

21

世纪高等学校工科数学辅导教材

概率论与数理统计 学习方法与解题指导

苗晨 李阳 魏晓丽 姜凤利 等编著

化学工业出版社

21世纪高等学校工科数学辅导教材

概率论与数理统计 学习方法与解题指导

苗 晨 李 阳 魏晓丽 姜凤利 等编著



化学工业出版社

· 北京 ·

本书以教育部制定的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”为依据，与浙江大学《概率论与数理统计》教材相配套，主要包括概率论内容5章，数理统计内容3章，每章包括基本要求、内容提要、典型例题精析、重要知识和方法的注解和释疑解难，并附有A、B两类习题，有助于读者开拓思路加深理解教材。书后附有八套自测题，并给出参考答案。

本书可作为高等学校工科、管理、财经及非数学类的理科专业的教学参考用书，也适合作为各专业本科生考研学习参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计学习方法与解题指导/苗晨，李阳，魏晓丽，
姜凤利等编著. —北京：化学工业出版社，2012.7

21世纪高等学校工科数学辅导教材

ISBN 978-7-122-14844-5

I. 概… II. ①苗…②李…③魏…④姜… III. ①概率论-高等学校-教学参考资料②数理统计-高等学校-教学参考资料 IV. O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 158877 号

责任编辑：唐旭华 郝英华

装帧设计：张 静

责任校对：宋 夏

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号 邮政编码 100011）

印 刷：北京市振南印刷有限责任公司

装 订：三河市宇新装订厂

787mm×1092mm 1/16 印张 11 1/2 字数 296 千字 2012 年 10 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686） 售后服务：010-64518899

网 址：<http://www.cip.com.cn>

凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定 价：21.00 元

版权所有 违者必究

前 言

《概率论与数理统计》课程是研究随机现象统计规律性的数学分支。随着现代科学技术的迅猛发展，概率论与数理统计的理论与方法已广泛地应用于许多科学领域，诸如工业、农业、医药、卫生等国民经济各个部门。《概率论与数理统计》是学习现代科学技术的重要理论基础，是高等学校理工科、经济、管理等专业重要的基础课程之一。

本书是高等学校规划教材《概率论与数理统计》（浙江大学盛骤等主编）的配套辅导书。书中融入了作者多年教学实践中的经验体会，旨在帮助初学者尽快理解这门课程的基本理论，掌握其思维方式和解题技巧，培养分析问题和解决问题的能力。

本书以教材内容为主线，共分 8 章。内容包括：随机事件和概率，随机变量及其分布，多维随机变量及其分布，随机变量的数字特征，大数定律及中心极限定理，样本及抽样分布，参数估计，假设检验。每章包括以下四个部分。

(1) 内容提要。简要列出了各章的基本概念、重要定理和结论。在内容综述上做到简练准确，科学规范，便于读者学习时掌握课程内容。

(2) 典型例题。每章都列举了大量的典型例题，并给出了详细的解答过程。通过这些典型例题的示范作用，引导学生掌握各类习题的解题方法，学会分析随机问题的思维方法，并逐步培养起独立分析和解决随机问题的能力。

(3) 练习题。每章列出了各类考试中经常出现的试题，初学者只要求试做练习题的 A 题，B 题可作为学有余力的同学选做。通过试做这些练习题，帮助学生掌握课程学习中的知识要点与解题方法。

(4) 练习题参考答案。为使学生更好地掌握每章重点内容，检验学习效果，我们给出了练习题的参考答案或提示，以巩固和提高学生解答各类随机问题的能力。

最后，给出了八套自测题及自测题参考答案，读者可以用来检验自己的学习效果。练习题中带 * 的题属于较难的内容，读者可以选做。

本书第 1 章和第 5 章由魏晓丽副教授编写，第 2 章和第 8 章由姜凤利老师编写，第 3 章和第 4 章由李阳副教授编写，第 6 章和第 7 章由苗晨副教授编写，李金秋老师提供了全部自测题、参考答案和提示。全书由苗晨副教授组稿，宋岱才教授阅读了全书并修改定稿。

在书稿完成的过程中，得到了辽宁石油化工大学教务处和理学院广大教师的支持和帮助，在此谨向他们表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，书中难免有不足之处，希望广大读者批评指正。

编 者

2012 年 6 月

目 录

第 1 章 随机事件和概率	1
1.1 内容提要	1
1.2 典型例题	4
1.3 练习题	13
第 2 章 随机变量及其分布	17
2.1 内容提要	17
2.2 典型例题	20
2.3 练习题	24
第 3 章 多维随机变量及其分布	28
3.1 内容提要	28
3.2 典型例题	30
3.3 练习题	39
第 4 章 随机变量的数字特征	44
4.1 内容提要	44
4.2 典型例题	46
4.3 练习题	54
第 5 章 大数定律及中心极限定理	58
5.1 内容提要	58
5.2 典型例题	59
5.3 练习题	62
第 6 章 样本及抽样分布	65
6.1 内容提要	65
6.2 典型例题	67
6.3 练习题	70
第 7 章 参数估计	73
7.1 内容提要	73
7.2 典型例题	75
7.3 练习题	86
第 8 章 假设检验	91
8.1 内容提要	91

8.2 典型例题	92
8.3 练习题	97

概率论与数理统计自测题 102

练习题参考答案 115

概率论与数理统计自测题参考答案 161

第1章 概率论的基本概念 161

1.1 随机事件与样本空间 161

1.2 古典概型 161

1.3 概率的公理化定义 161

1.4 条件概率与事件的独立性 161

1.5 随机变量及其分布 161

1.6 离散型随机变量 161

1.7 连续型随机变量 161

1.8 随机变量的数字特征 161

1.9 大数定律与中心极限定理 161

1.10 正态分布 161

1.11 方差分析 161

1.12 极限定理 161

1.13 似然估计 161

1.14 假设检验 161

1.15 似然比检验 161

1.16 贝叶斯统计 161

1.17 蒙特卡洛方法 161

1.18 似然函数 161

1.19 似然比检验 161

1.20 似然估计 161

1.21 似然函数 161

1.22 似然比检验 161

1.23 似然估计 161

1.24 似然函数 161

1.25 似然比检验 161

1.26 似然估计 161

1.27 似然函数 161

1.28 似然比检验 161

1.29 似然估计 161

1.30 似然函数 161

1.31 似然比检验 161

1.32 似然估计 161

1.33 似然函数 161

1.34 似然比检验 161

1.35 似然估计 161

1.36 似然函数 161

1.37 似然比检验 161

1.38 似然估计 161

1.39 似然函数 161

1.40 似然比检验 161

1.41 似然估计 161

1.42 似然函数 161

1.43 似然比检验 161

1.44 似然估计 161

1.45 似然函数 161

1.46 似然比检验 161

1.47 似然估计 161

1.48 似然函数 161

1.49 似然比检验 161

1.50 似然估计 161

1.51 似然函数 161

1.52 似然比检验 161

1.53 似然估计 161

1.54 似然函数 161

1.55 似然比检验 161

1.56 似然估计 161

1.57 似然函数 161

1.58 似然比检验 161

1.59 似然估计 161

1.60 似然函数 161

1.61 似然比检验 161

1.62 似然估计 161

1.63 似然函数 161

1.64 似然比检验 161

1.65 似然估计 161

1.66 似然函数 161

1.67 似然比检验 161

1.68 似然估计 161

1.69 似然函数 161

1.70 似然比检验 161

1.71 似然估计 161

1.72 似然函数 161

1.73 似然比检验 161

1.74 似然估计 161

1.75 似然函数 161

1.76 似然比检验 161

1.77 似然估计 161

1.78 似然函数 161

1.79 似然比检验 161

1.80 似然估计 161

1.81 似然函数 161

1.82 似然比检验 161

1.83 似然估计 161

1.84 似然函数 161

1.85 似然比检验 161

1.86 似然估计 161

1.87 似然函数 161

1.88 似然比检验 161

1.89 似然估计 161

1.90 似然函数 161

1.91 似然比检验 161

1.92 似然估计 161

1.93 似然函数 161

1.94 似然比检验 161

1.95 似然估计 161

1.96 似然函数 161

1.97 似然比检验 161

1.98 似然估计 161

1.99 似然函数 161

1.100 似然比检验 161

1.101 似然估计 161

1.102 似然函数 161

1.103 似然比检验 161

1.104 似然估计 161

1.105 似然函数 161

1.106 似然比检验 161

1.107 似然估计 161

1.108 似然函数 161

1.109 似然比检验 161

1.110 似然估计 161

1.111 似然函数 161

1.112 似然比检验 161

1.113 似然估计 161

1.114 似然函数 161

1.115 似然比检验 161

1.116 似然估计 161

1.117 似然函数 161

1.118 似然比检验 161

1.119 似然估计 161

1.120 似然函数 161

1.121 似然比检验 161

1.122 似然估计 161

1.123 似然函数 161

1.124 似然比检验 161

1.125 似然估计 161

1.126 似然函数 161

1.127 似然比检验 161

1.128 似然估计 161

1.129 似然函数 161

1.130 似然比检验 161

1.131 似然估计 161

1.132 似然函数 161

1.133 似然比检验 161

1.134 似然估计 161

1.135 似然函数 161

1.136 似然比检验 161

1.137 似然估计 161

1.138 似然函数 161

1.139 似然比检验 161

1.140 似然估计 161

1.141 似然函数 161

1.142 似然比检验 161

1.143 似然估计 161

1.144 似然函数 161

1.145 似然比检验 161

1.146 似然估计 161

1.147 似然函数 161

1.148 似然比检验 161

1.149 似然估计 161

1.150 似然函数 161

1.151 似然比检验 161

1.152 似然估计 161

1.153 似然函数 161

1.154 似然比检验 161

1.155 似然估计 161

1.156 似然函数 161

1.157 似然比检验 161

1.158 似然估计 161

1.159 似然函数 161

1.160 似然比检验 161

1.161 似然估计 161

1.162 似然函数 161

1.163 似然比检验 161

1.164 似然估计 161

1.165 似然函数 161

1.166 似然比检验 161

1.167 似然估计 161

1.168 似然函数 161

1.169 似然比检验 161

1.170 似然估计 161

1.171 似然函数 161

1.172 似然比检验 161

1.173 似然估计 161

1.174 似然函数 161

1.175 似然比检验 161

1.176 似然估计 161

1.177 似然函数 161

1.178 似然比检验 161

1.179 似然估计 161

1.180 似然函数 161

1.181 似然比检验 161

1.182 似然估计 161

1.183 似然函数 161

1.184 似然比检验 161

1.185 似然估计 161

1.186 似然函数 161

1.187 似然比检验 161

1.188 似然估计 161

1.189 似然函数 161

1.190 似然比检验 161

1.191 似然估计 161

1.192 似然函数 161

1.193 似然比检验 161

1.194 似然估计 161

1.195 似然函数 161

1.196 似然比检验 161

1.197 似然估计 161

1.198 似然函数 161

1.199 似然比检验 161

1.200 似然估计 161

1.201 似然函数 161

1.202 似然比检验 161

1.203 似然估计 161

1.204 似然函数 161

1.205 似然比检验 161

1.206 似然估计 161

1.207 似然函数 161

1.208 似然比检验 161

1.209 似然估计 161

1.210 似然函数 161

1.211 似然比检验 161

1.212 似然估计 161

1.213 似然函数 161

1.214 似然比检验 161

1.215 似然估计 161

1.216 似然函数 161

1.217 似然比检验 161

1.218 似然估计 161

1.219 似然函数 161

1.220 似然比检验 161

1.221 似然估计 161

1.222 似然函数 161

1.223 似然比检验 161

1.224 似然估计 161

1.225 似然函数 161

1.226 似然比检验 161

1.227 似然估计 161

1.228 似然函数 161

1.229 似然比检验 161

1.230 似然估计 161

1.231 似然函数 161

1.232 似然比检验 161

1.233 似然估计 161

1.234 似然函数 161

1.235 似然比检验 161

1.236 似然估计 161

1.237 似然函数 161

1.238 似然比检验 161

1.239 似然估计 161

1.240 似然函数 161

1.241 似然比检验 161

1.242 似然估计 161

1.243 似然函数 161

1.244 似然比检验 161

1.245 似然估计 161

1.246 似然函数 161

1.247 似然比检验 161

1.248 似然估计 161

第1章 随机事件和概率

本章基本要求

- (1) 了解样本空间(基本事件空间)的概念,理解随机事件的概念,掌握事件的关系及运算.
- (2) 理解概率、条件概率的概念,掌握概率的基本性质,会计算古典型概率和几何型概率,掌握概率的加法公式、减法公式、乘法公式、全概率公式,以及贝叶斯(Bayes)公式.
- (3) 理解事件独立性的概念,掌握用事件独立性进行概率计算;理解独立重复试验的概念,掌握计算有关事件概率的方法.

1.1 内容提要

1.1.1 基本概念

定义1 随机试验: ①相同条件下可重复试验; ②每次试验结果不唯一; ③试验的全部可能结果已知,但试验之前不知哪一个结果出现.

定义2 样本空间: 随机试验所产生可能结果的全体,一般记为 S . S 中的元素称为样本点,也称为基本事件. 样本点的集合称为随机事件,简称事件. 样本空间 S 称为必然事件,空集 \emptyset 称为不可能事件.

设 $A, B, A_k (k=1, 2, \dots)$ 是样本空间 S 中的随机事件,它们之间的关系及运算有:

定义3 包含关系: $A \subset B$ 表示事件 A 发生必然导致事件 B 发生.

定义4 相等关系: $A = B$ 表示事件 A, B 相互包含.

定义5 和事件: ①两个事件的和事件 $A \cup B$,表示事件 A, B 至少有一个发生; ②多个事件的和事件 $\bigcup_k A_k$,表示事件 A_k 中至少有一个发生.

定义6 积事件: ①两个事件的积事件 $A \cap B$ 或 AB ;

②多个事件的积事件 $\bigcap_k A_k$.

定义7 差事件: $A - B$ 表示事件 A 发生而事件 B 不发生.

定义8 不相容(或互斥)事件: 若事件 A, B 不同时发生,即如有 $AB = \emptyset$,则称事件 A, B 为不相容事件或互斥事件.

定义9 互逆(或对立)事件: 如有 $AB = \emptyset$ 且 $A \cup B = S$,则称事件 A, B 为互逆(或对立)事件,记作 $A = \bar{B}$ 或 $B = \bar{A}$.

1.1.2 事件的性质

(1) 事件关系的性质

$$\begin{aligned} A &\subset A \cup B; B \subset A \cup B; A \cup A = A; A - B \subset A; A - B = \bar{A}B; (A - B) \cup A = A; \\ (A - B) \cup B &= A \cup B; (A - B) \cap B = \emptyset; \bar{\bar{A}} = A; A \cup \bar{A} = S; A \cap \bar{A} = \emptyset; A \cap A = A; \\ A \cup \emptyset &= A; A \cup S = S; A \cap S = A; A \cap \emptyset = \emptyset. \end{aligned}$$

(2) 事件的运算性质

① 交换律: $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$;

② 结合律: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

③ 分配律: $A(B \cup C) = (AB) \cup (AC)$; $A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C)$;

④ De Morgan 对偶定律: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}$; $\overline{\bigcup_k A_k} = \bigcap_k \overline{A_k}$; $\overline{\bigcap_k A_k} = \bigcup_k \overline{A_k}$.

1.1.3 事件的概率及其计算

(1) 概率的定义

概率的定义是公理化的, 即 P 是从 S 的子集族到 $[0,1]$ 上的一个映射, 若满足以下三个条件.

① $P(A) \geq 0$; ② $P(S) = 1$; ③ 若 $A_i A_j = \emptyset (i \neq j; i, j = 1, 2, \dots)$, 有 $P(\bigcup_k A_k) = \sum_k P(A_k)$, 则称 $P(A)$ 为事件 A 发生的概率.

(2) 概率的性质

① $P(\emptyset) = 0$;

② (有限可加性) 若 A_1, A_2, \dots, A_n 两两互不相容, 则 $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$;

③ $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;

④ 若 $A \subset B$, 则 $P(B - A) = P(B) - P(A)$, 一般的, 若 $A \not\subset B$, 则有

$$P(B - A) = P(B - AB) = P(B) - P(AB);$$

⑤ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n).$$

(3) 等可能概型

特征: 每个样本点被取到的可能性相等.

① 古典概型

特征: 样本空间是有限集, 每个基本事件发生的可能性相同. 其计算公式为

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{A \text{ 中样本点数}}{S \text{ 中样本点数}}.$$

计算古典概型的基本公式是排列组合公式.

② 几何概型

特征: 样本空间是 n 维欧氏空间的子集, 且每个样本点的取得具有等可能性. 其计算公式为 $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(S)}$.

其中, $\mu(A), \mu(S)$ 分别表示 A 及 S 在 R^n 中的度量, 如长度、面积、体积等.

(4) 加法原理

设事件 A 有 n 类方法出现, 若第 i 类方法包含 m_i 种方法, 则 A 共有 $m_1 + m_2 + \dots + m_n$ 种方法出现.

(5) 乘法原理

设事件 A 有 n 类方法出现, 另一事件 B 对每一种 A 的出现方法又有 m 种不同的方法出

现，则事件 AB 以 nm 种不同的方法出现。

1.1.4 条件概率与事件的独立性

定义 10 条件概率：设 A, B 是两个事件，若 $P(A) > 0$ ，称 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$ 为 A

发生的条件下 B 发生的条件概率。

定义 11 事件的独立性：若 $P(AB) = P(A)P(B)$ ，则称 A, B 相互独立。这时，显然以下三对事件：

① $\{\bar{A}, B\}, \{A, \bar{B}\}, \{\bar{A}, \bar{B}\}$ 也两两独立。

当 $P(A) > 0$ 时， A, B 相互独立 $\Leftrightarrow P(B|A) = P(B)$ 。

若对任意的 $k (1 \leq k \leq n)$ ，任意 $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ ，有

$P(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k})$ ，则称 A_1, A_2, \dots, A_n 为相互独立事件。

注意：① A_1, A_2, \dots, A_n 为相互独立事件时，定义中共有 $(2^n - n - 1)$ 个等式。

② A_1, A_2, \dots, A_n 相互独立 $\Rightarrow A_1, A_2, \dots, A_n$ 两两独立，反之不然。

1.1.5 重要公式

(1) 乘法公式

若 $P(A) > 0, P(B) > 0$ ，有

$$P(AB) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A),$$

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 A_2) \dots P(A_n|A_1 \dots A_{n-1}).$$

(2) 全概率公式

设 B_1, B_2, \dots, B_n 为样本空间 S 的一个划分，且

$$P(B_i) > 0 (i = 1, 2, \dots, n), \text{ 对任意 } A \subset S, \text{ 有 } P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i).$$

(3) 贝叶斯公式

设 B_1, B_2, \dots, B_n 为样本空间 S 的一个划分，且

$$P(B_i) > 0 (i = 1, 2, \dots, n), \text{ 对任意 } A \subset S, \text{ 若 } P(A) > 0, \text{ 则}$$

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^n P(A|B_j)P(B_j)}, i = 1, 2, \dots, n.$$

注意：① 贝叶斯公式是条件概率与全概率公式相结合的产物，其证明过程必须记住。

② 使用贝叶斯公式的关键是找到划分 $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ 。

1.1.6 可靠性问题

设每个元件独立，第 i 个元件正常工作的概率为 p_i ， $i = 1, 2, \dots, n$ 。若一个系统由 n 个元件组成，则有：

① 串联系统 可靠度为 $\prod_{i=1}^n p_i$ 。

② 并联系统 可靠度为 $1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i)$ 。

特殊的，若元件结构相同，就有 $p_i = p$ ， $i = 1, 2, \dots, n$ ，则串联系统的可靠度为 p^n ，

并联系统的可靠度为 $1 - (1-p)^n$ ，进而可以计算混联系统的可靠度。

1.2 典型例题

【例 1】选择题

(1) 投掷一枚骰子，设 $A = \text{“出现点数不超过 3”}$ ，则称 A 为_____.

- (A) 不可能事件 (B) 基本事件 (C) 必然事件 (D) 随机事件

【解】 $A = \{1, 2, 3\}$ ，它不是空集，故不选 (A)，不是单点集，故不选 (B)， A 也不是全集，故不选 (C)， A 可能发生也可能不发生，符合随机事件的定义，故应该选 (D)。

(2) 设 A, B 是样本空间 S 中的随机事件，则 $(A \cup B)(\bar{A} \cup \bar{B})$ 表示_____.

- (A) 不可能事件 (B) A, B 恰有一个发生 (C) 必然事件 (D) A, B 不同时发生

【解】 根据集合运算的性质， $(A \cup B)(\bar{A} \cup \bar{B}) = \emptyset \cup (A\bar{B}) \cup (\bar{A}B) \cup \emptyset$ ，它表示 A 发生且 B 不发生，或者， B 发生且 A 不发生，故应该选 (B)。

(3) 设 A, B 是随机事件，且 $P(AB) = 0$ ，则下列命题正确的是_____.

- (A) A, B 互斥 (B) AB 是不可能事件
(C) $P(A) = 0$ 或 $P(B) = 0$ (D) AB 不一定是不可能事件

【解】 $AB = \emptyset \Rightarrow P(AB) = 0$ ，反之未必。如：做连续区间上取点的试验，设 A, B 都表示恰好取到中点，由几何概率知， $P(AB) = 0$ ，但是 $AB \neq \emptyset$ ，故 (A)、(B) 不对。再如：进行投一枚硬币的试验， $A = \text{“正面向上”}$ ， $B = \text{“反面向上”}$ ，满足 $P(AB) = 0$ ，但是， $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$ ，故 (C) 不对。综上所述，应该选 (D)。

(4) 假设 $B \subset A$ ，则下列命题正确的是_____.

- (A) $P(\bar{A} \bar{B}) = 1 - P(A)$ (B) $P(\bar{A} \bar{B}) = P(\bar{A}) - P(\bar{B})$
(C) $P(B|A) = P(B)$ (D) $P(A|\bar{B}) = P(A)$

【解】 由 $B \subset A$ 知 $\bar{B} \supset \bar{A}$ ，故 $P(\bar{A} \bar{B}) = P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ ，(A) 正确，(B) 不对。

$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)}$ ，(C) 不对； $P(A|\bar{B}) = \frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})} \neq P(A)$ ，(D) 也不对。答案为 (A)。

(5) 设 A, B 为随机事件，且 $P(B) > 0$ ， $P(A|B) = 1$ 则必有_____.

- (A) $P(A \cup B) > P(A)$ (B) $P(A \cup B) > P(B)$
(C) $P(A \cup B) = P(A)$ (D) $P(A \cup B) = P(B)$

【解】 选 (C)，根据条件概率公式和加法公式，即可得答案。

(6) 设 A, B, C 是随机事件，且有 $P(C|AB) = 1$ ，则下列命题正确_____.

- (A) $P(AB) = P(C)$ (B) $P(C) \geq P(A) + P(B) - 1$
(C) $P(A \cup B) = P(C)$ (D) $P(C) \leq P(A) + P(B) - 1$

【解】 由条件概率公式， $P(C|AB) = \frac{P(ABC)}{P(AB)} = 1$ ，得 $P(AB) = P(ABC)$ ， $P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \geq P(A) + P(B) - 1$ ， $P(ABC) \leq P(C)$ ，就有 $P(C) \geq P(AB) \geq P(A) + P(B) - 1$ ，答案为 (B)。

(7) $P(A) = p_1$, $P(B) = p_2$, $P(A \cup B) = p_3$ ，则为 $P(A\bar{B}) =$ _____.

- (A) $p_1 - p_2$ (B) $p_3 - p_2$ (C) $p_1(1 - p_2)$ (D) $p_2 - p_1$

【解】 $P(A\bar{B}) = P(A - B) = P(A \cup B - B) = P(A \cup B) - P(B)$ ，答案为 (B)。

(8) 设 A, B, C 是两两独立且不能同时发生的随机事件，且

若 $P(A) = P(B) = P(C) = x$, 则 x 的最大值为_____.

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【解】 考虑式 $P(AB \cup AC \cup BC)$, 而

$$P(AB \cup AC \cup BC) = P(AB) + P(AC) + P(BC) - 3P(ABC) + P(ABC)$$

由 $= P(AB) + P(AC) + P(BC) = 3x^2$,

而 $P(AB \cup AC \cup BC) \leq 1$, 故答案为 (D).

(9) 设 A, B 是两个随机事件, 且 $0 < P(A) < 1, P(B) > 0, P(B|A) = P(B|\bar{A})$, 则必有_____.

- (A) $P(A|B) = P(\bar{A}|B)$ (B) $P(A|B) \neq P(\bar{A}|B)$
 (C) $P(AB) = P(A)P(B)$ (D) $P(AB) \neq P(A)P(B)$

【解】 由题设 $P(B|A) = P(B|\bar{A})$, 有 $\frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B\bar{A})}{P(\bar{A})}$, 又由 $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ 及 $P(B\bar{A}) = P(B) - P(BA)$, 有 $\frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B) - P(BA)}{1 - P(A)}$,

即 $P(AB) - P(A)P(AB) = P(A)P(B) - P(A)P(BA)$, 化简为 $P(AB) = P(A)P(B)$, 选 (C).

(10) 某人向同一目标独立重复射击, 每次射击命中目标的概率为 $P(0 < p < 1)$, 则此人第 4 次射击恰好第 2 次命中目标的概率为_____.

- (A) $3P(1-p)^2$ (B) $6P(1-p)^2$ (C) $3P^2(1-p)^2$ (D) $6P^2(1-p)^2$

【解】 “第 4 次射击恰好第 2 次命中目标” 表示 4 次射击中第 4 次命中目标, 前 3 次射击中有 1 次命中目标. 由独立重复性知所求概率为 $C_3^1 P^2(1-p)^2$. 故应选 (C).

【例 2】 填空题

(1) 设两个相互独立的事件 A 和 B 都不发生的概率为 $\frac{1}{9}$, A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等, 则 $P(A) = ()$.

【解】 由题设, $P(\bar{A}\bar{B}) = \frac{1}{9}$ 且 $P(A\bar{B}) = P(\bar{A}B)$ 及 A, B 独立, 于是

$$P(A) - P(AB) = P(B) - P(AB),$$

即 $P(A) = P(B)$, 此外

$$\frac{1}{9} = P(\bar{A}\bar{B}) = 1 - P(A) - P(B) + P(AB) = 1 - 2P(A) + P^2(A),$$

解此二元一次方程, 得 $P(A) = \frac{2}{3}$.

(2) 设两两相互独立的三事件 A, B 和 C 满足条件 $ABC = \emptyset, P(A) = P(B) = P(C) < \frac{1}{2}$, 且已知 $P(A \cup B \cup C) = \frac{9}{16}$, 则 $P(A) = ()$.

【解】 结合题设, $P(A \cup B \cup C) = \frac{9}{16}$, 且 A, B 和 C 两两独立, 则有

$$\frac{9}{16} = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC) = 3P(A) - 3P^2(A),$$

从而 $3P^2(A) - 3P(A) + \frac{9}{16} = 0$, 解得 $P(A) = \frac{1}{4}$.

(3) 袋中有 50 个乒乓球, 其中 20 个是黄球, 30 个是白球. 今有两人依次随机地从袋中各取一球, 取后不放回, 则第二个人取得黄球的概率是 ().

【解】 定义 A_1 为第一人取得黄球, A_2 为第二人取得黄球, 则由全概率公式, 有

$$P(A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) + P(\bar{A}_1)P(A_2|\bar{A}_1) = \frac{20}{50} \cdot \frac{19}{49} + \frac{30}{50} \cdot \frac{20}{49} = \frac{20 \cdot 49}{50 \cdot 49} = \frac{2}{5}.$$

(4) 设工厂 A 和工厂 B 的产品的次品率分别为 1% 和 2%, 现从由 A 和 B 的产品分别占 60% 和 40% 的一批产品中随机抽取一件, 发现是次品, 则该次品属 A 生产的概率是 ().

【解】 定义 A 表示是工厂 A 的产品, 则 $P(A)=0.6$; 定义 B 表示是工厂 B 的产品, 则 $P(B)=0.4$; 定义 C 表示一次随机抽取到的产品是次品, 则 $P(C|A)=1\%$ 且 $P(C|B)=2\%$. 综上, 由贝叶斯公式有

$$P(A|C) = \frac{P(A)P(C|A)}{P(A)P(C|A) + P(B)P(C|B)} = \frac{0.6 \cdot 0.01}{0.6 \cdot 0.01 + 0.4 \cdot 0.02} = \frac{3}{7}.$$

(5) 已知 A, B 两个事件满足条件 $P(AB) = P(\bar{A}\bar{B})$, 且 $P(A) = p$, 则 $P(B) = ()$.

【解】 $P(AB) = P(\bar{A}\bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(AB)$,
则 $P(A) + P(B) = 1$, 所以 $P(B) = 1 - p$.

(6) 设 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$, $P(AB) = 0$, $P(AC) = P(BC) = \frac{1}{16}$, 则 A, B, C 全不发生的概率为 _____, A, B, C 至少有一个发生的概率为 _____.

【解】 A, B, C 全不发生的概率为

$$\begin{aligned} P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) &= P(\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}) = 1 - P(A \cup B \cup C) \\ &= 1 - [P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)] \\ &= 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{16} - \frac{1}{16} \right) = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

A, B, C 至少有一个发生的概率为 $P(A \cup B \cup C) = 1 - P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = \frac{5}{8}$.

(7) 一批产品共有 10 个正品和 2 个次品, 任意抽两次, 每次抽 1 个, 抽出后不再放回, 则第二次抽出的是次品的概率为 ().

【解】方法一 由抽签原理 (抽签与先后次序无关), 不放回抽样中第二次抽得次品的概率与第一次抽得次品的概率相同, 都是: $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

方法二 记 A 表示 “第二次抽出的是次品”, 则由古典概型知

$$P(A) = \frac{11 \cdot 2}{12 \cdot 11} = \frac{1}{6}.$$

方法三 记 A 表示 “第 i 次抽出的是次品”, $i = 1, 2$, 则由已知得

$$P(A_1) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}, P(\bar{A}_1) = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}, P(A_2|A_1) = \frac{1}{11}, P(A_2|\bar{A}_1) = \frac{2}{11},$$

由全概率公式得

$$P(A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) + P(\bar{A}_1)P(A_2|\bar{A}_1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{11} + \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{11} = \frac{1}{6}.$$

(8) 已知随机事件 A 的概率 $P(A) = 0.5$, 随机事件 B 的概率 $P(B) = 0.6$ 及条件概率 $P(B|A) = 0.8$, 则和事件 $A \cup B$ 的概率 $P(A \cup B)$ 是 ().

【解】 由题设有 $P(AB) = P(A)P(B|A) = 0.5 \times 0.8 = 0.4$, 故

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.5 + 0.6 - 0.4 = 0.7.$$

(9) 甲、乙两人独立地对同一目标射击一次, 其命中率分别为 0.6 和 0.5. 现已知目标

被命中，则它是甲射中的概率为（ ）。

【解】 记 $A = \{\text{甲命中目标}\}$, $B = \{\text{乙命中目标}\}$, $C = \{\text{目标被命中}\}$, 则由题意知 A, B 相互独立，且

$$P(A) = 0.6, P(B) = 0.5, C = A \cup B,$$

$$\text{故 } P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$

$$= 0.6 + 0.5 - 0.6 \cdot 0.5 = 0.8.$$

由条件概率公式得所求概率为

$$P(A|C) = \frac{P(AC)}{P(C)} = \frac{P(A)}{P(C)} = \frac{0.6}{0.8} = 0.75.$$

(10) 设在三次独立试验中，事件 A 出现的概率相等，若已知 A 至少出现一次的概率等于 $\frac{19}{27}$ ，则事件 A 在每次试验中出现的概率是（ ）。

【解】 设在每次试验中 A 出现的概率为 P ，则

$$\frac{19}{27} = P\{\text{A至少出现一次}\} = 1 - P\{\text{A出现0次}\}$$

$$= 1 - C_3^0 P^0 (1-P)^{3-0} = 1 - (1-P)^3$$

$$\text{解得 } P = \frac{1}{3}.$$

【例 3】 设 A, B, C 是三个事件，试将下列事件用 A, B, C 的运算表示出来。

- ① 仅 A 发生； ② A, B 发生，但 C 不发生； ③ 三个事件不都发生；
- ④ 三个事件至少一个发生； ⑤ 三个事件至多一个发生； ⑥ 三个事件都不发生；
- ⑦ 三个事件不多于一个发生； ⑧ 三个事件恰有一个发生； ⑨ 三个事件恰有两个发生；
- ⑩ 三个事件至少两个发生。

【解】 ① $A \bar{B} \bar{C}$; ② $AB \bar{C}$; ③ \bar{ABC} 或 $\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$; ④ $A \cup B \cup C$; ⑤ $\bar{A} \bar{B} \cup \bar{B} \bar{C} \cup \bar{A} \bar{C}$;

⑥ $\bar{A} \bar{B} \bar{C}$ 或 $A \cup B \cup C$; ⑦ $\bar{A} \bar{B} \bar{C} \cup A \bar{B} \bar{C} \cup \bar{A} \bar{B} C$; ⑧ $A \bar{B} \bar{C} \cup \bar{A} B \bar{C} \cup \bar{A} \bar{B} C$; ⑨ $AB \bar{C} \cup A \bar{B} C \cup \bar{A} BC$;

⑩ $AB \cup AC \cup BC$.

【例 4】 设 A, B 是两个事件，那么事件“ A, B 都发生”，“ A, B 不都发生”，“ A, B 都不发生”中，哪两个是对立事件？

【解】 上述三个事件可以表示为 AB , \bar{AB} , $\bar{A} \bar{B}$ ，显然， AB 与 \bar{AB} 是对立事件。

【例 5】 比较下列概率的大小。

$P(B)$; $P(A \cup B)$; $P(AB)$; $P(A) + P(B)$, 其中, $P(A) > 0, P(B) > 0$.

【解】 因为 $AB \subset B \subset A \cup B$, 就有 $P(AB) \leq P(B) \leq P(A \cup B)$, 另外,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \leq P(A) + P(B).$$

【例 6】 设 A, B 是两个事件，满足 $P(AB) = P(\bar{A} \bar{B})$, 且 $P(A) = p$, 求 $P(B)$.

【解】 $P(AB) = P(\bar{A} \bar{B}) = P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(A) - P(B) + P(AB)$, $P(B) = 1 - p$.

【例 7】 袋子中有 7 只红球，5 只白球，不放回地陆续取出 3 只，求：

- ① 顺序为红、白、红的概率； ② 有 2 只红球的概率。

【解】 ① 样本空间中样本点数为 12 个球中取出 3 个的排列 P_{12}^3 , 以 A 表示所求事件, A 中共有 $7 \cdot 5 \cdot 6$ 个样本点, 故 $P(A) = \frac{7 \cdot 5 \cdot 6}{12 \cdot 11 \cdot 10} = 0.1591$.

② 不放回地陆续取出 3 只，有 2 只红球，与取球的顺序无关。以 B 表示所求事件——2 只红球且一只白球, B 中共有 $C_7^2 C_5^1$ 个样本点, 样本空间中样本点数为 12 个球中取出 3 个的

组合数 C_{12}^3 , 故 $P(A) = \frac{C_7^2 C_5^1}{C_{12}^3} = \frac{21}{44} = 0.4773$.

【例 8】 n 对新人参加婚礼, 现进行一项游戏: 随机的把人分为 n 对, 问每对恰为夫妻的概率是多少?

【解】 把这 $2n$ 个人, 从左到右排成一排, 共有 $(2n)!$ 种排法. 处在第 1, 2 位的作为一对夫妻, 第 3, 4 位的作为一对夫妻, 如此类推. 第一位可有 $2n$ 种排法, 第二位只有 1 种排法, 第三位有 $2n-2$ 种排法, 第四位只有 1 种排法, 如此类推. 故满足要求的排法总数是 $2n(2n-2)(2n-4)\cdots 2=2^n n!$, 以 A 表示所求事件, 所以

$$P(A) = \frac{2^n n!}{(2n)!} = 0.1591.$$

【例 9】 将 n 个人随机分到 N 个房间中 ($n \leq N$), 每个人分到哪个房间是等可能的, 且设每个房间可容纳的人数没有限制, 求:

- ① 某指定的一个房间 (例如第一个房间) 恰有 m 个人的概率 ($m \leq n$);
- ② 每两个人都不在同一个房间的概率.

【解】 ① 设 $A = \{\text{某指定的一个房间恰有 } m \text{ 个人}\}$

由于每一个人分房间的时候都有 N 种分法, n 个人分完才算结束, 所以样本点总数为 N^n .

对 A 中样本点数, 房间是固定的, 但哪 m 个人分到此房间是不确定的. 也就是说哪 m 个人分到此房间都可以, 则先从 n 个人中选出 m 个人来, 让这 m 个人在此房间, 剩下的 $n-m$ 个人分到其他的 $N-1$ 房间中, 所以事件 A 中的样本点数为 $C_n^m \cdot (N-1)^{n-m}$.

故得 $P(A) = \frac{C_n^m \cdot (N-1)^{n-m}}{N^n}$.

② 设 $B = \{\text{每两个人都不在同一个房间}\}$, 样本点数与①一致, 为 N^n . B 中样本点数容易求出, 为

$$N \cdot (N-1) \cdots (N-n+1) = C_N^n \cdot n!$$

故得 $P(B) = \frac{C_N^n \cdot n!}{N^n}$.

【例 10】 (抽签问题) 设有 15 个人要去看电影, 只有 7 张电影票, 于是进行抽签决定谁去. 求第 5 个抽签者抽到电影票的概率.

【解】 设事件 $A = \{\text{第 5 个抽签者抽到电影票}\}$

这是一个不放回抽样, 且与次序有关, 所以样本总数为

$$15 \cdot 14 \cdots 2 \cdot 1 = 15!$$

事件 A 要求第 5 个人抽到电影票. 我们可以先任取一张电影票“预留”给第 5 个人, 其他 14 个人任意抽取, 那么 A 的样本点数为

$$7 \cdot 14 \cdot 13 \cdots 2 \cdot 1 = 7 \cdot 14!$$

所以 $P(A) = \frac{7 \cdot 14!}{15!} = \frac{7}{15}$.

【例 11】 求在桥牌比赛中, 4 张 A 落在同一个人手中的概率.

【解】 设事件 $B = \{4 \text{ 张 A 落在同一个人手中}\}$.

① 样本点总数. 样本点总数就是 52 张扑克牌的分法. 52 张牌要分给 4 个人, 每人 13 张, 相当于将 52 个物体分成 4 组, 每组 13 个, 所以样本点总数为 $\frac{52!}{(13!)^4}$.

② 事件 B 中样本点数. 事件 B 要求 4 张 A 落在同一个人手中, 哪一个人是不确定的,

于是我们先从4个人中任选一人，让此人手中有4张A，那么这时还有48张牌要分给这4个人，其中再分给有4张A的这个人9张牌，其他3人每人13张牌，于是B中样本点数为

$$C_4^1 \cdot \frac{48!}{9!(13!)^3}.$$

所以 $P(B) = \frac{C_4^1 \cdot \frac{48!}{9!(13!)^3}}{\frac{52!}{(13!)^4}} = \frac{132}{5 \cdot 2499} \approx 0.01056.$

【例 12】 某市的电话号码由8位数构成，设0~9这10个数字在每位数中出现是等可能的。求以下概率：①8位数全不同的概率；②至少2个数字相同的概率；③恰好有两个位置上号码相同而其他位置上号码各不相同的概率。

【解】 ①8位数全不同的概率 $p_1 = \frac{P_{10}^8}{10^8} = 0.0181$ ；

②“至少2个数字相同”与“8位数全不同”是对立事件，故概率为

$$p_2 = 1 - p_1 = 0.9819$$
；

③要满足事件“恰好有两个位置上号码相同而其他位置上号码各不相同”，可以这样安排：从8位中任意取两个位置，有 C_8^2 种取法；从0~9这10个数字任意取一个数字，有 C_{10}^1 种取法，放在这两个位置上；其余6个位置由其他9个数字作全排列，得

$$p_3 = \frac{C_8^2 C_{10}^1 P_9^6}{10^8} = 0.1693.$$

【例 13】 从5双不同的鞋子中任取4只，这4只鞋子中至少有2只配成一双的概率是多少？

【解】 方法一 样本点总数为 P_{10}^4 ，设 A =“4只鞋子中至少有2只配成一双”，考虑对立事件 \bar{A} =“4只鞋子都不构成一双”。第一只鞋子可从10只中任取一只，有10种取法；第二只鞋子从余下的8只中任取一只，有8种取法；第三只鞋子从余下的6只中任取一只，有6种取法；同理，第四只鞋子4种取法，故 \bar{A} 中共包含了 $10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4$ 个样本点，得

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4}{P_{10}^4} = \frac{13}{21}.$$

方法二 \bar{A} =“4只鞋子都不构成一双”也可以这样考虑：从5双不同的鞋子中任取4双，再从每双中任取一只，可得 \bar{A} 中样本点数为 $C_5^4 \cdot 2^4$ ，得

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{C_5^4 \cdot 2^4}{P_{10}^4} = \frac{13}{21}.$$

【例 14】 在1500个产品中有400个次品，1100个正品，任取200个，求①恰有90个次品的概率；②至少有2个次品的概率。

【解】 样本点总数为 C_{1500}^{200} 。

①设 A =“恰有90个次品”，它的样本点数为 $C_{400}^{90} \cdot C_{1100}^{110}$ ，于是 $P(A) = \frac{C_{400}^{90} \cdot C_{1100}^{110}}{C_{1500}^{200}}$ 。

②设 B =“至少有2个次品”， \bar{B} =“没有次品或有1个次品”， \bar{B} 中样本点数为

$$C_{1100}^{200} + C_{400}^1 \cdot C_{1100}^{199}$$
，因此， $P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{C_{1100}^{200} + C_{400}^1 \cdot C_{1100}^{199}}{C_{1500}^{200}}.$

【例 15】 已知 $P(B)=0.3$, $P(\bar{A}|B)=0.2$, $P(A|\bar{B})=0.75$, 求 $P(B|A)$ 。

【解】 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B})}$

$$P(A \bar{B} | A \cup B) = \frac{(1-0.2) \cdot 0.3}{(1-0.2) \cdot 0.3 + 0.75 \cdot (1-0.3)} = 0.3137.$$

【例 16】 甲、乙两人独立的向同一靶子射击一次，其命中率分别为 0.7, 0.8，若已知靶子被击中，求它只是被甲击中的概率。

【解】 设 $A = \text{“甲击中靶子”}$, $B = \text{“乙击中靶子”}$, 因两个人独立射击, 故 A, B 独立, 于是 $P(AB) = P(A)P(B) = 0.56$. 又由题意知, 这是一个条件概率, 进而

$$\begin{aligned} P(A \bar{B} | A \cup B) &= \frac{P[A \bar{B} \cap (A \cup B)]}{P(A \cup B)} = \frac{P(A \bar{B})}{P(A) + P(B) - P(AB)} \\ &= \frac{0.7 \cdot 0.2}{0.7 + 0.8 - 0.7 \cdot 0.8} = 0.1489. \end{aligned}$$

【例 17】 袋子中有 4 只红球, 3 只白球, 某人有放回地陆续取出 3 只, 每次 1 只球, 已知至少出现一次红球, 求至少出现两次红球的概率。

【解】 设事件 $A = \text{“至少出现一次红球”}$, $B = \text{“至少出现两次红球”}$, 样本点总数为 7^3 ,

$$P(B|A) = 1 - P(\bar{B}|A) = 1 - \frac{P(A \bar{B})}{P(A)},$$

事件 $A \bar{B}$ 表示 “至少出现一次红球” 且 “至多出现一次红球”, 即 $A \bar{B} = \text{“恰好出现一次红球”}$, 它的取法数为 $C_4^1 \cdot C_3^1 \cdot 3^2$. $\bar{A} = \text{“出现的都是白球”}$, 它的取法数为 3^3 . 因而

$$P(B|A) = 1 - \frac{P(A \bar{B})}{P(A)} = 1 - \frac{(C_4^1 \cdot C_3^1 \cdot 3^2)/(7^3)}{1 - (3^3)/(7^3)} = 1 - \frac{0.3149}{0.9213} = 0.6582.$$

【例 18】 一盒电子元件有 10 只, 其中 7 只正品, 3 只次品, 从中不放回地抽取 4 次, 每次 1 只, 求第一、二次取得次品且第三、四次取得正品的概率。

【解】 设 $A_i = \text{“第 } i \text{ 次取得正品”}$ ($i=1, 2, 3, 4$), 由条件概率有

$$\begin{aligned} P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 A_4) &= P(A_4 | \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) P(A_3 | \bar{A}_1 \bar{A}_2) P(\bar{A}_2 | \bar{A}_1) P(\bar{A}_1) \\ &= \frac{6}{7} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{20}. \end{aligned}$$

【例 19】 已知 $P(A)=0.5$, $P(B)=0.4$, $P(A|\bar{B})=0.6$, 求 $P(AB)$, $P(A|A \cup \bar{B})$.

【解】 由 $P(A \bar{B}) = P(\bar{B})P(A|\bar{B}) = [1 - P(B)]P(A|\bar{B}) = (1 - 0.4) \cdot 0.6 = 0.36$,

$$\text{而 } P(A \bar{B}) = P(A) - P(AB),$$

$$\text{所以 } P(AB) = 0.5 - 0.36 = 0.14,$$

$$\text{由 } P[A|A \cup \bar{B}] = \frac{P[A(A \cup \bar{B})]}{P(A \cup \bar{B})} = \frac{P(A)}{P(A \cup \bar{B})},$$

$$\text{其中 } P(A \cup \bar{B}) = P(A) + P(\bar{B}) - P(A \bar{B}) = 0.5 + 0.6 - 0.36 = 0.74,$$

$$\text{所以 } P(A|A \cup \bar{B}) = \frac{0.5}{0.74} = \frac{25}{37}.$$

【例 20】 研究生入学考试面试时由考生抽签答题, 已知 10 支考签中有 4 支难题签, 甲、乙两人各抽一签, 甲先抽 (不放回).

① 求甲、乙两人各自抽到难题签的概率;

② 若已知乙抽到了难题签, 求甲抽到难题签的概率.

【解】 ① 设 $A = \{\text{甲抽到难题签}\}$, $B = \{\text{乙抽到难题签}\}$

易知 $P(A) = \frac{4}{10}$. 由抽签原则容易看出 $P(B) = \frac{4}{10}$.

下面用全概率公式来计算 $P(B)$. 注意到 A 与 \bar{A} 为一个部分, 所以

$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} + \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{10}.$$

② 这是一个条件概率.

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9}}{\frac{4}{10}} = \frac{1}{3}.$$

【例 21】 X型汽车在 A,B,C 三个车场中分别占 $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$. 所有汽车出售的机会均等, 某人随机选一车场并随机选一车试开. 若此车恰巧是 X型的, 求此人在车场 A 选的概率.

【解】 分别以事件 A_1, A_2, A_3 表示此人选择三个车场. 以事件 D 表示他试开的为 X型汽车, 那么 A_1, A_2, A_3 为一个部分, 则

$$P(D) = \sum_{i=1}^3 P(A_i)P(D|A_i) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2},$$

$$\text{所求概率为 } P(A_1|D) = \frac{P(A_1D)}{P(D)} = \frac{P(A_1)P(D|A_1)}{P(D)} = \frac{2}{9}.$$

【例 22】 某厂仓库存有 1,2,3 号箱子分别为 10,20,30 个, 均装有某产品. 其中, 1号箱内装有正品 20 件, 次品 5 件; 2号箱内装有正品 20 件, 次品 10 件; 3号箱内装有正品 15 件, 次品 10 件. 现从中任取一箱, 再从箱中任取一件产品, 问: ① 取到正品及次品的概率各是多少? ② 若已知取到正品, 求该正品是从 1号箱中取出的概率.

【解】 ① 设 A_i = “取到第 i 号箱子” ($i=1, 2, 3$), 则 $\{A_1, A_2, A_3\}$ 构成样本空间的一个划分, 且

$$P(A_1) = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}, \quad P(A_2) = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}, \quad P(A_3) = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}.$$

设 B = “取得正品”, \bar{B} = “取得次品”, 则由全概率公式,

$$P(B) = \sum_{i=1}^3 P(A_i)P(B|A_i) = \frac{1}{6} \cdot \frac{20}{25} + \frac{1}{3} \cdot \frac{20}{30} + \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{25} = \frac{59}{90},$$

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = \frac{31}{90}.$$

② 已知取到正品, 求该正品是从 1号箱中取出的概率, 这是一个条件概率问题.

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{20}{25}}{\frac{59}{90}} = \frac{12}{59}.$$

【例 23】 商店里玻璃杯装箱出售, 每箱装 20 只相同型号的玻璃杯. 设各箱中有 0, 1, 2 只残次品的概率为 0.8, 0.1, 0.1. 顾客购买时, 售货员任取一箱, 由顾客随意从中抽取 4 只, 若无残次品, 则买下该箱. 求: ① 顾客买下该箱的概率. ② 顾客买下该箱后, 箱中无残次品的概率.

【解】 ① 设 A_i = “箱中有 i 只残次品” ($i=0, 1, 2$), 则 $\{A_0, A_1, A_2\}$ 构成样本空间的一个划分, 且 $P(A_0)=0.8, P(A_1)=0.1, P(A_2)=0.1$, 设 B = “顾客买下该箱”, 则

$$P(B) = \sum_{i=0}^2 P(A_i)P(B|A_i) = 0.8 \cdot 1 + 0.1 \cdot \frac{C_{19}^4}{C_{20}^4} + 0.1 \cdot \frac{C_{18}^4}{C_{20}^4} = 0.9432.$$

$$② P(A_0|B) = \frac{P(A_0B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_0)P(A_0)}{P(B)} = \frac{0.8}{0.9432} = 0.8482.$$