金榜图书
JINBANG BOOKS · SINCE 1997

全国十二大考研辅导机构指定用书

全国硕士研究生入学统一考试

考研数学
真题中的典型题

KAOYAN SHUXUE ZHENTIZHONGDE DIANXINGTI

主　编◎杨　超　方　浩　张　帆
副主编◎张清芳　李家雄　张　现

★ 积累知识 夯实基础
★ 典型真题 精准把脉
★ 掌握方法 规范答题
★ 查漏补缺 提升水平

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

金榜图书
JINBANG BOOKS · SINCE 1997

全国十二大考研辅导机构指定用书

全国硕士研究生入学统一考试

考研数学
真题中的典型题

KAOYAN SHUXUE ZHENTIZHONGDE DIANXINGTI

主　编◎杨　超　方　浩　张　帆
副主编◎张清芳　李家雄　张　现

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目（CIP）数据

考研数学真题中的典型题 / 杨超，方浩，张帆主编. —北京：北京理工大学出版社，2013.10

ISBN 978-7-5640-8353-3

Ⅰ. ①考… Ⅱ. ①杨… ②方… ③张… Ⅲ. ①高等数学—研究生—入学考试—题解 Ⅳ. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 221680 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司

社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮　　编 / 100081

电　　话 / (010)68914775（总编室）

82562903（教材售后服务热线）

68948351（其他图书服务热线）

网　　址 / http://www.bitpress.com.cn

经　　销 / 全国各地新华书店

印　　刷 / 保定市中画美凯印刷有限公司

开　　本 / 710 毫米×1000 毫米　1/16

印　　张 / 15.25

字　　数 / 360 千字

版　　次 / 2013 年 10 月第 1 版　2013 年 10 月第 1 次印刷

定　　价 / 32.00 元

责任编辑 / 张慧峰

文稿编辑 / 张慧峰

责任校对 / 周瑞红

责任印制 / 边心超

前 言

致考研的朋友们：

对于参加研究生入学考试的同学们，数学成绩往往对于考研的结果取到决定性的作用。数学成绩的提高不仅要靠我们对考试大纲规定的基本概念，基本方法的复习和巩固，更依赖于我们对历年真题的命题规律和出题点的分析，总结，归纳，演练。考研的数学是一门选拔性较强的考试，其整体要求要高于教材，但是考研数学试题重点突出，考点重复性极高，例如2009—2013年5年考试数学一的试卷中，高等数学部分的多元函数极值问题，以及概率统计部分的最大似然估计问题分别作为解答题都在5年试卷中考察了4次之多。因此考研数学的历年真题是我们在复习过程中最重要的备考指南针和习题集。能与历年真题命题思路相结合，才能准确的抓住各部分复习的重难点，在考场上做到胸有成竹。

一本好的考研数学真题解析资料对于广大考生来说十分必要，为了引领广大考生们的复习方向，准确把握考研数学的命题思路，提高复习效率，笔者根据自己多年从事数学教学与科研的经验，以及对考研数学命题规律的剖析特意编写了本教材。

本教材根据最新考试大纲编写而成，结构严谨，内容详实，详细归纳和讲解了考研数学各个卷种的典型真题。本书在研究历年真题的基础上，对考试知识点一一剖析，在详细介绍相关知识点的考法，解法，学习方法。总结归纳了重点题型和解题思路，力争使考生在短时间内尽快掌握考研数学命题规律，有的放矢地复习，提高应试得分能力！

希望广大考生朋友们，以真题命题规律为指引，以典型真题为复习方向，夙夜在公，勤勉工作，在考研中取得好的成绩，向自己和未来交上一份合格的答卷！

由于编者的水平有限，书中疏漏和不足之处在所难免，敬请广大考生及同仁批评指正。

编 者

于北京大学燕北园

目 录

高等数学

线性代数

概率论与数理统计

高等数学

第一章 函数 极限 连续

本章在历年真题中的分值分布情况

年份	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995
数一	8	5	0	6	8	8	8	8	3
数二	16	17	10	14	8	17	11	6	11
数三	8	6	8	9	8	8	3	5	0

年份	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
数一	11	3	9	3	5	0	16	8	12
数二	14	14	16	18	9	16	8	18	14
数三	0	0	3	0	3	0	8	12	20

年份	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
数一	0	15	4	13	4	8	20	0	4
数二	19	26	12	21	17	8	28	28	29
数三	12	4	8	17	12	18	14	14	18

一、函数极限的求法

七种未定式$\frac{0}{0}$、$\frac{\infty}{\infty}$、$\infty-\infty$、$0\cdot\infty$、1^{∞}、∞^{0}、0^{0} 的极限

常见方法：① 洛必达法则

② 等价无穷小代换

③ 两个重要极限

④ 泰勒公式

例 1 (1998,①②,3 分)$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=$________.

【答案】 $-\frac{1}{4}$

【解析】 这是$\frac{0}{0}$型，用洛必达法则及分子有理化，有

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{4x}=\lim_{x\to0}\frac{(1-x)-(1+x)}{4x(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})}=-\frac{1}{4}.$$

例 2 (1992,②,3 分)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{e^x-\cos x}$ ________.

【答案】 0

【解析】 利用无穷小量代换注意到 $\sqrt{1-x^2}-1\sim-\dfrac{1}{2}x^2$,有

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{e^x-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{e^x-\cos x}\overset{洛}{=}\lim_{x\to0}\frac{x}{e^x+\sin x}=0.$$

例 3 (2000,②,3)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x-x}{\ln(1+2x^3)}=$ ________.

【答案】 $-\dfrac{1}{6}$

【解析】 注意到,$\ln(1+t)\sim t(t\to0)$,有

$$\lim_{x\to0}\frac{\arctan x-x}{\ln(1+2x^3)}=\lim_{x\to0}\frac{\arctan x-x}{2x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x^2}-1}{6x^2}=-\frac{1}{6}.$$

例 4 (2009,③,4 分)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=$ ____________.

【答案】 $\dfrac{3}{2}e$

【解析】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e(1-e^{\cos x-1})}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e(1-\cos x)}{\frac{1}{3}x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e\cdot\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{3}x^2}=\dfrac{3}{2}e$

例 5 (2012,③,10 分)计算$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}$

【解析】方法一: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2-2\cos x}(e^{x^2-(2-2\cos x)}-1)}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-2+2\cos x}{x^4}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2-2+2\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\right)+o(x^4)}{x^4}=\frac{1}{12}.$$

方法二: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2-2\cos x}(e^{x^2-(2-2\cos x)}-1)}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-2+2\cos x}{x^4}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{2x^3}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{6x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{6x^2}=\frac{1}{12}.$$

【注】 例 2—例 5 主要用了等价无穷小代换求极限,应熟记几个常见的等价无穷小公式:

当 $x\to0$,$\sin x\sim x$,$\tan x\sim x$,$\arcsin x\sim x$,$\arctan x\sim x$,$e^x-1\sim x$,$\ln(1+x)\sim x$,$a^x-1\sim x\ln a$,$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$,$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$.

一定要把公式广义化,而且常见的变形要学会,例如:

当 $x\to0$ 时,$f(x)\to0$,那么 $\ln(1+f(x))\sim f(x)$;

当 $x\to0$ 时,$f(x)\to1$,$\ln(f(x))=\ln(1+(f(x)-1))\sim(f(x)-1)$;

一般来说,考题不会直接考:当 $x\to0$ 时,$e^x-1\sim x$,经常以“$e^{f(x)}-e^{g(x)}$”形式出现,比如:例 4、例 5.

例 6 (2008,①②,9 分)求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x[\sin x-\sin(\sin x)]}{x^4}$

【解析】因 $x\to 0$ 时,$\sin x\to 0$,由 $x-\sin x\sim\dfrac{1}{6}x^3$,

得
$$\sin x-\sin(\sin x)\sim\frac{1}{6}\sin^3 x$$

故原极限$=\dfrac{1}{6}$

【注】本题解法很多,可以用洛必达法则,等价无穷小代换等,给出的解析主要利用了泰勒公式,更大程度的简化计算.

$\sin x$ 的泰勒公式可以写为:$\sin x=x-\dfrac{1}{3!}x^3+0(x^3),(x\to 0)$　　①

移项可得,
$$x-\sin x=\frac{1}{6}x^3+0(x^3)$$

从而,可以得出
$$x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3,x\to 0$$

同理,当 $x\to 0$ 时,

$$\arcsin x=x+\frac{1}{6}x^3+0(x^3)\qquad ②$$

$$\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+0(x^3)\qquad ③$$

$$\arctan x=x-\frac{1}{3}x^3+0(x^3)\qquad ④$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+0(x^2)\qquad ⑤$$

故可以得到一组差函数的等价无穷小.

$\arcsin x-x\sim\dfrac{1}{6}x^3$,$\tan x-x\sim\dfrac{1}{3}x^3$,$x-\arctan x\sim\dfrac{1}{3}x^3$,$x-\ln(1+x)\sim\dfrac{1}{2}$等.

这些差函数的等价无穷小,我们要熟记灵活运用.

例 7 (1997,②,5 分)求极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$

【解析】这是$\dfrac{\infty}{\infty}$型,分子、分母同除 $\sqrt{x^2}$,注意 $\sqrt{x^2}=-x(x<0)$,则

$$原式=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}-1-\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{\sin x}{x^2}}}=\frac{\sqrt{4}-1}{1}=1$$

例 8 (1993,②,3 分) $\lim\limits_{x\to+0}x\ln x=$________.

【答案】0

【解析】这是 $0\cdot\infty$型,可化为$\dfrac{\infty}{\infty}$型,有 $\lim\limits_{x\to+0}x\ln x=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{-1}{x^2}}=0.$

例 9 (1996,②,3 分) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\sin\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)-\sin\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]=$________.

【答案】2

【解析】考虑变量代换 $t=\dfrac{1}{x}$，再用洛必达法则有

$$原式=\lim_{t\to 0}\frac{\sin\ln(1+3t)-\sin\ln(1+t)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\left\{\cos[\ln(1+3t)]\cdot\frac{3}{1+3t}-\cos[\ln(1+t)]\cdot\frac{1}{1+t}\right\}=2.$$

例10（2004，②，10 分）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$

【解析】当 $x\to 0$ 时，

$$\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1=e^{x\ln\frac{2+\cos x}{3}}-1\sim x\ln\frac{2+\cos x}{3}=x\ln\left(1+\frac{\cos x-1}{3}\right)$$

$$\sim x\cdot\frac{\cos x-1}{3}\sim-\frac{1}{6}x^3$$

故原极限 $=-\dfrac{1}{6}$

例11（1999，①，3 分）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x}\right)$________.

【答案】$\dfrac{1}{3}$

【解析】这是 $\infty-\infty$ 型，先将式子通分，再用无穷小量代换（$\tan x\sim x$）及洛必达法则可有

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^2\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2x-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2}=\frac{1}{3}.$$

例12（1991，③，5 分）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$，其中 n 是给定的自然数.

【解析】方法一：这是“1^∞”型未定式极限.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}e^{\ln\left(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx})-\ln n}{x}}$$

其中指数上的极限是 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式，由洛必达法则，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx})-\ln n}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+2e^{2x}+\cdots+ne^{nx}}{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}=\frac{1+2+\cdots+n}{n}=\frac{n(n+1)}{2n}=\frac{n+1}{2}.$$

所以
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{n+1}{2}}.$$

方法二：由于
$$\left(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=\left(1+\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}-1\right)^{\frac{1}{x}}$$

又因
$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)+(e^{2x}-1)+\cdots+(e^{nx}-1)}{nx}$$

$$=\frac{1}{n}\left[\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}+\cdots+\lim_{x\to 0}\frac{e^{nx}-1}{x}\right]=\frac{1}{n}(1+2+\cdots+n)=\frac{n+1}{2}.$$

所以
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{n+1}{2}}.$$

例13(2012,②,4 分)$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}=$________

【答案】$e^{-\sqrt{2}}$

【解析】因为:$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x-1}{\cos x-\sin x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\cos x(\cos x-\sin x)}=-\sqrt{2}$,

所以:原式$=e^{-\sqrt{2}}$.

【注】若$\lim\alpha(x)=0,\lim\beta(x)=\infty$,且$\lim\alpha(x)\beta(x)=A$,则$\lim(1+\alpha(x))^{\beta(x)}=e^{A}$,此结论在求"$1^{\infty}$"型未定式极限时可以直接用.比如:例 12、例 13.

例14(1988,②,3 分)$\lim\limits_{x\to+0}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\tan x}=$________.

【答案】1

【解析】这是"∞^0"型未定式极限

原式$=\exp\left\{\lim\limits_{x\to+0}\left(\tan x\cdot\ln\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\right\}=\exp\left\{-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to+0}x\ln x\right\}=e^0=1$.

这里利用到 $\tan x\sim x$,当 $x\to0$ 时.

例15(2000,①,5 分)求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

【解析】因 $$\lim_{x\to+0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to+0}\left(\frac{2e^{-\frac{x}{4}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\frac{\sin x}{x}\right)=1,$$

及 $$\lim_{x\to-0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=2-1=1,$$

故 $$\lim_{x\to0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=1.$$

【注】本题主要考察的左、右极限.

求极限时需考虑左右极限的几种函数:

①$x\to\infty$时,极限式子含 e^x(或 $x\to0$ 时,式子含 $e^{\frac{1}{x}}$)

$$\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty,\ \lim_{x\to-\infty}e^x=0;\ \lim_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty,\ \lim_{x\to0^-}e^x=0$$

②$x\to\infty$时,式子含 $\arctan x$ 或 $\operatorname{arccot} x$(或 $x\to0$ 时,式子含 $\arctan\dfrac{1}{x}$或 $\operatorname{arccot}\dfrac{1}{x}$的函数)

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},\ \lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2};\ \lim_{x\to+\infty}\operatorname{arccot}x=0,\ \lim_{x\to-\infty}\operatorname{arccot}x=\pi$$

③含偶次方根的函数

注意当 $x\to-\infty$时,$\sqrt{x^2}=-x$

④极限式子有[ ]取整函数.

两个有关取整函数的结论:①$x-1<[x]\leqslant x$;② $\lim\limits_{x\to0^+}[x]=0$;$\lim\limits_{x\to0^-}[x]=-1$.

⑤含绝对值函数$|x-x_0|$在 x_0 点处

⑥分段函数在分段点处

有两种情况:ⅰ)分段点二侧函数式不同,一定用单侧极限求极限. ⅱ)分段点两侧用同一函数表示,有的不用,有的用.

例16(1997,①,3 分)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=$______.

【答案】$\dfrac{3}{2}$

【解析】原式$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x}{x}+\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}x\cos\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{2}$.

【注】本题虽然是$\dfrac{0}{0}$型未定式,但不能用洛必达法则.

例17(2000,②,3 分)已知$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin6x+xf(x)}{x^3}=0$,求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$

【解析】方法一:因 $\sin6x=6x-\dfrac{1}{6}(6x)^3+o(x^3)$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin6x+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{6x-36x^3+o(x^3)+xf(x)}{x^3}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{6x+xf(x)-36x^3+o(x^3)}{x^3}=\lim_{x\to0}\left(\frac{6+f(x)}{x^2}-36\right)=0$$

故
$$\lim_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}=36$$

方法二:利用函数、极限、无穷小关系定理:

因$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin6x+xf(x)}{x^3}=0$,得$\dfrac{\sin6x+xf(x)}{x^3}=0+\alpha(x)$

其中$\alpha(x)$为$x\to0$时的无穷小量.

从而
$$f(x)=\frac{x^3\alpha(x)-\sin6x}{x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{x^3\alpha(x)-\sin6x}{x}+6}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{6x-\sin6x+x^3\alpha(x)}{x^3}=36$$

方法三:把抽象函数去掉:

设
$$\lim_{x\to0}\frac{6x+xf(x)}{x^3}=A \qquad ①$$

又因
$$\lim_{x\to0}\frac{\sin6x+xf(x)}{x^3}=0 \qquad ②$$

$$①-②\Rightarrow\lim_{x\to0}\frac{6x-\sin6x}{x^3}=A=36$$

因
$$6x-\sin6x\sim\frac{1}{6}\times(6x)^3=36x^3$$

例18(2005,②,11 分)设函数 $f(x)$连续,且 $f(0)\neq0$,求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)dt}$

【解析】因 $\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t\xlongequal{x-t=u}\int_x^0 f(u)(-\mathrm{d}u)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$,故

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}=\lim_{x\to0}\frac{x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)-xf(x)}{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+xf(x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+xf(x)}\xlongequal{\text{积分中值定理}}\lim_{x\to0}\frac{xf(\xi)}{xf(\xi)+xf(x)}$$

$$=\frac{f(0)}{f(0)+f(0)}=\frac{1}{2}$$（因 $x\to0$ 时，$\xi\to0$，且 $f(x)$ 为连续函数）

例19（2002，③，5 分）求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u}{x(1-\cos x)}$.

【解析】原式 $=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u}{x^3}=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{x^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t}{3x^2}$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{2x\arctan(1+x^2)}{6x}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}.$$

二、数列的极限

1. 通项为 n 项和的极限

常用方法：① 定积分定义

② 夹逼准则

例 1（2002，②，3 分）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\sqrt{1+\cos\dfrac{\pi}{n}}+\sqrt{1+\cos^2\dfrac{2\pi}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\cos\dfrac{n\pi}{n}}\right)=$________.

【答案】$\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}$

【解析】原极限 $=\int_0^1\sqrt{1+\cos\pi x}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{2\cos^2\dfrac{\pi x}{2}}\,\mathrm{d}x=\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}$

例 2（2004，②，4 分）$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^2\cdots\left(1+\dfrac{n}{n}\right)^2}$ 等于（ ）

A. $\int_1^2\ln^2x\mathrm{d}x$　　B. $2\int_1^2\ln x\mathrm{d}x$

C. $2\int_1^2\ln(1+x)\mathrm{d}x$　　D. $\int_1^2\ln^2(1+x)\mathrm{d}x$

【答案】B

【解析】$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^2\cdots\left(1+\dfrac{n}{n}\right)^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{n}\right)\right]^{\frac{2}{n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}2\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)=2\int_1^2\ln x\mathrm{d}x.$$

故选 B.

例 3（2010，①②，4 分）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}$ 等于（ ）