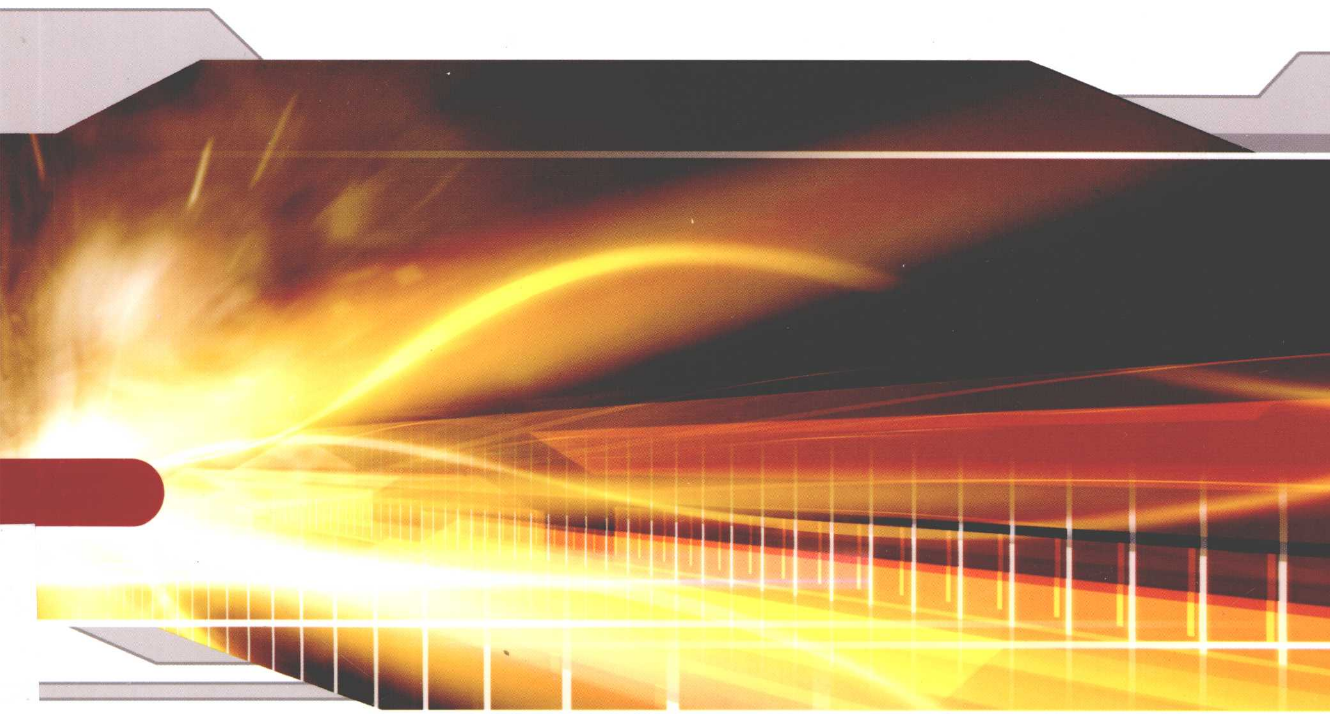
“十二五”应用型本科系列规划教材

线性代数学习辅导

Student's Guide for Linear Algebra



侯亚君　总主编
沙　萍　艾　玲　主　编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

"十二五"应用型本科系列规划教材

线性代数学习辅导

总主编　候亚君
主　编　沙　萍　艾　玲
参　编　孙宏国　原　璐　林洪娟　赵伟丽

机械工业出版社

本书是与机械工业出版社出版的，由艾玲、沙萍、林洪娟主编的“十二五”应用型本科系列规划教材《线性代数》相配套的学习辅导书. 全书共分5章：行列式、矩阵、线性方程组、向量组的线性相关性、相似矩阵及二次型，每章内容包括：教学基本要求与教学重点、知识要点、典型例题、难点解析、单元测试题（含参考答案）、教材习题详解6个部分. 其中，典型例题部分精选了涵盖各章重点和难点内容的有代表性的例题，包括一部分考研真题；难点解析部分主要针对学生容易出错之处和教学难点给予详细的分析和解答；单元测试题（含参考答案）部分提供给学生针对各章知识点的自我强化训练与检测.

本书可作为本科生学习线性代数课程的辅导书、考研的复习资料，也可以作为教师的教学参考书.

图书在版编目（CIP）数据

线性代数学习辅导/沙萍，艾玲主编. —北京：机械工业出版社，2014.1
“十二五”应用型本科系列规划教材
ISBN 978－7－111－45387－1

Ⅰ.①线… Ⅱ.①沙…②艾… Ⅲ.①线性代数－高等学校－教学参考资料 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2014）第004855号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）
策划编辑：韩效杰　责任编辑：韩效杰　陈崇昱
封面设计：路恩中　责任印制：张　楠
责任校对：胡艳萍
北京京丰印刷厂印刷
2014年2月第1版·第1次印刷
184mm×240mm·12.5印张·309千字
标准书号：ISBN 978－7－111－45387－1
定价：28.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
社服务中心：（010）88361066	教材网：http：//www.cmpedu.com
销售一部：（010）68326294	机工官网：http：//www.cmpbook.com
销售二部：（010）88379649	机工官博：http：//weibo.com/cmp1952
读者购书热线：（010）88379203	**封面无防伪标均为盗版**

前　言

本书是与机械工业出版社出版的，由艾玲、沙萍、林洪娟主编的“十二五”应用型本科系列规划教材《线性代数》相配套的学习辅导书．全书共分5章：第1章行列式、第2章矩阵、第3章线性方程组、第4章向量组的线性相关性、第5章相似矩阵及二次型．各章内容编写顺序与原教材相一致，为便于学生按线性代数课程的教学进度和线性代数的知识体系复习使用．每章又包括下列6个部分：

(1) 教学基本要求与教学重点：根据本科线性代数课程的教学大纲要求所确定．是对读者学习这一章的目标要求和学习指导．

(2) 知识要点：归纳和总结了本章的基本概念、基本定理、性质和结论，包括研究某些问题的常用方法，便于学生对这一章知识点的掌握．

(3) 典型例题：精选了涵盖各章重点和难点内容的有代表性的例题，包括一部分考研真题．每道例题有解题思路分析，包括所用的定理、性质、结论或方法，解题过程条理清晰、论述简捷，解题方法典型、常用．有些例题给出了两种不同的解法或证法，有些例题把不同的解题思路、解题时要注意的问题或对所得结果的说明给出标注，旨在使学生能“举一反三”，提高分析问题、解决问题的能力．

(4) 难点解析：针对学生学习本章时所提出的具有代表性的问题、学生解题时容易出错之处以及教学难点，归纳出几个关键性问题给予详细的分析和解答，使学生对这些问题有明确的认识和深入的理解．

(5) 单元测试题（含参考答案）：提供给学生针对本章的主要知识点的自我强化训练，并检测其对本章知识点的掌握程度．

(6) 教材习题详解：对《线性代数》教材中全部习题给出详细的解题过程，包括数学实验部分．有些习题“一题多解”．

本书第1章由原璐编写，第2章由孙宏国编写，第3章由艾玲编写，第4章由沙萍编写，第5章由林洪娟和赵伟丽编写．

由于编者水平有限，书中难免有不足之处，恳请广大读者批评指正．

编　者

目　录

第 1 章　行　列　式

1.1　教学基本要求与教学重点

1. 教学基本要求

（1）会用对角线法则计算二阶、三阶行列式.

（2）理解 n 阶行列式的定义，理解余子式和代数余子式的含义.

（3）理解行列式的性质，并能熟练利用行列式的性质计算 n 阶行列式.

（4）会利用行列式按行（列）展开法则计算 n 阶行列式.

（5）熟悉一些特殊行列式［如对角行列式，上（下）三角形行列式，范德蒙德行列式］的展开结果.

（6）理解克拉默法则，会利用克拉默法则求解含有 n 个未知数、n 个方程的线性方程组.

2. 教学重点

（1）n 阶行列式的定义与性质.

（2）行列式按行（列）展开法则.

（3）n 阶行列式的各种计算方法.

1.2　知识要点

1. 行列式的定义

（1）全排列：把 n 个不同的元素排成一列，叫做这 n 个元素的全排列，简称排列.

（2）逆序数：对于 n 个不同的元素，先规定各元素之间有一个标准次序，于是这 n 个元素的任一排列中，当某两个元素的先后次序与标准次序不同时，就说有一个逆序．一个排列中所有逆序的总数叫做这个排列的逆序数.

（3）对换：将排列中任意两个元素交换位置，其余的元素不动，这种作出新排列的方式叫做对换.

相邻对换：相邻两个元素对换，叫做相邻对换.

（4）n 阶行列式：

$$\det(a_{ij}) = D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的值规定为$\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，其中，$p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 1，2，⋯，n 的一个排列；t 为这个排列的逆序数；数 a_{ij}为行列式 D 的(i, j)元.

n 阶行列式也可定义为 $D=\sum(-1)^t a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}$，其中，$t$ 为行标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数.

（5）对角行列式：对角线以外的元素全为零的行列式叫做对角行列式，其形式为

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}.$$

（6）上(下)三角形行列式：主对角线以下(上)的元素都为零的行列式叫做上(下)三角形行列式，其形式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix} \text{和} \begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

（7）转置行列式：将行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的行元素与列元素交换位置得到的新行列式称为行列式 D 的转置行列式并记为 D^{T}，即

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

2. 行列式的性质

（1）行列式与它的转置行列式相等.

（2）互换行列式的两行(列)，行列式变号.

（3）行列式的某一行（列）中所有元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘此行列式.

（4）行列式中如果有两行(列)元素对应成比例，则此行列式等于零.

（5）若行列式的某一列(行)的元素都是两数之和，例如第 i 列的元素都是两数之和：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i}+a'_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i}+a'_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni}+a'_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 D 等于下列两个行列式之和：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

（6）把行列式的某一列（行）的元素乘以同一数然后加到另一列（行）对应的元素上去，行列式不变.

3. 行列式按行（列）展开

（1）余子式：在 n 阶行列式中，把 (i,j) 元 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后，留下来的 $n-1$ 阶行列式叫做 (i,j) 元 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}.

代数余子式：记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，A_{ij} 叫做 (i,j) 元 a_{ij} 的代数余子式.

（2）一个 n 阶行列式，如果其中第 i 行所有元素除 (i,j) 元 a_{ij} 外都为零，那么这个行列式等于 a_{ij} 与它的代数余子式的乘积，即

$$D=a_{ij}A_{ij}.$$

（3）行列式等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\quad(j=1,2,\cdots,n).$$

（4）行列式某一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=0\quad(i\neq j),$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=0\quad(i\neq j).$$

4. 特殊行列式

（1）
$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

（2）
$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

（3）上（下）三角形行列式的值等于其对角线上的元素之积，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

（4）设

$$D_1 = \det(a_{ij}) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix},\ D_2 = \det(b_{ij}) = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

则

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & & \vdots & & 0 & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = D_1D_2.$$

（5）范德蒙德行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j),$$

其中，记号“$\prod$”表示全体同类因子的乘积.

5. 克拉默法则

（1）如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1-1}$$

的系数行列式不等于零，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ \cdots,\ x_n=\frac{D_n}{D},$$

其中，$D_j(j=1,2,\cdots,n)$是把系数行列式D中第j列的元素用方程组右端的常数项代替后所得到的n阶行列式，即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

（2）如果线性方程组（1-1）无解或有两个不同的解，则它的系数行列式必为零.

（3）如果齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \qquad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases} \tag{1-2}$$

的系数行列式$D\neq0$，则齐次线性方程组（1-2）没有非零解.

（4）如果齐次线性方程组（1-2）有非零解，则它的系数行列式必为零.

1.3 典型例题

例1.1 设

$$f(x)=\begin{vmatrix} 2x & 3 & 1 & 2 \\ x & x & 0 & 1 \\ 2 & 1 & x & 4 \\ x & 2 & 1 & 4x \end{vmatrix},$$

则x^4项的系数为(　　)，x^3项的系数为(　　)，常数项为(　　).

解 含有x^4项的是$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$，即$8x^4$，故x^4的系数为8. 含有x^3项的是$-a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$和$-a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}$，即$-12x^3$和$-2x^3$，故$x^3$的系数为$-14$. 常数项为$f(0)$，即

$$f(0)=\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-2,$$

故应依次填8，-14，-2.

例1.2 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 6 & -4 \\ 2 & 5 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

解

$$D=\begin{vmatrix}4&1&0&5\\3&1&-1&2\\-2&0&6&-4\\2&5&-3&2\end{vmatrix}\xlongequal[c_4-2c_1]{c_3+3c_1}\begin{vmatrix}4&1&12&-3\\3&1&8&-4\\-2&0&0&0\\2&5&3&-2\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按}r_3\text{展开}}-2\times(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1&12&-3\\1&8&-4\\5&3&-2\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3-5r_1]{r_2-r_1}-2\begin{vmatrix}1&12&-3\\0&-4&-1\\0&-57&13\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按}c_1\text{展开}}-2\begin{vmatrix}-4&-1\\-57&13\end{vmatrix}=-2\times(-109)=218.$$

例 1.3　设行列式

$$\begin{vmatrix}x-2&x-1&x-2&x-3\\2x-2&2x-1&2x-2&2x-3\\3x-3&3x-2&4x-5&3x-5\\4x&4x-3&5x-7&4x-3\end{vmatrix}$$

为 $f(x)$，则方程 $f(x)=0$ 的根的个数为（　　）.（1999 年，考研，数学二）

（A）1；　（B）2；　（C）3；　（D）4.

解　将第一列乘以 -1 依次加到其余各列，再把第二列加到第四列上去，有

$$f(x)=\begin{vmatrix}x-2&x-1&x-2&x-3\\2x-2&2x-1&2x-2&2x-3\\3x-3&3x-2&4x-5&3x-5\\4x&4x-3&5x-7&4x-3\end{vmatrix}\xlongequal[c_4-c_1]{\substack{c_2-c_1\\c_3-c_1}}\begin{vmatrix}x-2&1&0&-1\\2x-2&1&0&-1\\3x-3&1&x-2&-2\\4x&-3&x-7&-3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_4+c_2}\begin{vmatrix}x-2&1&0&0\\2x-2&1&0&0\\3x-3&1&x-2&-1\\4x&-3&x-7&-6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x-2&1\\2x-2&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}x-2&-1\\x-7&-6\end{vmatrix}.$$

易见 $f(x)$ 是二次多项式,故应选（B）.

例 1.4　设有行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&7&0&3\\3&1&5&9\\0&9&7&5\\10&9&5&9\end{vmatrix},$$

已知 1703，3159，975，10959 都能被 13 整除，不计算行列式 D，试证明 D 能被 13 整除.

解　要证明行列式 D 能被 13 整除，也就是要证明行列式 D 含有因子 13. 通常的方法是证明行列式某一行或某一列各元素有公因子 13，所以利用行列式的性质改变此行列式，使得行列式的某一列有公因子 13.

$$D=\begin{vmatrix}1&7&0&3\\3&1&5&9\\0&9&7&5\\10&9&5&9\end{vmatrix}\xlongequal{c_4+10c_3+100c_2+1000c_1}\begin{vmatrix}1&7&0&1703\\3&1&5&3159\\0&9&7&975\\10&9&5&10959\end{vmatrix}.$$

由题设条件知，上式右端行列式的第 4 列各元素有公因子 13，再由行列式性质可知，该公因子 13 可以提到行列式外边来，于是得

$$D=13\begin{vmatrix}1&7&0&131\\3&1&5&243\\0&9&7&75\\10&9&5&843\end{vmatrix}.$$

由此看出上式右端的行列式为一整数，故行列式 D 能被 13 整除.

例 1.5 设 $abcd=1$，行列式 $D=\begin{vmatrix}a^2+\frac{1}{a^2}&a&\frac{1}{a}&1\\b^2+\frac{1}{b^2}&b&\frac{1}{b}&1\\c^2+\frac{1}{c^2}&c&\frac{1}{c}&1\\d^2+\frac{1}{d^2}&d&\frac{1}{d}&1\end{vmatrix}=$____.

解 利用行列式的性质（5）可得

$$D=\begin{vmatrix}a^2&a&\frac{1}{a}&1\\b^2&b&\frac{1}{b}&1\\c^2&c&\frac{1}{c}&1\\d^2&d&\frac{1}{d}&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\frac{1}{a^2}&a&\frac{1}{a}&1\\\frac{1}{b^2}&b&\frac{1}{b}&1\\\frac{1}{c^2}&c&\frac{1}{c}&1\\\frac{1}{d^2}&d&\frac{1}{d}&1\end{vmatrix}=abcd\begin{vmatrix}a&1&\frac{1}{a^2}&\frac{1}{a}\\b&1&\frac{1}{b^2}&\frac{1}{b}\\c&1&\frac{1}{c^2}&\frac{1}{c}\\d&1&\frac{1}{d^2}&\frac{1}{d}\end{vmatrix}+(-1)^3\begin{vmatrix}a&1&\frac{1}{a^2}&\frac{1}{a}\\b&1&\frac{1}{b^2}&\frac{1}{b}\\c&1&\frac{1}{c^2}&\frac{1}{c}\\d&1&\frac{1}{d^2}&\frac{1}{d}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a&1&\frac{1}{a^2}&\frac{1}{a}\\b&1&\frac{1}{b^2}&\frac{1}{b}\\c&1&\frac{1}{c^2}&\frac{1}{c}\\d&1&\frac{1}{d^2}&\frac{1}{d}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}a&1&\frac{1}{a^2}&\frac{1}{a}\\b&1&\frac{1}{b^2}&\frac{1}{b}\\c&1&\frac{1}{c^2}&\frac{1}{c}\\d&1&\frac{1}{d^2}&\frac{1}{d}\end{vmatrix}=0.$$

例 1.6　计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a-x & a-y & a-z \\ b-x & b-y & b-z \\ c-x & c-y & c-z \end{vmatrix}.$$

解　将三阶行列式“加边”变成一个四阶行列式，即

$$D=\begin{vmatrix} a-x & a-y & a-z \\ b-x & b-y & b-z \\ c-x & c-y & c-z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 0 & a-x & a-y & a-z \\ 0 & b-x & b-y & b-z \\ 0 & c-x & c-y & c-z \end{vmatrix}\xlongequal[r_4+r_1]{\substack{r_2+r_1\\ r_3+r_1}}\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & a & a & a \\ 1 & b & b & b \\ 1 & c & c & c \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_4-c_2}\begin{vmatrix} 1 & x & y & z-x \\ 1 & a & a & 0 \\ 1 & b & b & 0 \\ 1 & c & c & 0 \end{vmatrix}\xlongequal{\text{按}c_4\text{展开}}(-1)^{1+4}(z-x)\begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 1 & b & b \\ 1 & c & c \end{vmatrix}=0.$$

例 1.7　设行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix},$$

则第四行各元素余子式之和的值为____．（2001 年，考研，数学四）

解法一　根据余子式的定义，即

$$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=\begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -7 & 0 & 0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 \end{vmatrix}=-28.$$

解法二　利用代数余子式求解，即

$$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=-A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44}$$

$$=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-7\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-28.$$

例 1.8　计算四阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}.$$

解　本行列式为范德蒙德行列式，其中，$x_1=1$，$x_2=2$，$x_3=3$，$x_4=4$，所以可直接利用范德蒙德行列式的公式求解.

$$原式=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)=(x_4-x_3)(x_4-x_2)(x_4-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_1)(x_2-x_1)$$
$$=(4-3)(4-2)(4-1)(3-2)(3-1)(2-1)=1\times2\times3\times1\times2\times1=12.$$

例 1.9 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}0&0&\cdots&0&1&0\\0&0&\cdots&2&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots\\2001&0&\cdots&0&0&0\\0&0&\cdots&0&0&2002\end{vmatrix}.$$

解 按最后一行展开，可得

$$D=2002\begin{vmatrix}0&0&\cdots&0&1\\0&0&\cdots&2&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\2001&0&\cdots&0&0\end{vmatrix}=2002\times(-1)^{\frac{2001\times2000}{2}}\times(2001!)=2002!.$$

例 1.10 解线性方程组

$$\begin{cases}x_2-3x_3+4x_4=-5,\\x_1-2x_3+3x_4=-4,\\3x_1+2x_2-5x_4=12,\\4x_1+3x_2-5x_3=5.\end{cases}$$

解

$$D=\begin{vmatrix}0&1&-3&4\\1&0&-2&3\\3&2&0&-5\\4&3&-5&0\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-4r_2]{r_3-3r_2}\begin{vmatrix}0&1&-3&4\\1&0&-2&3\\0&2&6&-14\\0&3&3&-12\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-3r_1]{r_3-2r_1}\begin{vmatrix}0&1&-3&4\\1&0&-2&3\\0&0&12&-22\\0&0&12&-24\end{vmatrix}=24,$$

$$D_1=\begin{vmatrix}-5&1&-3&4\\-4&0&-2&3\\12&2&0&-5\\5&3&-5&0\end{vmatrix}=24,\ D_2=\begin{vmatrix}0&-5&-3&4\\1&-4&-2&3\\3&12&0&-5\\4&5&-5&0\end{vmatrix}=48,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}0&1&-5&4\\1&0&-4&3\\3&2&12&-5\\4&3&5&0\end{vmatrix}=24,\ D_4=\begin{vmatrix}0&1&-3&-5\\1&0&-2&-4\\3&2&0&12\\4&3&-5&5\end{vmatrix}=-24,$$

于是得

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,\ x_2=\frac{D_2}{D}=2,\ x_3=\frac{D_3}{D}=1,\ x_4=\frac{D_4}{D}=-1.$$

例 1.11　如果齐次线性方程组

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0,\\ x_1+\lambda x_2+x_3=0,\\ x_1+x_2+\lambda x_3=0\end{cases}$$

有非零解，试求 λ.

解　若所给齐次线性方程组有非零解，则其系数行列式 $D=0$，而

$$D=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}\xlongequal{r_1+r_2+r_3}\begin{vmatrix}\lambda+2 & \lambda+2 & \lambda+2\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}\xlongequal{r_1\div(\lambda+2)}(\lambda+2)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1}(\lambda+2)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-1)^2,$$

由 $D=0$，得 $\lambda=-2$ 或 $\lambda=1$.

1.4　难点解析

问题 1.1　对角线法则是否适用于四阶及四阶以上行列式?

答　二阶、三阶行列式可以按对角线法则展开，而四阶及四阶以上的行列式不能按对角线法则展开，因为它不符合行列式的定义. 例如，对于四阶行列式，如果按对角线法则展开，则只能写出 8 项，而按照行列式的定义可知，四阶行列式一共是 4! 项，即 24 项的代数和. 显然，四阶行列式按对角线法则展开是错误的. 所以，计算四阶及四阶以上行列式时，对角线法则失效.

问题 1.2　计算行列式的方法有哪些?

答　计算行列式一般有以下几种常见的方法.

(1) 利用行列式的定义计算：这种方法只适用于一些特殊的行列式或者大多数元素为零的行列式计算;

(2) 利用行列式的性质计算：利用行列式的性质将行列式转化为上（下）三角形行列式计算，这是计算行列式最常见的方法之一;

(3) 利用行列式展开定理计算：利用按行（列）展开公式将高阶行列式转化为低阶行列式计算，这也是计算行列式最常见的方法;

(4) 利用递推关系计算：利用行列式的性质或按行（列）展开公式找出递推关系再进行计算，该方法一般适用于高阶且元素有规律的行列式的计算;

(5) 利用加边法（升阶法）计算：在行列式值不变的情况下，加上特殊的一行和一列，再利用行列式的性质进行化简计算;

(6) 利用特殊行列式的结果计算：如利用范德蒙德行列式的结果计算;

注　计算行列式往往是上述方法的综合运用.

1.5 单元测试题

1. 填空题

(1) 排列 134782695 的逆序数为____.

(2) 四阶行列式的展开式中，含有因子 a_{32} 的项,共有____个.

(3) 已知行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & a \end{vmatrix}=0$，则 $a=$____.

(4) 已知行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix},$$

若 $D_1=D_2$，则 λ 的取值为____.

(5) n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}=$____.（1991 年，考研，数学四）

2. 单项选择题

(1) 下列排列中（　　）是偶排列.

(A) 4312;　(B) 51432;　(C) 45312;　(D) 654321.

(2) 下列命题正确的是（　　）.

(A) 奇排列经过奇数次对换是奇排列;

(B) 奇排列经过偶数次对换是偶排列;

(C) 偶排列经过偶数次对换是偶排列;

(D) 偶排列经过奇数次对换是偶排列.

(3) 若 $D_1=\begin{vmatrix} 0 & -4 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$，$D_2=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 9 & 6 & 0 \end{vmatrix}$，则（　　）.

(A) $D_1=6$，$D_2=12$;　(B) $D_1=-6$，$D_2=-12$;

(C) $D_1=6$，$D_2=-12$;　(D) $D_1=-6$，$D_2=12$.

(4) 如果 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，$D_1=\begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix}$，则 $D_1=$（　　）.

（A）$2D$；（B）$-2D$；（C）$8D$；（D）$-8D$.

（5）设 $\begin{vmatrix} 2a & b & 0 \\ 2c & 2a & 1 \\ b & 2c & 0 \end{vmatrix}=M$，其中，$a$，$b$，$c$ 为实数且 $a\neq0$，则方程 $ax^2+bx+c=0$ 有实根的充分必要条件是（　　）.

（A）$M<0$；（B）$M>0$；（C）$M\leqslant0$；（D）$M\geqslant0$.

3. 已知 a，b，c 为一元三次方程 $x^3+px+q=0$ 的三个根，证明：

$$D=\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}=0.$$

4. 计算下列行列式：

（1）$D=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & 9 \\ 2 & 1 & -5 & 8 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{vmatrix}$；（2）$D=\begin{vmatrix} 0 & a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & b_2 \\ a_3 & 0 & 0 & b_3 \\ x & a_4 & b_4 & y \end{vmatrix}$；

（3）$D=\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$；（4）$D=\begin{vmatrix} a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a & b & c & d \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

5. 设有行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 9 & 1 & 3 & 8 \\ 9 & 9 & 9 & 0 \\ 8 & 6 & 4 & 0 \end{vmatrix}$，已知 1998，2196，2394，1800 都能被 18 整除，不计算行列式 D，试证明 D 能被 18 整除.

6. 计算下列 n 阶行列式：

（1）$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$；

（2）$\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & \cdots & a_2-b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n \end{vmatrix}$.（$n\geqslant3$）

7. 设