中小学各年级数学奥林匹克竞赛千题巧解

初中一年级

主编　陈家昌

长　春　出　版　社

中小学各年级数学奥林匹克竞赛千题巧解

初中一年级

主　　　编　陈家昌

本册主　编　金　戈

本册副主编　童金峰

长春出版社

(吉)新登字 10 号

中小学各年级数学奥林匹克竞赛千题巧解
初中一年级
主编　陈家昌

责任编辑:毕素香　　封面设计:王爱宗

长春出版社出版　　新华书店总店北京发行所发行
(长春市建设街 43 号)　　卡伦东发胶版印刷厂印刷

开本:787×1092 毫米 1/32　　1996 年 1 月第 1 版
印张:7.375　　1997 年 1 月第 2 次印刷
字数:166 000　　印数:8 001—16 000 册

ISBN 7—80604—365—9/G·107　　定价:7.90 元

《中小学各年级数学奥林匹克竞赛千题巧解》编委会

主　编　陈家昌

副主编　金　戈　才裕平

编　委　（按姓氏笔画排列）

才裕平　王　强　代正之　刘学东
全锡贵　吕献隆　吴作奇　陈家昌
金　戈　郑国栋　姜　慧　赵会深
高长立　高立东　童金峰　谢春旭

作　者　（按姓氏笔画排列）

于淑兰　于淑珍　王　成　尹　丽
王云正　石瑞丽　刘　冬　刘　明
刘淑元　庄殿金　吕赛丽　宋　英
宋文才　李　峰　李　敏　李月萍
李素彩　邵国发　苏英杰　陈帮义
吴颂荔　张　颖　余福春　郑国芝
赵彦菲　赵　原　徐　艳　高玉玖
贾昭华　曹　仁　黄　冶　龚云霞

序

为了帮助初中一年级学生掌握好数学基础知识，开扩眼界，增长才智，锻炼思维能力，提高分析和解决数学问题的技能；为了给参加奥赛和各种数学竞赛的学生搞好培训提供方便；为了给学生家长及教师提供一本课外辅导用书，我们编写了这一册书.

本书共分：整除与余数、幂的末位数、数的奇偶性、有理数的计算、一元一次方程、一元一次不等式、二元一次方程组、因式分解、整式、分式、几何问题等十一部分.每一部分包括知识要点、问题解答、解题方法.本书共编入近千道问题.在编写中，作者力求做到题目类型多样、内容丰富、循序渐进，一题多解，拓宽学生的视野，激发学生学习兴趣.

本书作者是多年来从事数学教育研究和数学竞赛培训的教师，本册主编是金戈，副主编是童金峰，参加编著的还有苏英杰、尹丽、高玉玖、宋文才、邵国发、宋英等.

对于书中的缺点、错误，欢迎读者批评指正.

作者

1995 年 4 月

目　　录

第一章　整除与余数

〔**知识要点**〕

数的整除性质：

1. 若$b|a$，$b|c$，则$b|ma\pm nc$.

2. 若$b|a$，$a|c$，则$b|c$.

3. 若$b|a$，$c|a$，且b、c互质，则$bc|a$.

4. 若$b|a$，则$b|a^2$.

5. n个连续整数中，必有一个数被n整除.

6. n个连续整数的连乘积，一定能被$1\times2\times\cdots\times n$整除.

7. a除以正整数b，余数为r，则r只能是$0,1,2,\cdots,b-1$等b个数中的一个.

8. 若$a=bp+r$，$c=bp'+r$，则$b|a-c$.

9. ①$2|$（a的末位数），则$2|a$；$5|$（a的末位数），则$5|a$. ②若$4|$（a的末两位数），则$4|a$；$25|$（a的末两位数），则$25|a$；③$3|$（a的各位数字和），则$3|a$；④$8|$（a的末三位数），则$8|a$；$125|$（a的末三位数）；则$125|a$；⑤$11|$（a的奇数位数字和与偶数位数字和的差），则$11|a$；⑥$7|$（去掉a的末位数减去原末位数的2倍所得差），则$7|a$.

〔**例题**〕

1. 在1995以内（包括1995）的整数是3的倍数而不是5的倍数的数有多少个？

解　在1995以内是3的倍数的数有665个，是15倍数的数有133个，这样满足条件的数有

$$665-133=532(个)$$

2. 在1～50这50个自然数中，不是3的倍数，也不是5的

倍数，还不是7的倍数的数有多少个？

解 用记号$[x]$表示不超x的最大整数. 在1到50的连续自然数中

是3的倍数的数共有$\left[\frac{50}{3}\right]=16$个；

是5的倍数的数共有$\left[\frac{50}{5}\right]=10$个；

是7的倍数的数共有$\left[\frac{50}{7}\right]=7$个；

是$3\times5=15$倍数的数是15，30，45，共3个；

是$3\times7=21$倍数的数是21，42，共2个；

是$5\times7=35$倍数的数是35，仅1个，这样满足条件的数有

$$50-16-10-7+3+2+1=33\text{个}.$$

3. 若$x-3\mid 4x^2-6x+m$，试求m的值.

解法一 用待定系数法

$$\text{令 } 4x^2-6x+m=(4x+n)(x-3)$$

$$\text{即 } 4x^2-6x+m=4x^2+(n-12)x-3n$$

比较系数得，$n-12=-6$及$m=-3n$，解得$n=6$，$m=-18$

解法二 用竖式除法

$$\begin{array}{r@{\,}l}
 & 4x+6 \\ \cline{2-2}
x-3 \big) & 4x^2-6x+m \\
 & 4x^2-12x \\ \cline{2-2}
 & \quad +6x+m \\
 & \quad 6x-18 \\ \cline{2-2}
 & \qquad 0
\end{array}$$

$\because x-3\mid 4x^2-6x+m$，$\therefore m-(-18)=0$，即$m=-18$

4. 一个自然数与3的和是5的倍数；与3的差是6的倍数，求这样的最小的自然数.

解 设此数为x

则 $$\begin{cases} x+3=5k_1 & (1) \\ x-3=6k_2 & (2) \end{cases}$$

(1)－(2)得$5k_1-6k_2=6$，$k_1=\dfrac{6(k_2+1)}{5}$，

要求k_1是最小自然数，x才能最小，因此k_2取最小整数4，此时$k_1=6$，将$k_1=6$代入(1)即得出最小的自然数x为27.

5. 九位数$\overline{32x35717y}$能被72整除，求这个数中的x，y.

解 能被$72=8\times 9$整除的数，必须同时能被8与9整除.而能被8整除的 数是它的末三位数$\overline{17y}$能被8整除，故$y=6$；能被9整除的数必须它的各位数字之和$3+2+x+3+5+7+1+7+6=34+x$能被9整除，故$x=2$.

综上所述，$x=2$，$y=6$.

6. 形如$\overline{19xy90}$且能被33整除的六位数有哪几个？

解 满足条件的六位数同时可被3与11整除

即①$3\mid(1+9+x+y+9+0)\Rightarrow 3\mid(1+x+y)$，

又$0\leqslant x,y\leqslant 9$，故$1\leqslant 1+x+y\leqslant 19$，

于是有$1+x+y=3$，$1+x+y=6$，$1+x+y=9$，

$$1+x+y=12,1+x+y=15,1+x+y=18 \quad (1)$$

②$11\mid[(1+x+9)-(9+y+0)]\Rightarrow 11\mid(1+x-y)$

由于$-8\leqslant 1+x-y\leqslant 10$，所以$1+x-y=0$ (2)

(2)与(1)每个方程联立，解出整数对(x,y)有(2,3)(5,6)(8,9)三组数，所求的六位数有：

192390，195690，198990.

7. 已知三位数$\overline{2A3}$和$\overline{5B9}$满足$\overline{2A3}+326=\overline{5B9}$，且$\overline{5B9}$可

被 9 整除，求 $A \cdot B$.

解 $\because 0 \leqslant B \leqslant 9, 5+B+9=B+14, B+14$ 能被 9 整除，$\therefore B=4$，又 $\overline{2A3}=549-326=223$，$\therefore A=2$. $\therefore A \cdot B=2\times 4=8$.

8. 已知七位数 $\overline{13xy45z}$ 能被 792 整除，求 x, y, z.

解 $\because 792=8\times 9\times 11$，$\therefore$ 此七位数必须同时能被 8，9，11 整除，才能被 792 整除.

此数若能被 8 整除，则须 $\overline{45z}$ 被 8 整除，$\because 0\leqslant z\leqslant 9$，$\therefore z=6$；

此数若能被 9 整除，须它的各位数之和能被 9 整除，可设

$$x+y+19=9m \tag{1}$$

此数若能被 11 整除，则须它的奇数位数字和与偶数位数字和的差能被 11 整除，可设

$$x-y+3=11n \tag{2}$$

由(1)变形为 $x+y=9m-19$，有

$$0\leqslant 9m-19\leqslant 18,\text{可得 } m=3,4;$$

由(2)变形为 $x-y=11n-3$，有

$-9\leqslant 11n-3\leqslant 9$，可得 $n=0,1$；于是有方程组

当 $\begin{cases}m=3\\n=0\end{cases}$ 时，$\begin{cases}x+y=8\\x-y=-3\end{cases}$ 无正整数解；

当 $\begin{cases}m=3\\n=1\end{cases}$ 时，$\begin{cases}x+y=8\\x-y=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=8\\y=0\end{cases}$；

当 $\begin{cases}m=4\\n=0\end{cases}$ 时，$\begin{cases}x+y=17\\x-y=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=7\\y=10\end{cases}$ 不合要求；

当 $\begin{cases}m=4\\n=1\end{cases}$ 时，$\begin{cases}x+y=17\\x-y=8\end{cases}$ 无正整数解.

综上所述，只有 $x=8, y=0, z=6$.

9. 设 a, b, c, d 是自然数，并且 $a^2+b^2=c^2+d^2$ 证明：$a+b$

$+c+d$ 一定是合数.

证 因为 a,b,c,d 是自然数,所以 a^2-a,b^2-b,c^2-c,d^2-d 分别都是偶数.

因此 $(a^2-a)+(b^2-b)+(c^2-c)+(d^2-d)$ 是偶数.

即 $M=(a^2+b^2+c^2+d^2)-(a+b+c+d)$ 是偶数.

又 $a^2+b^2=c^2+d^2$(已知),

所以 $a^2+b^2+c^2+d^2=2(a^2+b^2)$ 是偶数. 但是 $a+b+c+d>2$,

所以 $a+b+c+d=(a^2+b^2+c^2+d^2)-M=2(a^2+b^2)-M$ 是偶数,故 $a+b+c+d$ 是合数.

10. 试确定最小的正整数 n,其末位数是6,若将末位数的6移作首位,则为原数的4倍.

证 设 n 为 k 位数,即

$$n=\overline{a_{k-1}a_{k-2}\cdots a_2a_1 6}=\overline{a_{k-1}a_{k-2}\cdots a_2a_1}\times 10+6.$$

由已知有 $4n=\overline{6a_{k-1}a_{k-2}\cdots a_2a_1}=6\times 10^{k-1}+\overline{a_{k-1}a_{k-2}\cdots a_2a_1}$

令 $\overline{a_{k-1}a_{k-2}\cdots a_2a_1}=M$,则有

$$4(10M+6)=6\times 10^{k-1}+M$$

由此解得 $M=\dfrac{2(10^{k-1}-4)}{13}$,从而 $10^{k-1}-4$ 应能被13整除,从96,996…,逐一验证,知99996能被13整除,M 最小为 $M=2(10^{k-1}-4)\div 13=2\times 99996\div 13=15384$. 故所求的最小正整数 n 是

$$10\times 15384+6=153846.$$

11. 一个正整数能被5和7整除,被11除余6,写出具有这种性质的整数的一般形式,并求出适合条件的最小正整数.

解 设符合条件的正整数为

$35m = 11n + 6$,变形为 $33m + 2m = 11n + 6$.

整理为 $2(m-3)=11(n-3m)$.

此式右边是11的倍数,故左边应是11的倍数,又因2与11互质,所以设 $m-3=11t$,$m=11t+3$.

满足条件的正整数的一般形式

$$35m = 35(11t + 3) = 385t + 105,$$

显然当 $t=0$ 时,适合条件的最小正整数是105.

12. 若 n 是整数,且 $y=n+3n^2+2n^3$,证明 y 是6的倍数.

证 $y = n + 3n^2 + 2n^3 = n(n+1)(2n+1)$

$= n(n+1)[(n+2)+(n-1)]$

$= n(n+1)(n+2)+(n-1)n(n+1)$,

$\because 6 \mid n(n+1)(n+2)$, $\quad 6 \mid (n-1)n(n+1)$,

$\therefore 6 \mid y$,即 y 是6的倍数.

13. 试证 $n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n$.(1)对任何自然数 n 它都是整数;(2)对任何自然数 n 它又是3的倍数.

证 (1)$\because n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$,$n$ 为自然数,$\therefore n(n+1)$ 一定是2的倍数,从而知 $\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$ 是整数,即 $n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n$ 是整数.

(2)$\because n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$

$=\frac{1}{8}\cdot 2n(2n+1)(2n+2)$,$2n(2n+1)(2n+2)$

是三个连续自然数之积一定是3的倍数,且3与8互质,$\frac{1}{8}\cdot 2n(2n+1)(2n+2)$ 是3的倍数,即 $n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n$ 是3的倍数.

14. 求证完全平方数一定能被3整除或被3除余1.

证 因为任意一个数被3除余数有三类:0、1、2,可设完全平方数的底数分别为$3k$,$3k+1$,$3k+2$,则$(3k)^2=9k^2$;$(3k+1)^2=3(3k^2+2k)+1$;$(3k+2)^2=3(3k^2+4k+1)+1$.由此可见完全平方数能被3整除或被3除余1.

15. 求证:三个连续自然数的立方和一定是9的倍数.

证 设三连续自然数是$n-1,n,n+1$

则$(n-1)^3+n^3+(n+1)^3=3n^3+6n=3n(n^2+2)=3n[(n^2-1)+3]=3n(n+1)(n-1)+9n$,$3n(n+1)(n-1)$及$9n$都是9的倍数.

所以$(n-1)^3+n^3+(n+1)^3$一定是9的倍数.

16. 设m,n为任意奇数,且$m>n$,试证:m^2-n^2能被8整除.

证 设$m=2a+1,n=2b+1$,且$a>b$.

则 $m^2-n^2=(2a+1)^2-(2b+1)^2=4(a+b+1)(a-b)$,$a+b+1$与$a-b$中必有一个是偶数,$4(a+b+1)(a-b)$可被8整除,即$m^2-n^2$可被8整除.

17. 求证$42|n^7-n$.

证 $42=6\times7$,

$$\begin{aligned}n^7-n&=n(n^6-1)=n(n^3-1)(n^3+1)\\&=(n-1)n(n+1)(n^2+n+1)(n^2-n+1)\end{aligned}$$

$\because 6|(n-1)n(n+1)$, $\therefore 6|n^7-n$.

为了证$7|n^7-n$,将n设为$n=7k,n=7k+1,n=7k+2$,$n=7k+3,n=7k+4,n=7k+5,n=7k+6$.

当$n=7k$时,显然$7|n^7-n$;当$n=7k+1$时,$n-1=7k$,$7|n^7-n$;当$n=7k+2$,$n^2+n+1=(7k+2)^2+(7k+2)+1=49k^2+35k+7$,$7|n^2+n+1$,$\therefore 7|n^7-n$;当$n=7k+3$时,$n^2-n$

$+1=(7k+3)^2-(7k+3)+1=49k^2+35k+7$，$7\mid n^2-n+1$，$\therefore 7\mid n^7-n$；当 $n=7k+4$ 时，$n^2+n+1=49n^2+63k+21$，$7\mid n^2+n+1$，$\therefore 7\mid n^7-n$；当 $n=7k+5$ 时，$n^2-n+1=49k^2+63k+21$，$7\mid n^2-n+1$，$\therefore 7\mid n^7-n$；当 $n=7k+6$ 时，$n+1=7k+7$，$7\mid n+1$，$\therefore 7\mid n^7-n$，综上有 $7\mid n^7-n$，又6、7互质 $\therefore 42\mid n^7-n$.

18. 已知 $a-c\mid ab+cd$，求证 $a-c\mid ad+bc$.

证
$$\begin{aligned} ad+bc &= ad-cd+cd+bc-ab+ab \\ &= (a-c)d+(c-a)b+cd+ab \\ &= (a-c)(d-b)+cd+ab \end{aligned}$$

$\because a-c\mid (a-c)(d-b)$，$a-c\mid ab+cd$

$\therefore a-c\mid ad+bc$.

19. 求证 $10\mid 1949^{1989}-1989^{1949}$.

证 1949^{1989} 与 1989^{1949} 都是末位数为9的奇数次幂，

$\therefore 1949^{1989}$ 与 1989^{1949} 的末位数都是9.

$1949^{1989}-1989^{1949}$ 的差末位数是0，

$\therefore 10\mid 1949^{1989}-1989^{1949}$.

20. n 是自然数，证明

(1) n^3+11n 能被6整除；

(2) n^5-n 能被30整除；

(3) $n^2(n^2-1)(n^2-4)$ 能被360整除.

证 $\because k$ 个连续自然数的积能被 $1\times2\times\cdots\times k$ 整除，$\therefore$ 利用这个性质给予各题证明.

(1) $n^3+11n=(n-1)n(n+1)+12n$，其中 $(n-1)n(n+1)$ 及 $12n$ 均可被6整除，$\therefore 6\mid n^3+11n$

(2)
$$\begin{aligned} n^5-n &= (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) \\ &\quad +5(n-1)n(n+1) \end{aligned}$$

右边的$(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$可被120整除，

$5(n-1)n(n+1)$可被30整除，$\therefore 30 \mid n^5-n$.

(3)$n^2(n^2-1)(n^2-4)=(n-2)(n-1)n^2(n+1)(n+2)$，其中$(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$可被120整除，且$n(n-1)\cdot(n-2)$和$n(n+1)(n+2)$都能被3整除.

所以$360 \mid n^2(n^2-1)(n^2-4)$.

21. p和q都是大于3的素数，$p^2-q^2 \geqslant 24$，求证p^2-q^2能被24整除.

证 设$p=2k_1+1, q=2k_2+1$，则$p^2-q^2=4k_1(k_1+1)-4k_2(k_2+1)$能被8整除，

再设$p=3m_1 \pm 1, q=3m_2 \pm 1$，则

$p^2-q^2=(9m_1^2 \pm 6m_1)-(9m_2^2 \pm 6m_2)$能被3整除，

所以$24 \mid p^2-q^2$.

22. 证明某种商品有3公斤和5公斤两种包装如果需要$N(N>7)$公斤这种商品无须折散包装就能搭配成所需公斤数，付给购货人.

证 显然当$N=8$或9结论成立. 若$N \geqslant 10$，当$N=3k$，结论成立；当$N=3k+1(k \geqslant 3)$，则$N=3(k-3)+10=3(k-3)+2\times 5$；当$N=3k-1(k \geqslant 4)$，则$N=3(k-2)+5$，综上所述，命题是正确的.

23. 设整数$n \geqslant 0$，求证：

(1)$5^{2n+1}\cdot 2^{n+2}+3^{n+2}\cdot 2^{2n+1}$能被19整除；

(2)$11^{n+2}+12^{2n+1}$能被133整除.

证 (1)原式可变为$20\times 50^n+18\times 12^n=19(50^n+12^n)+(50^n-12^n)$，而$50^n-12^n=(50-12)(50^{n-1}+50^{n-2}\cdot 12+\cdots+12^{n-1})$是19的倍数.

所以$19 \mid 5^{2n+1}\cdot 2^{n+2}+3^{n+2}\cdot 2^{2n+1}$

(2)原式$=121\times11^n+12\times12^{2n}=133\times11^n+12(144^n-11^n)$，而$144^n-11^n=(144-11)(144^{n-1}+144^{n-2}\cdot11+\cdots+11^n-1)$是133的倍数.

所以$133\mid11^{n+2}+12^{2n+1}$.

24. 设整数$n\geqslant0$，当n取不同的整数，对所有由$7^{n+2}+8^{2n+1}$表达的数，求出它们的最大公约数.

解 当$n=0$，原式$=57$，下面可设想最大公约数是57，当然要给予证明：

$\because 7^{n+2}+8^{2n+1}=49\cdot7^n+8\cdot64^n=57\cdot7^n+8(64^n-7^n)$，而$64^n-7^n=(64-7)(64^{n-1}+64^{n-2}\cdot7+\cdots+7^{n-1})$是57的倍数，由此可知形如$7^{n+2}+8^{2n+1}$($n\geqslant0$的自然数)的最大公约数是57.

25. 求$1949^{1979^{2000}}$被7除的余数是几？

解 $\because 1949=7\times278+3$，$\therefore$原数与$3^{1979^{2000}}$被7除后的余数相同.

$3^k(k=0,1,2,3,\cdots)$被7除，余数是1,3,2,6,4,5,1…循环，又$1979=6\times329+5$；1979^{2000}与5^{2000}被6除后的余数相同.5^k被6除的余数是1,5,1,5…循环，因此5^{2000}被6除余数是1，从而逆推可知原数被7除余数是3.

26. P是大于5的素数，证明p^2被30除后余数必是1或19.

证 设$p^2=30m+r$，$(0<r<30)$，因p的尾数是1,3,7,9,其中的一个，所以p^2的尾数必是1或9，当$r=9$或21时，p^2将是3的倍数，与p是素数矛盾，故$r\neq9$或21.当$r=11$或29时p^2-11或p^2-29不能被30整除，因此r只能是19或1.

27. 设a,b,c,d,m都是整数，如果am^3+bm^2+cm+d能被5整除，并且d不能被5整除，那么一定可以选择适当的整

数n，使dn^3+cn^2+bn+a也能被5整除.

证 设$A=am^3+bm^2+cm+d=m(am^2+bm+c)+d$，从$A$可看出$m$不能被5整除，于是设$m=5q+r(r=1,2,3,4)$，这样总可以找到一个$n$，使$n\cdot m$被5除，余数是1.

再设$B=dm^3+cm^2+bm+a$，则$An^3-B=(mn-1)\{a(m^2n^2+mn+1)+bn(mn+1)+cn^2\}$能被5整除，因此$B$能被5整除.

28. 有三个不同的自然数，它们两两互素，并且任何两个数的和能被第三个数整除.求这三个数.

解 设自然数$x<y<z$.从$x+y$能被z整除与$x+y<2z$可得出：$z=x+y$，$x+z=2x+y$被y整除，即$2x$被y整除，又$2x<2y$，故$y=2x$，从而$z=3x$，从两两互素条件，得$x=1$，$y=2$，$z=3$.

即所求的三个数是1，2，3.

29. 试证一个自然数的末三位数是8(或125)的倍数，则这个自然数必是8(或125)的倍数.

证 设这个自然数是个n位数：$\overline{a_na_{n-1}\cdots a_4a_3a_2a_1}$

$$\because\ \overline{a_na_{n-1}\cdots a_3a_2a_1}=\overline{a_na_{n-1}\cdots a_4}\times 1000+\overline{a_3a_2a_1}$$
$$=\overline{a_na_{n-1}\cdots a_4}\times 8\times 125+\overline{a_3a_2a_1}$$

显然知道$\overline{a_na_{n-1}\cdots a_4}\times 8\times 125$，$\overline{a_3a_2a_1}$都是8或125的倍数.则这个自然数$\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1}$也是8或125的倍数.

30. 已知$3|a^2+b^2$，求证$3|a$且$3|b$.

证 用反证法证明.

假设$3\nmid a$且$3\nmid b$，可设$a=3k_1\pm1$，$b=3k_2\pm1$(k_1，k_2是整数)，此时

$$a^2+b^2=(3k_1\pm1)^2+(3k_2\pm1)^2$$