1+6x_2+8x_3-4y \geqslant 0$$
$$5x_1+9x_2+4x_3-3y \geqslant 0$$
$$8x_1+5x_2+3x_3 \leqslant 100$$
$$6x_1+9x_2+8x_3 \leqslant 200$$
$$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0, y \geqslant 0$$

例 1.5 **（连续投资问题）** 某投资公司有1 000 000元资金用于投资，投资的方案可有以下六种，现要制定一个 5 年期的投资计划，具体可选择的投资方案如下：

方案 A：5 年内的每年年初均可投资，且金额不限，投资期限为 1 年，年投资回报率为 7%。

方案 B：5 年内的每年年初均可投资，且金额不限，投资期限为 2 年，年投资回报率为 10%（不计复利）。

方案 C：5 年内的每年年初均可投资，且金额不限，投资期限为 3 年，年投资回报率为 12%（不计复利）。

方案 D：只在第一年年初有一次投资机会，最大投资金额为500 000元，投资期限为 4 年，年投资回报率为 20%。

方案 E：在第二年和第四年年初有一次投资机会，最大投资金额均为300 000元，投资期限为 1 年，年回报率为 30%。

方案 F：在第四年年初有一次投资机会，金额不限，投资期限为 2 年，年回报率为 25%。

假设当年的投资金额及其收益均可用于下一年的投资，问：公司应如何投资，才能使第五年末收回的资金最多？

解 设 $A_i, B_i, C_i, D_i, E_i, F_i (i=1,2,\cdots,5)$ 分别为第 i 年年初按方案 A,B,C,D,E,F 所投资的金额，z 表示第五年年末收回的总资金。按各方案的投资情况，可归纳成如表 1.6 所示。

表 1.6

第一年年初	第二年年初	第三年年初	第四年年初	第五年年初	第五年年初
A_1	$1.07A_1$				
B_1		$1.2B_1$			
C_1			$1.36C_1$		
D_1				$1.8D_1$	
	A_2	$1.07A_2$			
	B_2		$1.2B_2$		
	C_2			$1.36C_2$	
	E_2	$1.3E_2$			
		A_3	$1.07A_3$		
		B_3		$1.2B_3$	
		C_3			$1.36C_3$
			A_4	$1.07A_4$	
			B_4		$1.2B_4$
			E_4	$1.3E_4$	
			F_4		$1.07F_4$
				A_5	$1.07A_5$

表中箭头的起点表示某方案的投资额，终点表示到某时刻，该投资方案可收回的资金。

因为各年年初收回的资金可用于连续投资，故有：

各年初投资金额＝上年末收回的总金额

所以，此问题的数学模型为“求目标函数的最大值”：

$$z=1.36C_3+1.2B_4+1.5F_4+1.07A_5$$

各年年初投资金额总和约束如下：

$$A_1+B_1+C_1+D_1=1\,000\,000$$
$$A_2+B_2+C_2+E_2-1.07A_1=0$$
$$A_3+B_3+C_3-1.2B_1-1.07A_2-1.3E_2=0$$
$$A_4+B_4+E_4+F_4-1.36C_1-1.2B_2-1.07A_3=0$$
$$A_5-1.8D_1-1.36C_2-1.2B_3-1.07A_4-1.3E_4=0$$

部分投资方案金额约束如下：

$$D_1\leqslant 500\,000$$
$$E_2\leqslant 300\,000$$
$$E_4\leqslant 300\,000$$

决策变量非负约束如下：

$$A_i,B_i,C_i,D_i,E_i,F_i\geqslant 0,\quad i=1,2,3,4,5$$

从以上几个例子中可以看出，尽管它们有不同的决策内容，但归结出的数学模型却十分相似，都是在一组约束条件下来确定决策变量的值，使某个目标函数达到最大值或最小值。而且，所有的约束条件与目标函数都是线性的。这样的数学模型正是我们线性规划所要讨论的。

三、线性规划的标准形式和非标准形式线性规划问题的标准化

1. 线性规划的标准形式

从前面的例子中得出的数学模型仍有许多不同的形式，有的模型是求目标函数的最大值，有的是求最小值；在约束条件中，有的是等式，有的是不等式（≤型和≥型）。这种多样性给我们进一步讨论带来了不便，好在不同模型之间可以通过数学方法进行转换，我们只需讨论其中一种形式的模型，就可以普遍适用于其他模型。故定义线性规划的标准形式如下：

$$\max z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

约束条件：

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m$$
$$x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0$$

且约束条件右边的常数 $b_j\geqslant 0, j=1,2,\cdots,m.$

在标准形式中，我们要求目标函数是线性的，并且是求最大值，所有的约束条件（除决策变量为非负约束）也是线性的，且都是等式，等式右边的常数项非负（$b_j\geqslant 0$），所有的决策变量非负（$x_i\geqslant 0$）。

在线性规划的标准形式中，其约束条件就是一个线性方程组，求解一个线性规划问题，也就是在约束条件方程组的非负解（因决策变量是非负的）中，寻找使目标函数值达到最大值的解。由于在线性代数中，对解线性方程组已经有了很好的办法，这为我们求解线性规划模型提供了良好的基础。

线性规划的标准形式可简记为：

$$\max z=\sum_{i=1}^{n}c_ix_i$$

约束条件：