21世纪高等学校工科数学辅导教材

概率论与数理统计学习方法与解题指导

苗 晨 李 阳 魏晓丽 姜凤利 等编著

化学工业出版社

21世纪高等学校工科数学辅导教材

概率论与数理统计学习方法与解题指导

苗 晨 李 阳 魏晓丽 姜凤利 等编著

化学工业出版社

·北京·

本书以教育部制定的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”为依据，与浙江大学《概率论与数理统计》教材相配套，主要包括概率论内容5章，数理统计内容3章，每章包括基本要求、内容提要、典型例题精析、重要知识和方法的注解和释疑解难，并附有A、B两类习题，有助于读者开拓思路加深理解教材。书后附有八套自测题，并给出参考答案。

本书可作为高等学校工科、管理、财经及非数学类的理科专业的教学参考用书，也适合作为各专业本科生考研学习参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计学习方法与解题指导/苗晨，李阳，魏晓丽，姜凤利等编著．—北京：化学工业出版社，2012.7
21世纪高等学校工科数学辅导教材
ISBN 978-7-122-14844-5

Ⅰ．概…　Ⅱ．①苗…②李…③魏…④姜…　Ⅲ．①概率论-高等学校-教学参考资料②数理统计-高等学校-教学参考资料　Ⅳ．O21

中国版本图书馆CIP数据核字（2012）第158877号

责任编辑：唐旭华　郝英华　　　　装帧设计：张　静
责任校对：宋　夏

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街13号　邮政编码100011）
印　　刷：北京市振南印刷有限责任公司
装　　订：三河市宇新装订厂
787mm×1092mm　1/16　印张 11½　字数296千字　2012年10月北京第1版第1次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899
网　　址：http://www.cip.com.cn
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：21.00元

前　　言

《概率论与数理统计》课程是研究随机现象统计规律性的数学分支. 随着现代科学技术的迅猛发展，概率论与数理统计的理论与方法已广泛地应用于许多科学领域，诸如工业、农业、医药、卫生等国民经济各个部门.《概率论与数理统计》是学习现代科学技术的重要理论基础，是高等学校理工科、经济、管理等专业重要的基础课程之一.

本书是高等学校规划教材《概率论与数理统计》(浙江大学盛骤等主编) 的配套辅导书. 书中融入了作者多年教学实践中的经验体会，旨在帮助初学者尽快理解这门课程的基本理论，掌握其思维方式和解题技巧，培养分析问题和解决问题的能力.

本书以教材内容为主线，共分 8 章. 内容包括：随机事件和概率，随机变量及其分布，多维随机变量及其分布，随机变量的数字特征，大数定律及中心极限定理，样本及抽样分布，参数估计，假设检验. 每章包括以下四个部分.

(1) 内容提要. 简要列出了各章的基本概念、重要定理和结论. 在内容综述上做到简练准确，科学规范，便于读者学习时掌握课程内容.

(2) 典型例题. 每章都列举了大量的典型例题，并给出了详细的解答过程. 通过这些典型例题的示范作用，引导学生掌握各类习题的解题方法，学会分析随机问题的思维方法，并逐步培养起独立分析和解决随机问题的能力.

(3) 练习题. 每章列出了各类考试中经常出现的试题，初学者只要求试做练习题的 A 题，B 题可作为学有余力的同学选做. 通过试做这些练习题，帮助学生掌握课程学习中的知识要点与解题方法.

(4) 练习题参考答案. 为使学生更好地掌握每章重点内容，检验学习效果，我们给出了练习题的参考答案或提示，以巩固和提高学生解答各类随机问题的能力.

最后，给出了八套自测题及自测题参考答案，读者可以用来检验自己的学习效果. 练习题中带 * 的题属于较难的内容，读者可以选做.

本书第 1 章和第 5 章由魏晓丽副教授编写，第 2 章和第 8 章由姜凤利老师编写，第 3 章和第 4 章由李阳副教授编写，第 6 章和第 7 章由苗晨副教授编写，李金秋老师提供了全部自测题、参考答案和提示. 全书由苗晨副教授组稿，宋岱才教授阅读了全书并修改定稿.

在书稿完成的过程中，得到了辽宁石油化工大学教务处和理学院广大教师的支持和帮助，在此谨向他们表示衷心的感谢.

由于编者水平有限，书中难免有不足之处，希望广大读者批评指正.

编　者

2012 年 6 月

目　录

第1章　随机事件和概率

本章基本要求

(1) 了解样本空间（基本事件空间）的概念，理解随机事件的概念，掌握事件的关系及运算.

(2) 理解概率、条件概率的概念，掌握概率的基本性质，会计算古典型概率和几何型概率，掌握概率的加法公式、减法公式、乘法公式、全概率公式，以及贝叶斯（Bayes）公式.

(3) 理解事件独立性的概念，掌握用事件独立性进行概率计算；理解独立重复试验的概念，掌握计算有关事件概率的方法.

1.1　内容提要

1.1.1　基本概念

定义1　随机试验：①相同条件下可重复试验；②每次试验结果不唯一；③试验的全部可能结果已知，但试验之前不知哪一个结果出现.

定义2　样本空间：随机试验所产生可能结果的全体，一般记为 S. S 中的元素称为样本点，也称为基本事件. 样本点的集合称为随机事件，简称事件. 样本空间 S 称为必然事件，空集 ϕ 称为不可能事件.

设 $A,B,A_k(k=1,2,\cdots)$ 是样本空间 S 中的随机事件，它们之间的关系及运算有：

定义3　包含关系：$A\subset B$ 表示事件 A 发生必然导致事件 B 发生.

定义4　相等关系：$A=B$ 表示事件 A，B 相互包含.

定义5　和事件：① 两个事件的和事件 $A\cup B$，表示事件 A，B 至少有一个发生；② 多个事件的和事件 $\bigcup\limits_k A_k$，表示事件 A_k 中至少有一个发生.

定义6　积事件：① 两个事件的积事件 $A\cap B$ 或 AB；

② 多个事件的积事件 $\bigcap\limits_k A_k$.

定义7　差事件：$A-B$ 表示事件 A 发生而事件 B 不发生.

定义8　不相容（或互斥）事件：若事件 A，B 不同时发生，即如有 $AB=\phi$，则称事件 A，B 为不相容事件或互斥事件.

定义9　互逆（或对立）事件：如有 $AB=\phi$ 且 $A\cup B=S$，则称事件 A，B 为互逆（或对立）事件，记作 $A=\overline{B}$ 或 $B=\overline{A}$.

1.1.2　事件的性质

(1) 事件关系的性质

$A\subset A\cup B$；$B\subset A\cup B$；$A\cup A=A$；$A-B\subset A$；$A-B=A\overline{B}$；$(A-B)\cup A=A$；$(A-B)\cup B=A\cup B$；$(A-B)\cap B=\phi$；$\overline{\overline{A}}=A$；$A\cup\overline{A}=S$；$A\cap\overline{A}=\phi$；$A\cap A=A$；$A\cup\phi=A$；$A\cup S=S$；$A\cap S=A$；$A\cap\phi=\phi$.

(2) 事件的运算性质

① 交换律：$A \cup B = B \cup A$；$A \cap B = B \cap A$；

② 结合律：$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$；$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$；

③ 分配律：$A(B \cup C) = (AB) \cup (AC)$；$A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C)$；

④ De Morgan 对偶定律：$\overline{A \cup B} = \overline{A}\,\overline{B}$；$\overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}$；$\overline{\bigcup_k A_k} = \bigcap_k \overline{A_k}$；$\overline{\bigcap_k A_k} = \bigcup_k \overline{A_k}$.

1.1.3 事件的概率及其计算

(1) 概率的定义

概率的定义是公理化的，即 P 是从 S 的子集族到 $[0,1]$ 上的一个映射，若满足以下三个条件.

① $P(A) \geqslant 0$；② $P(S) = 1$；③ 若 $A_iA_j = \phi(i \neq j; i,j = 1,2,\cdots)$，有 $P(\bigcup_k A_k) = \sum_k P(A_k)$，则称 $P(A)$ 为事件 A 发生的概率.

(2) 概率的性质

① $P(\phi) = 0$；

②（有限可加性）若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容，则 $P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$；

③ $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$；

④ 若 $A \subset B$，则 $P(B - A) = P(B) - P(A)$，一般的，若 $A \not\subset B$，则有

$$P(B-A) = P(B-AB) = P(B) - P(AB)；$$

⑤ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ 且

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_iA_j) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1A_2\cdots A_n).$$

(3) 等可能概型

特征：每个样本点被取到的可能性相等.

① 古典概型

特征：样本空间是有限集，每个基本事件发生的可能性相同. 其计算公式为

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{A\text{ 中样本点数}}{S\text{ 中样本点数}}.$$

计算古典概型的基本公式是排列组合公式.

② 几何概型

特征：样本空间是 n 维欧氏空间的子集，且每个样本点的取得具有等可能性. 其计算公式为 $P(A) = \dfrac{\mu(A)}{\mu(S)}$.

其中，$\mu(A)$，$\mu(S)$ 分别表示 A 及 S 在 R^n 中的度量，如长度、面积、体积等.

(4) 加法原理

设事件 A 有 n 类方法出现，若第 i 类方法包含 m_i 种方法，则 A 共有 $m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ 种方法出现.

(5) 乘法原理

设事件 A 有 n 类方法出现，另一事件 B 对每一种 A 的出现方法又有 m 种不同的方法出

现，则事件 AB 以 nm 种不同的方法出现.

1.1.4 条件概率与事件的独立性

定义 10 条件概率：设 A，B 是两个事件，若 $P(A)>0$，称 $P(B\mid A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ 为 A 发生的条件下 B 发生的条件概率.

定义 11 事件的独立性：若 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称 A，B 相互独立. 这时，显然以下三对事件：

$$\{\overline{A},B\},\ \{A,\overline{B}\},\ \{\overline{A},\overline{B}\}$$

也两两独立.

当 $P(A)>0$ 时，A，B 相互独立 $\Leftrightarrow P(B\mid A)=P(B)$.

若对任意的 $k(1<k\leqslant n)$，任意 $1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n$，有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}),$$

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为相互独立事件.

注意：① $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为相互独立事件时，定义中共有 (2^n-n-1) 个等式.

② $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立 $\Rightarrow A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两独立，反之不然.

1.1.5 重要公式

(1) 乘法公式

若 $P(A)>0$，$P(B)>0$，有

$$P(AB)=P(A\mid B)P(B)=P(B\mid A)P(A),$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1\cdots A_{n-1}).$$

(2) 全概率公式

设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为样本空间 S 的一个划分，且

$P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，对任意 $A\subset S$，有 $P(A)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A\mid B_i)P(B_i)$.

(3) 贝叶斯公式

设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为样本空间 S 的一个划分，且

$P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，对任意 $A\subset S$，若 $P(A)>0$，则

$$P(B_i\mid A)=\frac{P(A\mid B_i)P(B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P(A\mid B_j)P(B_j)},\ i=1,2,\cdots,n.$$

注意：①贝叶斯公式是条件概率与全概率公式相结合的产物，其证明过程必须记住.

② 使用贝叶斯公式的关键是找到划分 $\{B_1,B_2,\cdots,B_n\}$.

1.1.6 可靠性问题

设每个元件独立，第 i 个元件正常工作的概率为 p_i，$i=1,2,\cdots,n$. 若一个系统由 n 个元件组成，则有：

① 串联系统 可靠度为 $\prod\limits_{i=1}^{n}p_i$.

② 并联系统 可靠度为 $1-\prod\limits_{i=1}^{n}(1-p_i)$.

特殊的，若元件结构相同，就有 $p_i=p$，$i=1,2,\cdots,n$，则串联系统的可靠度为 p^n，

并联系统的可靠度为 $1-(1-p)^n$ ，进而可以计算混联系统的可靠度.

1.2 典型例题

【例 1】 选择题

(1) 投掷一枚骰子，设 $A=$“出现点数不超过 3”，则称 A 为________.

(A) 不可能事件 (B) 基本事件 (C) 必然事件 (D) 随机事件

【解】 $A=\{1,2,3\}$ ，它不是空集，故不选 (A)，不是单点集，故不选 (B)，A 也不是全集，故不选 (C)，A 可能发生也可能不发生，符合随机事件的定义，故应该选 (D).

(2) 设 A,B 是样本空间 S 中的随机事件，则 $(A\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})$ 表示________.

(A) 不可能事件 (B) A,B 恰有一个发生 (C) 必然事件 (D) A,B 不同时发生

【解】 根据集合运算的性质，$(A\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})=\phi\cup(A\overline{B})\cup(B\overline{A})\cup\phi$，它表示 A 发生且 B 不发生，或者，B 发生且 A 不发生，故应该选 (B).

(3) 设 A,B 是随机事件，且 $P(AB)=0$ ，则下列命题正确的是________.

(A) A,B 互斥 (B) AB 是不可能事件

(C) $P(A)=0$ 或 $P(B)=0$ (D) AB 不一定是不可能事件

【解】 $AB=\phi\Rightarrow P(AB)=0$ ，反之未必. 如：做连续区间上取点的试验，设 A,B 都表示恰好取到中点，由几何概率知，$P(AB)=0$ ，但是 $AB\neq\phi$，故 (A)、(B) 不对. 再如：进行投一枚硬币的试验，$A=$“正面向上”，$B=$“反面向上”，满足 $P(AB)=0$ ，但是，$P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$,故(C) 不对. 综上所述,应该选(D).

(4) 假设 $B\subset A$,则下列命题正确的是________.

(A) $P(\overline{A}\,\overline{B})=1-P(A)$ (B) $P(\overline{A}-\overline{B})=P(\overline{A})-P(\overline{B})$

(C) $P(B|A)=P(B)$ (D) $P(A|\overline{B})=P(A)$

【解】 由 $B\subset A$ 知 $\overline{B}\supset\overline{A}$,故 $P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A})=1-P(A)$,(A) 正确,(B) 不对.

$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{P(B)}{P(A)}$,(C) 不对；$P(A|\overline{B})=\dfrac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}\neq P(A)$,(D) 也不对. 答案为(A).

(5) 设 A , B 为随机事件,且 $P(B)>0$, $P(A|B)=1$ 则必有________.

(A) $P(A\cup B)>P(A)$ (B) $P(A\cup B)>P(B)$

(C) $P(A\cup B)=P(A)$ (D) $P(A\cup B)=P(B)$

【解】 选(C),根据条件概率公式和加法公式,即可得答案.

(6) 设 A,B,C 是随机事件,且有 $P(C|AB)=1$,则下列命题正确________.

(A) $P(AB)=P(C)$ (B) $P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$

(C) $P(A\cup B)=P(C)$ (D) $P(C)\leqslant P(A)+P(B)-1$

【解】 由条件概率公式，$P(C|AB)=\dfrac{P(ABC)}{P(AB)}=1$,得 $P(AB)=P(ABC)$, $P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\geqslant P(A)+P(B)-1$, $P(ABC)\leqslant P(C)$,就有 $P(C)\geqslant P(AB)\geqslant P(A)+P(B)-1$,答案为(B).

(7) $P(A)=p_1$, $P(B)=p_2$, $P(A\cup B)=p_3$,则为 $P(A\overline{B})=$ ________.

(A) p_1-p_2 (B) p_3-p_2 (C) $p_1(1-p_2)$ (D) p_2-p_1

【解】 $P(A\overline{B})=P(A-B)=P(A\cup B-B)=P(A\cup B)-P(B)$ ，答案为 (B).

(8) 设 A,B,C 是两两独立且不能同时发生的随机事件，且

$P(A)=P(B)=P(C)=x$，则 x 的最大值为________.

(A) $\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【解】 考虑式 $P(AB\cup AC\cup BC)$，而

$$P(AB\cup AC\cup BC)=P(AB)+P(AC)+P(BC)-3P(ABC)+P(ABC)$$
$$=P(AB)+P(AC)+P(BC)=3x^2,$$

而 $P(AB\cup AC\cup BC)\leqslant 1$，故答案为 (D).

(9) 设 A,B 是两个随机事件，且 $0<P(A)<1,P(B)>0,P(B|A)=P(B|\overline{A})$，则必有________.

(A) $P(A|B)=P(\overline{A}|B)$ (B) $P(A|B)\neq P(\overline{A}|B)$

(C) $P(AB)=P(A)P(B)$ (D) $P(AB)\neq P(A)P(B)$

【解】 由题设 $P(B|A)=P(B|\overline{A})$，有 $\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B\overline{A})}{P(\overline{A})}$，又由 $P(A)+P(\overline{A})=1$ 及 $P(B\overline{A})=P(B)-P(BA)$，有 $\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)-P(BA)}{1-P(A)}$，

即 $$P(AB)-P(A)P(AB)=P(A)P(B)-P(A)P(BA),$$

化简为 $$P(AB)=P(A)P(B)，选 (C).$$

(10) 某人向同一目标独立重复射击，每次射击命中目标的概率为 $P(0<p<1)$，则此人第 4 次射击恰好第 2 次命中目标的概率为________.

(A) $3P(1-p)^2$ (B) $6P(1-p)^2$ (C) $3P^2(1-p)^2$ (D) $6P^2(1-p)^2$

【解】 “第 4 次射击恰好第 2 次命中目标”表示 4 次射击中第 4 次命中目标，前 3 次射击中有 1 次命中目标. 由独立重复性知所求概率为 $C_3^1P^2(1-p)^2$. 故应选 (C).

【例 2】 填空题

(1) 设两个相互独立的事件 A 和 B 都不发生的概率为 $\frac{1}{9}$，A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等，则 $P(A)=$(   ).

【解】 由题设，$P(\overline{A}\,\overline{B})=\frac{1}{9}$ 且 $P(A\overline{B})=P(\overline{A}B)$ 及 A,B 独立，于是

$$P(A)-P(AB)=P(B)-P(AB),$$

即 $P(A)=P(B)$，此外

$$\frac{1}{9}=P(\overline{A}\,\overline{B})=1-P(A)-P(B)+P(AB)=1-2P(A)+P^2(A),$$

解此二元一次方程，得 $P(A)=\frac{2}{3}$.

(2) 设两两相互独立的三事件 A,B 和 C 满足条件 $ABC=\phi,P(A)=P(B)=P(C)<\frac{1}{2}$，且已知 $P(A\cup B\cup C)=\frac{9}{16}$，则 $P(A)=$(   ).

【解】 结合题设，$P(A\cup B\cup C)=\frac{9}{16}$，且 A,B 和 C 两两独立，则有

$$\frac{9}{16}=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)=3P(A)-3P^2(A),$$

从而 $3P^2(A)-3P(A)+\frac{9}{16}=0$，解得 $P(A)=\frac{1}{4}$.

(3) 袋中有 50 个乒乓球，其中 20 个是黄球，30 个是白球. 今有两人依次随机地从袋中各取一球，取后不放回，则第二个人取得黄球的概率是（　　）.

【解】 定义 A_1 为第一人取得黄球，A_2 为第二人取得黄球，则由全概率公式，有

$$P(A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(\overline{A_1})P(A_2|\overline{A_1})=\frac{20}{50}\cdot\frac{19}{49}+\frac{30}{50}\cdot\frac{20}{49}=\frac{20\cdot 49}{50\cdot 49}=\frac{2}{5}.$$

(4) 设工厂 A 和工厂 B 的产品的次品率分别为 1%和 2%，现从由 A 和 B 的产品分别占 60%和 40%的一批产品中随机抽取一件，发现是次品，则该次品属 A 生产的概率是（　　）.

【解】 定义 A 表示是工厂 A 的产品，则 $P(A)=0.6$；定义 B 表示是工厂 B 的产品，则 $P(B)=0.4$；定义 C 表示一次随机抽取到的产品是次品，则 $P(C|A)=1\%$ 且 $P(C|B)=2\%$. 综上，由贝叶斯公式有

$$P(A|C)=\frac{P(A)P(C|A)}{P(A)P(C|A)+P(B)P(C|B)}=\frac{0.6\cdot 0.01}{0.6\cdot 0.01+0.4\cdot 0.02}=\frac{3}{7}.$$

(5) 已知 A, B 两个事件满足条件 $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$，且 $P(A)=p$，则 $P(B)=$（　　）.

【解】 $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)$，则 $P(A)+P(B)=1$，所以 $P(B)=1-p$.

(6) 设 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=0$，$P(AC)=P(BC)=\frac{1}{16}$，则 A,B,C 全不发生的概率为______，A,B,C 至少有一个发生的概率为______.

【解】 A,B,C 全不发生的概率为

$$\begin{aligned}P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})&=P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(A\cup B\cup C)\\&=1-[P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)]\\&=1-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{16}-\frac{1}{16}\right)=\frac{3}{8}.\end{aligned}$$

A,B,C 至少有一个发生的概率为 $P(A\cup B\cup C)=1-P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=\frac{5}{8}$.

(7) 一批产品共有 10 个正品和 2 个次品，任意抽两次，每次抽 1 个，抽出后不再放回，则第二次抽出的是次品的概率为（　　）.

【解】 **方法一** 由抽签原理（抽签与先后次序无关），不放回抽样中第二次抽得次品的概率与第一次抽得次品的概率相同，都是：$\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.

方法二 记 A 表示"第二次抽出的是次品"，则由古典概型知

$$P(A)=\frac{11\cdot 2}{12\cdot 11}=\frac{1}{6}.$$

方法三 记 A 表示"第 i 次抽出的是次品"，$i=1,2$，则由已知得

$$P(A_1)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6},\ P(\overline{A_1})=\frac{10}{12}=\frac{5}{6},\ P(A_2|A_1)=\frac{1}{11},\ P(A_2\overline{A_1})=\frac{2}{11},$$

由全概率公式得

$$P(A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(\overline{A_1})P(A_2|\overline{A_1})=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{11}+\frac{5}{6}\cdot\frac{2}{11}=\frac{1}{6}.$$

(8) 已知随机事件 A 的概率 $P(A)=0.5$，随机事件 B 的概率 $P(B)=0.6$ 及条件概率 $P(B|A)=0.8$，则和事件 $A\cup B$ 的概率 $P(A\cup B)$ 是（　　）.

【解】 由题设有 $P(AB)=P(A)P(B|A)=0.5\times 0.8=0.4$，故

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.5+0.6-0.4=0.7.$$

(9) 甲、乙两人独立地对同一目标射击一次，其命中率分别为 0.6 和 0.5. 现已知目标

被命中，则它是甲射中的概率为（　）.

【解】 记 $A=$｛甲命中目标｝，$B=$｛乙命中目标｝，$C=$｛目标被命中｝，则由题意知 A，B 相互独立，且

$$P(A)=0.6\,,P(B)=0.5\,,C=A\cup B\,,$$

故 $P(C)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$

$$=0.6+0.5-0.6\cdot 0.5=0.8\,.$$

由条件概率公式得所求概率为

$$P(A|C)=\frac{P(AC)}{P(C)}=\frac{P(A)}{P(C)}=\frac{0.6}{0.8}=0.75\,.$$

(10) 设在三次独立试验中，事件 A 出现的概率相等，若已知 A 至少出现一次的概率等于 $\frac{19}{27}$，则事件 A 在每次试验中出现的概率是（　　）.

【解】 设在每次试验中 A 出现的概率为 P，则

$$\frac{19}{27}=P\{A\text{至少出现一次}\}=1-P\{A\text{出现 0 次}\}$$

$$=1-C_3^0P^0(1-P)^{3-0}=1-(1-P)^3$$

解得　$P=\frac{1}{3}$.

【例 3】 设 A,B,C 是三个事件，试将下列事件用 A,B,C 的运算表示出来.

① 仅 A 发生；② A，B 发生，但 C 不发生；③ 三个事件不都发生；

④ 三个事件至少一个发生；⑤ 三个事件至多一个发生；⑥ 三个事件都不发生；

⑦ 三个事件不多于一个发生；⑧ 三个事件恰有一个发生；⑨ 三个事件恰有两个发生；

⑩三个事件至少两个发生.

【解】 ① $A\overline{B}\,\overline{C}$；② $AB\overline{C}$；③ $\overline{ABC}$或$\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$；④ $A\cup B\cup C$；⑤ $\overline{A}\,\overline{B}\cup\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{C}$；⑥ $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$或$\overline{A\cup B\cup C}$；⑦ $\overline{AB\cup BC\cup AC}$；⑧ $A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$；⑨ $AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$；⑩ $AB\cup AC\cup BC$.

【例 4】 设 A,B 是两个事件，那么事件"A,B 都发生"，"A,B 不都发生"，"A,B 都不发生"中，哪两个是对立事件？

【解】 上述三个事件可以表示为 AB，$\overline{AB}$，$\overline{A}\,\overline{B}$，显然，$AB$ 与 $\overline{AB}$ 是对立事件.

【例 5】 比较下列概率的大小.

$P(B)$；$P(A\cup B)$；$P(AB)$；$P(A)+P(B)$，其中，$P(A)>0,P(B)>0$.

【解】 因为 $AB\subset B\subset A\cup B$，就有 $P(AB)\leqslant P(B)\leqslant P(A\cup B)$，另外，

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)\leqslant P(A)+P(B).$$

【例 6】 设 A,B 是两个事件，满足 $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$，且 $P(A)=p$，求 $P(B)$.

【解】 $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A)-P(B)+P(AB)$，$P(B)=1-p$.

【例 7】 袋子中有 7 只红球，5 只白球，不放回地陆续取出 3 只，求：

① 顺序为红、白、红的概率；② 有 2 只红球的概率.

【解】 ① 样本空间中样本点数为 12 个球中取出 3 个的排列 P_{12}^3，以 A 表示所求事件，A 中共有 $7\cdot 5\cdot 6$ 个样本点，故 $P(A)=\frac{7\cdot 5\cdot 6}{12\cdot 11\cdot 10}=0.1591$.

② 不放回地陆续取出 3 只，有 2 只红球，与取球的顺序无关. 以 B 表示所求事件——2 只红球且一只白球，B 中共有 $C_7^2C_5^1$ 个样本点，样本空间中样本点数为 12 个球中取出 3 个的

组合数 C_{12}^3，故 $P(A)=\dfrac{C_7^2C_5^1}{C_{12}^3}=\dfrac{21}{44}=0.4773.$

【例 8】 n 对新人参加婚礼，现进行一项游戏：随机的把人分为 n 对，问每对恰为夫妻的概率是多少？

【解】 把这 $2n$ 个人，从左到右排成一排，共有$(2n)!$ 种排法. 处在第 1,2 位的作为一对夫妻，第 3,4 位的作为一对夫妻，如此类推. 第一位可有 $2n$ 种排法，第二位只有 1 种排法，第三位有 $2n-2$ 种排法，第四位只有 1 种排法，如此类推. 故满足要求的排法总数是 $2n(2n-2)(2n-4)\cdots 2=2^n n!$，以 A 表示所求事件，所以

$$P(A)=\frac{2^n n!}{(2n)!}=0.1591.$$

【例 9】 将 n 个人随机分到 N 个房间中（$n\leqslant N$），每个人分到哪个房间是等可能的，且设每个房间可容纳的人数没有限制，求：

① 某指定的一个房间（例如第一个房间）恰有 m 个人的概率（$m\leqslant n$）；

② 每两个人都不在同一个房间的概率.

【解】 ① 设 $A=$｛某指定的一个房间恰有 m 个人｝

由于每一个人分房间的时候都有 N 种分法，n 个人分完才算结束，所以样本点总数为 N^n.

对 A 中样本点数，房间是固定的，但哪 m 个人分到此房间是不确定的. 也就是说哪 m 个人分到此房间都可以，则先从 n 个人中选出 m 个人来，让这 m 个人在此房间，剩下的 $n-m$ 个人分到其他的 $N-1$ 房间中，所以事件 A 中的样本点数为 $C_n^m\cdot(N-1)^{n-m}$.

故得
$$P(A)=\frac{C_n^m\cdot(N-1)^{n-m}}{N^n}.$$

② 设 $B=$｛每两个人都不在同一个房间｝，样本点数与① 一致，为 N^n. B 中样本点数容易求出，为

$$N\cdot(N-1)\cdots\cdots(N-n+1)=C_N^n\cdot n!$$

故得
$$P(B)=\frac{C_N^n\cdot n!}{N^n}$$

【例 10】 （抽签问题）设有 15 个人要去看电影，只有 7 张电影票，于是进行抽签决定谁去. 求第 5 个抽签者抽到电影票的概率.

【解】 设事件 $A=$｛第 5 个抽签者抽到电影票｝

这是一个不放回抽样，且与次序有关，所以样本总数为

$$15\cdot 14\cdots\cdots 2\cdot 1=15!$$

事件 A 要求第 5 个人抽到电影票. 我们可以先任取一张电影票"预留"给第 5 个人，其他 14 个人任意抽取，那么 A 的样本点数为

$$7\cdot 14\cdot 13\cdots\cdots 2\cdot 1=7\cdot 14!$$

所以
$$P(A)=\frac{7\cdot 14!}{15!}=\frac{7}{15}.$$

【例 11】 求在桥牌比赛中，4 张 A 落在同一个人手中的概率.

【解】 设事件 $B=$｛4 张 A 落在同一个人手中｝.

① 样本点总数. 样本点总数就是 52 张扑克牌的分法. 52 张牌要分给 4 个人，每人 13 张，相当于将 52 个物体分成 4 组，每组 13 个，所以样本点总数为$\dfrac{52!}{(13!)^4}$.

② 事件 B 中样本点数. 事件 B 要求 4 张 A 落在同一个人手中，哪一个人是不确定的，

于是我们先从 4 个人中任选一人，让此人手中有 4 张 A，那么这时还有 48 张牌要分给这 4 个人，其中再分给有 4 张 A 的这个人 9 张牌，其他 3 人每人 13 张牌，于是 B 中样本点数为

$$C_4^1 \cdot \frac{48!}{9!\ (13!)^3}.$$

所以
$$P(B)=\frac{C_4^1 \cdot \frac{48!}{9!\ (13!)^3}}{\frac{52!}{(13!)^4}}=\frac{132}{5 \cdot 2499}\approx 0.01056.$$

【例 12】 某市的电话号码由 8 位数构成，设 0～9 这 10 个数字在每位数中出现是等可能的．求以下概率：① 8 位数全不同的概率；② 至少 2 个数字相同的概率；③ 恰好有两个位置上号码相同而其他位置上号码各不相同的概率．

【解】 ① 8 位数全不同的概率 $p_1=\frac{P_{10}^8}{10^8}=0.0181$；

②“至少 2 个数字相同”与“8 位数全不同”是对立事件，故概率为

$$p_2=1-p_1=0.9819;$$

③ 要满足事件“恰好有两个位置上号码相同而其他位置上号码各不相同”，可以这样安排：从 8 位中任意取两个位置，有 C_8^2 种取法；从 0～9 这 10 个数字任意取一个数字，有 C_{10}^1 种取法，放在这两个位置上；其余 6 个位置由其他 9 个数字作全排列，得

$$p_3=\frac{C_8^2 C_{10}^1 P_9^6}{10^8}=0.1693.$$

【例 13】 从 5 双不同的鞋子中任取 4 只，这 4 只鞋子中至少有 2 只配成一双的概率是多少？

【解】 **方法一** 样本点总数为 P_{10}^4，设 $A=$“4 只鞋子中至少有 2 只配成一双”，考虑对立事件 $\overline{A}=$“4 只鞋子都不构成一双”．第一只鞋子可从 10 只中任取一只，有 10 种取法；第二只鞋子从余下的 8 只中任取一只，有 8 种取法；第三只鞋子从余下的 6 只中任取一只，有 6 种取法；同理，第四只鞋子 4 种取法，故 $\overline{A}$ 中共包含了 $10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4$ 个样本点，得

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4}{P_{10}^4}=\frac{13}{21}.$$

方法二 $\overline{A}=$“4 只鞋子都不构成一双”也可以这样考虑：从 5 双不同的鞋子中任取 4 双，再从每双中任取一只，可得 $\overline{A}$ 中样本点数为 $C_5^4 \cdot 2^4$，得

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{C_5^4 \cdot 2^4}{P_{10}^4}=\frac{13}{21}.$$

【例 14】 在 1500 个产品中有 400 个次品，1100 个正品，任取 200 个，求① 恰有 90 个次品的概率；② 至少有 2 个次品的概率．

【解】 样本点总数为 C_{1500}^{200}．

① 设 $A=$“恰有 90 个次品”，它的样本点数为 $C_{400}^{90} \cdot C_{1100}^{110}$，于是 $P(A)=\frac{C_{400}^{90} \cdot C_{1100}^{110}}{C_{1500}^{200}}$.

② 设 $B=$“至少有 2 个次品”，$\overline{B}=$“没有次品或有 1 个次品”，$\overline{B}$ 中样本点数为

$C_{1100}^{200}+C_{400}^{1} \cdot C_{1100}^{199}$，因此，$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{C_{1100}^{200}+C_{400}^{1} \cdot C_{1100}^{199}}{C_{1500}^{200}}$.

【例 15】 已知 $P(B)=0.3$，$P(\overline{A}|B)=0.2$，$P(A|\overline{B})=0.75$，求 $P(B|A)$.

【解】 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B)+P(A|\overline{B})P(\overline{B})}$

$$=\frac{(1-0.2)\cdot 0.3}{(1-0.2)\cdot 0.3+0.75\cdot(1-0.3)}=0.3137.$$

【例 16】 甲、乙两人独立的向同一靶子射击一次，其命中率分别为 0.7，0.8，若已知靶子被击中，求它只是被甲击中的概率.

【解】 设 $A=$ "甲击中靶子"，$B=$ "乙击中靶子"，因两个人独立射击，故 A，B 独立，于是 $P(AB)=P(A)P(B)=0.56$. 又由题意知，这是一个条件概率，进而

$$P(A\overline{B}|A\cup B)=\frac{P[A\overline{B}\cap(A\cup B)]}{P(A\cup B)}=\frac{P(A\overline{B})}{P(A)+P(B)-P(AB)}$$

$$=\frac{0.7\cdot 0.2}{0.7+0.8-0.7\cdot 0.8}=0.1489.$$

【例 17】 袋子中有 4 只红球，3 只白球，某人有放回地陆续取出 3 只，每次 1 只球，已知至少出现一次红球，求至少出现两次红球的概率.

【解】 设事件 $A=$ "至少出现一次红球"，$B=$ "至少出现两次红球"，样本点总数为 7^3，

$$P(B|A)=1-P(\overline{B}|A)=1-\frac{P(A\overline{B})}{P(A)}$$

事件 $A\overline{B}$ 表示"至少出现一次红球"且"至多出现一次红球"，即 $A\overline{B}=$ "恰好出现一次红球"，它的取法数为 $C_4^1\cdot C_3^1\cdot 3^2$. $\overline{A}=$ "出现的都是白球"，它的取法数为 3^3. 因而

$$P(B|A)=1-\frac{P(A\overline{B})}{P(A)}=1-\frac{(C_4^1\cdot C_3^1\cdot 3^2)/(7^3)}{1-(3^3)/(7^3)}=1-\frac{0.3149}{0.9213}=0.6582.$$

【例 18】 一盒电子元件有 10 只，其中 7 只正品，3 只次品，从中不放回地抽取 4 次，每次 1 只，求第一、二次取得次品且第三、四次取得正品的概率.

【解】 设 $A_i=$ "第 i 次取得正品"$(i=1,2,3,4)$，由条件概率有

$$P(\overline{A_1}\ \overline{A_2}A_3A_4)=P(A_4|\overline{A_1}\ \overline{A_2}A_3)P(A_3|\overline{A_1}\ \overline{A_2})P(\overline{A_2}|\overline{A_1})P(\overline{A_1})$$

$$=\frac{6}{7}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{10}=\frac{1}{20}.$$

【例 19】 已知 $P(A)=0.5$，$P(B)=0.4$，$P(A|\overline{B})=0.6$，求 $P(AB)$，$P(A|A\cup\overline{B})$.

【解】 由 $P(A\overline{B})=P(\overline{B})P(A|\overline{B})=[1-P(B)]P(A|\overline{B})=(1-0.4)\cdot 0.6=0.36$，

而
$$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=0.5-P(AB),$$

所以
$$P(AB)=0.5-0.36=0.14,$$

由
$$P[A|A\cup\overline{B}]=\frac{P[A(A\cup\overline{B})]}{P(A\cup\overline{B})}=\frac{P(A)}{P(A\cup\overline{B})},$$

其中
$$P(A\cup\overline{B})=P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})=0.5+0.6-0.36=0.74,$$

所以
$$P(A|A\cup\overline{B})=\frac{0.5}{0.74}=\frac{25}{37}.$$

【例 20】 研究生入学考试面试时由考生抽签答题. 已知 10 支考签中有 4 支难题签，甲、乙两人各抽一签，甲先抽（不放回）.

① 求甲、乙两人各自抽到难签的概率；

② 若已知乙抽到了难签，求甲抽到难签的概率.

【解】 ① 设 $A=\{$甲抽到难签$\}$，$B=\{$乙抽到难签$\}$

易知 $P(A)=\frac{4}{10}$. 由抽签原则容易看出 $P(B)=\frac{4}{10}$.

下面用全概率公式来计算 $P(B)$. 注意到 A 与 $\overline{A}$ 为一个部分，所以

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}+\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9}=\frac{4}{10}.$$

② 这是一个条件概率.

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}=\frac{\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}}{\frac{4}{10}}=\frac{1}{3}.$$

【例 21】 X 型汽车在 A,B,C 三个车场中分别占$\frac{1}{3}$,$\frac{2}{3}$,$\frac{1}{2}$. 所有汽车出售的机会均等，某人随机选一车场并随机选一车试开. 若此车恰巧是 X 型的，求此人在车场 A 选的概率.

【解】 分别以事件 A_1,A_2,A_3 表示此人选择三个车场. 以事件 D 表示他试开的为 X 型汽车，那么 A_1,A_2,A_3 为一个部分，则

$$P(D)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(D\mid A_i)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2},$$

所求概率为 $$P(A_1|D)=\frac{P(A_1D)}{P(D)}=\frac{P(A_1)P(D|A_1)}{P(D)}=\frac{2}{9}.$$

【例 22】 某厂仓库存有 1,2,3 号箱子分别为 10,20,30 个，均装有某产品. 其中，1 号箱内装有正品 20 件，次品 5 件；2 号箱内装有正品 20 件，次品 10 件；3 号箱内装有正品 15 件，次品 10 件. 现从中任取一箱，再从箱中任取一件产品，问：① 取到正品及次品的概率各是多少？② 若已知取到正品，求该正品是从 1 号箱中取出的概率.

【解】 ① 设 A_i="取到第 i 号箱子"（$i=1,2,3$），则$\{A_1,A_2,A_3\}$构成样本空间的一个划分，且

$$P(A_1)=\frac{10}{60}=\frac{1}{6},\ P(A_2)=\frac{20}{60}=\frac{1}{3},\ P(A_3)=\frac{30}{60}=\frac{1}{2}.$$

设 B="取得正品"，$\overline{B}$="取得次品"，则由全概率公式，

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B\mid A_i)=\frac{1}{6}\cdot\frac{20}{25}+\frac{1}{3}\cdot\frac{20}{30}+\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{25}=\frac{59}{90},$$

$$P(\overline{B})=1-P(B)=\frac{31}{90}.$$

② 已知取到正品，求该正品是从 1 号箱中取出的概率，这是一个条件概率问题.

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{20}{25}}{\frac{59}{90}}=\frac{12}{59}.$$

【例 23】 商店里玻璃杯装箱出售，每箱装 20 只相同型号的玻璃杯. 设各箱中有 0，1，2 只残次品的概率为 0.8，0.1，0.1. 顾客购买时，售货员任取一箱，由顾客随意从中抽取 4 只，若无残次品，则买下该箱. 求：① 顾客买下该箱的概率. ② 顾客买下该箱后，箱中无残次品的概率.

【解】 ① 设 A_i="箱中有 i 只残次品"（$i=0,1,2$），则$\{A_1,A_2,A_3\}$构成样本空间的一个划分，且 $P(A_0)=0.8$，$P(A_1)=0.1$，$P(A_2)=0.1$，设 B="顾客买下该箱"，则

$$P(B)=\sum_{i=0}^{2}P(A_i)P(B\mid A_i)=0.8\cdot 1+0.1\cdot\frac{C_{19}^4}{C_{20}^4}+0.1\cdot\frac{C_{18}^4}{C_{20}^4}=0.9432.$$

② $P(A_0|B)=\frac{P(A_0B)}{P(B)}=\frac{P(B|A_0)P(A_0)}{P(B)}=\frac{0.8}{0.9432}=0.8482.$