



金榜图书

JINBANG BOOKS · SINCE 1997



全国十二大考研辅导机构指定用书
全国硕士研究生入学统一考试

考研数学

真题中的典型题

KAOYAN SHUXUE ZHENTIZHONGDE DIANXINGTI

主 编◎杨 超 方 浩 张 帆
副主编◎张清芳 李家雄 张 现

- ★ 积累知识 夯实基础
- ★ 典型真题 精准把脉
- ★ 掌握方法 规范答题
- ★ 查漏补缺 提升水平



北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

014035633



金榜图书

JINBANG BOOKS · SINCE 1997

013-44
523

全国十二大考研辅导机构指定用书
全国硕士研究生入学统一考试

考研数学

真题中的典型题

KAOYAN SHUXUE ZHENTIZHONGDE DIANXINGTI

主 编◎杨 超 方 浩 张 帆
副主编◎张清芳 李家雄 张 现



北航

C1722994



北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

013-44

523

版权专有 侵权必究

图书在版编目(CIP)数据

考研数学真题中的典型题 / 杨超, 方浩, 张帆主编. —北京: 北京理工大学出版社, 2013.10

ISBN 978-7-5640-8353-3

I. ①考… II. ①杨… ②方… ③张… III. ①高等数学—研究生—入学考试—题解 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 221680 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010)68914775 (总编室)

82562903 (教材售后服务热线)

68948351 (其他图书服务热线)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 保定市市中画美凯印刷有限公司

开 本 / 710 毫米×1000 毫米 1/16

印 张 / 15.25

字 数 / 360 千字

版 次 / 2013 年 10 月第 1 版 2013 年 10 月第 1 次印刷

定 价 / 32.00 元

责任编辑 / 张慧峰

文稿编辑 / 张慧峰

责任校对 / 周瑞红

责任印制 / 边心超

图书出现印装质量问题, 请拨打售后服务热线, 本社负责调换

前言

致考研的朋友们：

对于参加研究生入学考试的同学们，数学成绩往往对于考研的结果起到决定性的作用。数学成绩的提高不仅要靠我们对考试大纲规定的基本概念，基本方法的复习和巩固，更依赖于我们对历年真题的命题规律和出题点的分析，总结，归纳，演练。考研的数学是一门选拔性较强的考试，其整体要求要高于教材，但是考研数学试题重点突出，考点重复性极高，例如 2009—2013 年 5 年考试数学一的试卷中，高等数学部分的多元函数极值问题，以及概率统计部分的最大似然估计问题分别作为解答题都在 5 年试卷中考察了 4 次之多。因此考研数学的历年真题是我们在复习过程中最重要的备考指南针和习题集。能与历年真题命题思路相结合，才能准确的抓住各部分复习的重难点，在考场上做到胸有成竹。

一本好的考研数学真题解析资料对于广大考生来说十分必要，为了引领广大考生们的复习方向，准确把握考研数学的命题思路，提高复习效率，笔者根据自己多年从事数学教学与科研的经验，以及对考研数学命题规律的剖析特意编写了本教材。

本教材根据最新考试大纲编写而成，结构严谨，内容详实，详细归纳和讲解了考研数学各个卷种的典型真题。本书在研究历年真题的基础上，对考试知识点一一剖析，在详细介绍相关知识的考法，解法，学习方法。总结归纳了重点题型和解题思路，力争使考生在短时间内尽快掌握考研数学命题规律，有的放矢地复习，提高应试得分能力！

希望广大考生朋友们，以真题命题规律为指引，以典型真题为复习方向，夙夜在公，勤勉工作，在考研中取得好的成绩，向自己和未来交上一份合格的答卷！

由于编者的水平有限，书中疏漏和不足之处在所难免，敬请广大考生及同仁批评指正。

编者
于北京大学燕北园

目 录

高等数学

第一章 函数 极限 连续	3
一、函数极限的求法	3
二、数列的极限	9
三、无穷小的阶的比较	12
四、已知极限,反求参数	15
五、函数的连续性与间断点	17
第二章 微分法	20
一、一组重要概念(导数、微分、偏导数、全微分)的考察	20
二、复合函数微分法	27
三、隐函数的微分法	30
四、参数方程所表示的函数的微分法	33
五、反函数与某些简单函数的 n 阶导数	34
第三章 微分学的应用	35
一、导数的几何意义	35
二、导数的经济意义(仅数三)	37
二、函数性态的研究	38
三、一元函数的极值与最值	40
四、多元函数的极值与最值	42
五、切线的切平面与曲面的切平面(仅数一)	45
第四章 一元函数积分学	47
一、不定积分的计算	47
二、定积分的计算	50

三、定积分的性质	52
四、有关积分学的综合题	54
五、定积分的应用	56
第五章 微积分的证明题	62
一、零点问题	62
二、中值问题	64
三、泰勒公式	70
四、不等式的证明	73
五、积分不等式的证明	75
第六章 常微分方程	79
一、一阶微分方程	79
二、高阶线性常系数微分方程	82
三、可降阶方程的解法	86
四、差分方程(仅数三)	87
五、微分方程的应用	88
第七章 二重积分	92
一、二重积分的概念及其性质	92
二、二重积分的计算	93
第八章 向量代数与空间解析几何(仅数一)	99
一、平面方程	99
二、平面与直线位置关系	100
三、旋转面	100
第九章 三重积分、曲线、曲面积分(仅数一)	103
一、三重积分的计算	103
二、I 型曲线积分	105
三、II 型曲线积分	106
四、曲线积分综合题	107
五、I 型曲面积分	110

第十章 无穷级数	115
一、数项级数的收敛性	115
二、幂级数的收敛域及求和	119
三、函数展开幂级数	126
四、有关级数的证明题(仅数一)	127
五、傅里叶级数(仅数一)	128

线性代数

第一章 行列式	133
一、本章命题规律	133
二、本章在历年真题中分值分布情况	133
三、本章重要题型	133
第二章 矩阵	138
一、本章命题规律	138
二、本章在历年真题中分值分布情况	138
三、本章重要题型	138
第三章 向 量	146
一、本章命题规律	146
二、本章在历年真题中分值分布情况	146
三、本章重要题型	147
第四章 线性方程组	155
一、本章命题规律	155
二、本章在历年真题中分值分布情况	155
三、本章重要题型	156
第五章 矩阵的特征值和特征向量	167
一、本章命题规律	167
二、本章在历年真题中分值分布情况	167
三、本章重要题型	168

第六章 二次型	177
一、本章命题规律	177
二、本章在历年真题中分值分布情况	177
三、本章重要题型	178

概率论与数理统计

第一章 随机事件与概率	187
一、本章在历年真题中的分值分布情况	187
二、题型与解题方法归纳	187
第二章 随机变量及其分布	192
一、本章在历年真题中的分值分布情况	192
二、题型与解题方法归纳	192
第三章 随机变量的数字特征	214
一、本章在历年真题中的分值分布情况	214
二、题型与解题方法归纳	214
第四章 大数定律与中心极限定理	223
一、本章在历年真题中的分值分布情况	223
二、题型与解题方法归纳	223
第五章 数理统计的基本概念	226
一、本章在历年真题中的分值分布情况	226
二、题型与解题方法归纳	226
第六章 参数估计与假设检验	231
一、本章在历年真题中的分值分布情况	231
二、题型与解题方法归纳	231

高等数学



第一章 函数 极限 连续

本章在历年真题中的分值分布情况

年份	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995
数一	8	5	0	6	8	8	8	8	3
数二	16	17	10	14	8	17	11	6	11
数三	8	6	8	9	8	8	3	5	0

年份	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
数一	11	3	9	3	5	0	16	8	12
数二	14	14	16	18	9	16	8	18	14
数三	0	0	3	0	3	0	8	12	20

年份	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
数一	0	15	4	13	4	8	20	0	4
数二	19	26	12	21	17	8	28	28	29
数三	12	4	8	17	12	18	14	14	18

一、函数极限的求法

七种未定式 $\frac{0}{0}$ 、 $\frac{\infty}{\infty}$ 、 $\infty - \infty$ 、 $0 \cdot \infty$ 、 1^∞ 、 ∞^0 、 0^0 的极限

常见方法:① 洛必达法则

② 等价无穷小代换

③ 两个重要极限

④ 泰勒公式

例 1 (1998, ①②, 3 分) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $-\frac{1}{4}$

【解析】 这是 $\frac{0}{0}$ 型, 用洛必达法则及分子有理化, 有

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x) - (1+x)}{4x(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})} = -\frac{1}{4}.$$

例 2 (1992, ②, 3 分) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{e^x - \cos x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 0

【解析】 利用无穷小量代换注意到 $\sqrt{1 - x^2} - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2$, 有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{e^x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{e^x - \cos x} \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x + \sin x} = 0.$$

例 3 (2000, ②, 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{\ln(1 + 2x^3)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $-\frac{1}{6}$

【解析】 注意到, $\ln(1 + t) \sim t (t \rightarrow 0)$, 有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{\ln(1 + 2x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - 1}{6x^2} = -\frac{1}{6}.$$

例 4 (2009, ③, 4 分) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1 + x^2} - 1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{3}{2}e$

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1 + x^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e(1 - e^{\cos x - 1})}{\sqrt[3]{1 + x^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e(1 - \cos x)}{\frac{1}{3}x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e \cdot \frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{3}x^2} = \frac{3}{2}e$

例 5 (2012, ③, 10 分) 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - e^{2-2\cos x}}{x^4}$

【解析】方法一: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - e^{2-2\cos x}}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2 - (2-2\cos x)} - 1}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2 + 2\cos x}{x^4}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2 + 2\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right) + o(x^4)}{x^4} = \frac{1}{12}.$$

方法二: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - e^{2-2\cos x}}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2 - (2-2\cos x)} - 1}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2 + 2\cos x}{x^4}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{6x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{6x^2} = \frac{1}{12}.$$

【注】例 2—例 5 主要用了等价无穷小代换求极限, 应熟记几个常见的等价无穷小公式:

当 $x \rightarrow 0$, $\sin x \sim x$, $\tan x \sim x$, $\arcsin x \sim x$, $\arctan x \sim x$, $e^x - 1 \sim x$, $\ln(1 + x) \sim x$, $a^x - 1 \sim x \ln a$,
 $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, $(1 + x)^a - 1 \sim ax$.

一定要把公式广义化, 而且常见的变形要学会, 例如:

当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \rightarrow 0$, 那么 $\ln(1 + f(x)) \sim f(x)$;

当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \rightarrow 1$, $\ln(f(x)) = \ln(1 + (f(x) - 1)) \sim (f(x) - 1)$;

一般来说, 考题不会直接考: 当 $x \rightarrow 0$ 时, $e^x - 1 \sim x$, 经常以“ $e^{f(x)} - e^{g(x)}$ ”形式出现, 比如: 例

4、例 5.

例 6 (2008, ①②, 9 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x [\sin x - \sin(\sin x)]}{x^4}$

【解析】 因 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x \rightarrow 0$, 由 $x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3$,

得 $\sin x - \sin(\sin x) \sim \frac{1}{6}\sin^3 x$

故原极限 $= \frac{1}{6}$

【注】 本题解法很多, 可以用洛必达法则, 等价无穷小代换等, 给出的解析主要利用了泰勒公式, 更大程度的简化计算.

$\sin x$ 的泰勒公式可以写为: $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3), (x \rightarrow 0)$ ①

移项可得, $x - \sin x = \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$

从而, 可以得出 $x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3, x \rightarrow 0$

同理, 当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \quad ②$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \quad ③$$

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \quad ④$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \quad ⑤$$

故可以得到一组差函数的等价无穷小.

$\arcsin x - x \sim \frac{1}{6}x^3, \tan x - x \sim \frac{1}{3}x^3, x - \arctan x \sim \frac{1}{3}x^3, x - \ln(1+x) \sim \frac{1}{2}$ 等.

这些差函数的等价无穷小, 我们要熟记灵活运用.

例 7 (1997, ②, 5 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$

【解析】 这是 $\frac{\infty}{\infty}$ 型, 分子、分母同除 $\sqrt{x^2}$, 注意 $\sqrt{x^2} = -x (x < 0)$, 则

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} - 1 - \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{\sin x}{x^2}}} = \frac{\sqrt{4-1}-1}{1} = 1$$

例 8 (1993, ②, 3 分) $\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 0

【解析】 这是 $0 \cdot \infty$ 型, 可化为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型, 有 $\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = 0$.

例 9 (1996, ②, 3 分) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\sin \ln \left(1 + \frac{3}{x} \right) - \sin \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right] = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】2

【解析】考虑变量代换 $t = \frac{1}{x}$, 再用洛必达法则有

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \ln(1+3t) - \sin \ln(1+t)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \cos[\ln(1+3t)] \cdot \frac{3}{1+3t} - \cos[\ln(1+t)] \cdot \frac{1}{1+t} \right\} = 2. \end{aligned}$$

❖例10 (2004, ②, 10分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left[\left(\frac{2+\cos x}{3} \right)^x - 1 \right]$

【解析】当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$\begin{aligned} \left(\frac{2+\cos x}{3} \right)^x - 1 &= e^{x \ln \frac{2+\cos x}{3}} - 1 \sim x \ln \frac{2+\cos x}{3} = x \ln \left(1 + \frac{\cos x - 1}{3} \right) \\ &\sim x \cdot \frac{\cos x - 1}{3} \sim -\frac{1}{6} x^3 \end{aligned}$$

故原极限 $= -\frac{1}{6}$

❖例11 (1999, ①, 3分) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \tan x} \right)$ _____.

【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】这是 $\infty - \infty$ 型, 先将式子通分, 再用无穷小量代换 ($\tan x \sim x$) 及洛必达法则可有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \tan x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^2 \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}.$$

❖例12 (1991, ③, 5分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} \right)^{\frac{1}{x}}$, 其中 n 是给定的自然数.

【解析】方法一: 这是“ 1^∞ ”型未定式极限.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln \left(\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} \right) \cdot \frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left(\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}) - \ln n}{x}}$$

其中指数上的极限是 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 由洛必达法则, 有

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}) - \ln n}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 2e^{2x} + \cdots + ne^{nx}}{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}} = \frac{1+2+\cdots+n}{n} = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}. \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} \right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{n+1}{2}}.$$

方法二: 由于

$$\left(\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} \right)^{\frac{1}{x}} = \left(1 + \frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} - 1 \right)^{\frac{1}{x}}$$

又因

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1) + (e^{2x} - 1) + \cdots + (e^{nx} - 1)}{nx} \\ &= \frac{1}{n} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} + \cdots + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{nx} - 1}{x} \right] = \frac{1}{n} (1 + 2 + \cdots + n) = \frac{n+1}{2}. \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} \right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{n+1}{2}}.$$

例13 (2012, ②, 4分) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\frac{1}{\cos x - \sin x}} =$ _____

【答案】 $e^{-\sqrt{2}}$

【解析】 因为: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{\cos x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos x (\cos x - \sin x)} = -\sqrt{2}$,

所以: 原式 $= e^{-\sqrt{2}}$.

【注】 若 $\lim \alpha(x) = 0$, $\lim \beta(x) = \infty$, 且 $\lim \alpha(x)\beta(x) = A$, 则 $\lim (1 + \alpha(x))^{\beta(x)} = e^A$, 此结论在求“ 1^∞ ”型未定式极限时可以直接用. 比如: 例 12、例 13.

例14 (1988, ②, 3分) $\lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\tan x} =$ _____.

【答案】 1

【解析】 这是“ ∞^0 ”型未定式极限

$$\text{原式} = \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow +0} \left(\tan x \cdot \ln \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \right\} = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +0} x \ln x \right\} = e^0 = 1.$$

这里利用到 $\tan x \sim x$, 当 $x \rightarrow 0$ 时.

例15 (2000, ①, 5分) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right)$.

【解析】 因 $\lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{2e^{-\frac{x}{4}} + e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}} + 1} + \frac{\sin x}{x} \right) = 1$,

及 $\lim_{x \rightarrow -0} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} - \frac{\sin x}{x} \right) = 2 - 1 = 1$,

故 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = 1$.

【注】 本题主要考察的左、右极限.

求极限时需考虑左右极限的几种函数:

① $x \rightarrow \infty$ 时, 极限式子含 e^x (或 $x \rightarrow 0$ 时, 式子含 $e^{\frac{1}{x}}$)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0; \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$$

② $x \rightarrow \infty$ 时, 式子含 $\arctan x$ 或 $\operatorname{arccot} x$ (或 $x \rightarrow 0$ 时, 式子含 $\arctan \frac{1}{x}$ 或 $\operatorname{arccot} \frac{1}{x}$ 的函数)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}, \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}; \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arccot} x = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccot} x = \pi$$

③ 含偶次方根的函数

注意当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $\sqrt{x^2} = -x$

④ 极限式子有 $[]$ 取整函数.

两个有关取整函数的结论: ① $x - 1 < [x] \leq x$; ② $\lim_{x \rightarrow 0^+} [x] = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} [x] = -1$.

⑤ 含绝对值函数 $|x - x_0|$ 在 x_0 点处

⑥ 分段函数在分段点处

有两种情况: i) 分段点两侧函数式不同, 一定用单侧极限求极限. ii) 分段点两侧用同一函数表示, 有的不用, 有的用.

例16 (1997, ①, 3分) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{(1 + \cos x) \ln(1 + x)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\frac{3}{2}$

【解析】 原式 $= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin x}{x} + \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} = \frac{3}{2}.$

【注】 本题虽然是 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 但不能用洛必达法则.

例17 (2000, ②, 3分) 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = 0$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2}$

【解析】 方法一: 因 $\sin 6x = 6x - \frac{1}{6}(6x)^3 + o(x^3)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - 36x^3 + o(x^3) + xf(x)}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x + xf(x) - 36x^3 + o(x^3)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{6 + f(x)}{x^2} - 36 \right) = 0 \end{aligned}$$

故 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2} = 36$

方法二: 利用函数、极限、无穷小关系定理:

因 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = 0$, 得 $\frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = 0 + \alpha(x)$

其中 $\alpha(x)$ 为 $x \rightarrow 0$ 时的无穷小量.

从而 $f(x) = \frac{x^3 \alpha(x) - \sin 6x}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3 \alpha(x) - \sin 6x}{x} + 6}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - \sin 6x + x^3 \alpha(x)}{x^3} = 36$$

方法三: 把抽象函数去掉:

设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x + xf(x)}{x^3} = A$ ①

又因 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = 0$ ②

$$\text{①} - \text{②} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - \sin 6x}{x^3} = A = 36$$

因 $6x - \sin 6x \sim \frac{1}{6} \times (6x)^3 = 36x^3$

例18 (2005, ②, 11分) 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f(0) \neq 0$, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x \int_0^x f(x-t)dt}$

【解析】 因 $\int_0^x f(x-t)dt \xrightarrow{x-t=u} \int_x^0 f(u)(-du) = \int_0^x f(u)du$, 故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x \int_0^x f(x-t)dt} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt}{x \int_0^x f(u)du}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt + xf(x) - xf(x)}{\int_0^x f(u) du + xf(x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{\int_0^x f(u) du + xf(x)} \xrightarrow{\text{积分中值定理}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(\xi)}{xf(\xi) + xf(x)} \\
&= \frac{f(0)}{f(0) + f(0)} = \frac{1}{2} \quad (\text{因 } x \rightarrow 0 \text{ 时, } \xi \rightarrow 0, \text{ 且 } f(x) \text{ 为连续函数})
\end{aligned}$$

例19 (2002, ③, 5分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \left[\int_0^u \arctan(1+t) dt \right] du}{x(1 - \cos x)}$.

【解析】 原式 $= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \left[\int_0^u \arctan(1+t) dt \right] du}{x^3} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \arctan(1+t) dt}{3x^2}$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \arctan(1+x^2)}{6x} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6}.$$

二、数列的极限

1. 通项为 n 项和的极限

常用方法: ① 定积分定义

② 夹逼准则

例1 (2002, ②, 3分) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{1 + \cos \frac{\pi}{n}} + \sqrt{1 + \cos^2 \frac{2\pi}{n}} + \cdots + \sqrt{1 + \cos \frac{n\pi}{n}} \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$

【解析】 原极限 $= \int_0^1 \sqrt{1 + \cos \pi x} dx = \int_0^1 \sqrt{2 \cos^2 \frac{\pi x}{2}} dx = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$

例2 (2004, ②, 4分) $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2 \cdots \left(1 + \frac{n}{n}\right)^2}$ 等于 ()

A. $\int_1^2 \ln^2 x dx$

B. $2 \int_1^2 \ln x dx$

C. $2 \int_1^2 \ln(1+x) dx$

D. $\int_1^2 \ln^2(1+x) dx$

【答案】 B

【解析】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2 \cdots \left(1 + \frac{n}{n}\right)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n}\right) \right]^{\frac{2}{n}}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \left[\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln \left(1 + \frac{2}{n}\right) + \cdots + \ln \left(1 + \frac{n}{n}\right) \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \frac{i}{n}\right) = 2 \int_1^2 \ln x dx.$$

故选 B.

例3 (2010, ①②, 4分) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}$ 等于 ()