21世纪高等院校教材

# 线性代数

主　编　张苏梅　杨殿武

副主编　马巧灵　吕洪波　陈兆英

科学出版社

21世纪高等院校教材

# 线性代数

主　编　张苏梅　杨殿武

副主编　马巧灵　吕洪波　陈兆英

科 学 出 版 社
北　京

## 内 容 简 介

本书系统地介绍线性代数的基本理论与方法，内容结构严谨、层次清晰、通俗易懂. 本书内容有行列式、矩阵、$n$ 维向量、线性方程组、特征值、特征向量及二次型共 6 章. 例题的选取与习题的配备注意典型与难易的结合，题型丰富.

本书可作为高等院校工学、管理学、经济学及非数学类理学等各专业的教材与参考书，也可供自学者及有关科技人员参考.

**图书在版编目(CIP)数据**

线性代数/张苏梅，杨殿武主编. —北京：科学出版社，2014.1
21 世纪高等院校教材

ISBN 978-7-03-039543-6

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①张… ②杨… Ⅲ. ①线性代数-高等学校-教材
Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 007517 号

责任编辑：王 静 / 责任校对：郑金红
责任印制：阎 磊 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

保定市中画美凯印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2014 年 1 月第 一 版 开本：720×1000 B5
2014 年 1 月第一次印刷 印张：9 1/2
字数：191 000

**定价：21.00 元**

(如有印装质量问题，我社负责调换)

# 前　言

线性代数是高等学校理、工、经济、管理类等非数学类各专业的一门重要的数学基础课程. 随着计算机科学的进一步发展,许多非线性问题的线性化和大型线性问题的计算变为现实,作为离散性数学的线性代数,在大学数学中的地位变得更为重要. 本教材是参照教育部颁布的高等学校工科类本科教学基础课程教学基本要求,在总结多年的教学实践经验的基础上编写而成的.

在本书编写过程中,我们遵循了由特殊到一般、由具体到抽象、由浅入深的原则. 本书充分注重数学概念理论的条理性,而不过分追求数学的严谨. 适合高等学校理、工、经济、管理等非数学类各专业的学生使用.

全书的参考学时为 50 学时,如果删去书中楷体正文部分不讲,则可适用于 40 学时左右的线性代数课程,其内容的完整性并不受影响.

本书的第 2～4 章由张苏梅和马巧灵编写,第 1、5、6 章由杨殿武和陈兆英编写,课后习题由吕洪波和马巧灵提供;最后由张苏梅教授负责全书统稿.

感谢济南大学教务处、济南大学数学院等各级领导在编写过程中给予的大力支持;感谢数学院的全体教师、特别是承担本课程教学任务的教师,本书的形成离不开他们的支持;感谢科学出版社对本书的支持.

由于水平所限,书中难免有不妥之处,欢迎广大师生及同行专家批评指正.

编　者

2013 年 11 月于济南

# 目 录

# 第 1 章　行　列　式

行列式是线性代数中基本的概念之一. 它不仅是解线性方程组的重要工具,而且在矩阵理论、二次型的讨论中起着重要作用. 本章主要介绍行列式的概念、性质、计算以及利用行列式解线性方程组.

## 1.1　二阶与三阶行列式

### 1.1.1　二阶行列式

用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2. \end{cases} \tag{1.1}$$

为消去未知数 $x_2$,以 $a_{22}$ 与 $a_{12}$ 分别乘方程组(1.1)的两个方程的两端,然后相减,得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2;$$

类似地,消去 $x_1$,得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}.$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时,可得方程组(1.1)的解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \tag{1.2}$$

式(1.2)就是方程组(1.1)的求解公式. 为了便于记忆此求解公式,我们引进新的符号表示式(1.2).

记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{1.3}$$

称为二阶行列式,其中横排称为行,竖排称为列,它等于 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$. 数 $a_{ij}$ $(i, j=1,2)$称为行列式(1.3)的元素. 元素 $a_{ij}$ 的第一个下标 $i$ 称为行标,表明该元素位于第 $i$ 行,第二个下标 $j$ 称为列标,表明该元素位于第 $j$ 列.

上述行列式的定义,可用对角线法则来记忆. 参看图 1-1,把 $a_{11}$ 到 $a_{22}$ 的实连线称为主对角线,$a_{12}$ 到 $a_{21}$ 的虚连线称为次对角线,于是二阶行列式便是主对角线上的两元素之积减去次对角线上的两元素之积所得的差.

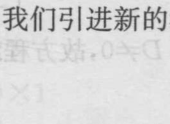


图　1-1

利用二阶行列式,对线性方程组(1.1),记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-a_{12}b_2,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-b_1a_{21},$$

则式(1.2)可写成

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{1.4}$$

这里的分母 $D$ 是由方程组(1.1)的系数所确定的二阶行列式,称为该方程组的系数行列式,$x_1$ 的分子 $D_1$ 是用常数项 $b_1,b_2$ 分别替换 $D$ 中 $x_1$ 的系数 $a_{11},a_{21}$ 所得的二阶行列式,$x_2$ 的分子 $D_2$ 是用常数项 $b_1,b_2$ 分别替换 $D$ 中 $x_2$ 的系数 $a_{12},a_{22}$ 所得的二阶行列式.

**例 1.1**　解二元线性方程组 $\begin{cases} 2x_1+3x_2=8, \\ x_1-2x_2=-3. \end{cases}$

**解**　$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=2\times(-2)-3\times1=-7,$

$$D_1=\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}=-7,\quad D_2=\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-14.$$

因 $D\neq0$,故方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=2.$$

### 1.1.2　三阶行列式

**定义 1.1**　记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1.5}$$

称为三阶行列式,它等于

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}, \tag{1.6}$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \tag{1.7}$$

式(1.6)称为三阶行列式(1.5)的展开式，与二阶行列式一样，数 $a_{ij}$ $(i,j=1,2,3)$ 称为三阶行列式(1.5)的第 $i$ 行第 $j$ 列的元素.

上述定义表明三阶行列式含 6 项，每项均为不同行不同列的三个元素的乘积的代数和，其规律遵循图 1-2 所示的**对角线法则**：实线连接的三个元素乘积之和减去虚线连接的三个元素乘积之和.

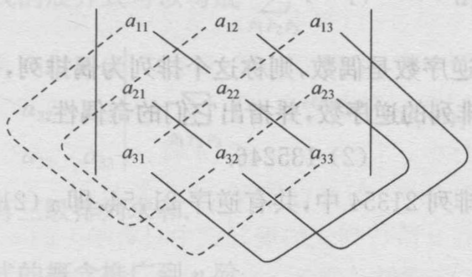

图 1-2

**例 1.2** 计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

**解** 按对角线法则，有

$$\begin{aligned} D &= 1\times1\times(-1)+(-2)\times(-3)\times(-1)+1\times2\times1 \\ &\quad -1\times1\times(-1)-(-2)\times2\times(-1)-1\times(-3)\times1 \\ &= -5. \end{aligned}$$

## 1.2 $n$ 阶行列式的定义

对角线法则只适用于二阶与三阶行列式，为了研究四阶及以上的行列式，我们首先介绍有关全排列的知识，然后再给出 $n$ 阶行列式的定义.

### 1.2.1 排列与逆序数

把 $n$ 个不同的元素排成一列，称为这 $n$ 个元素的一个 $n$ **级全排列**(简称**排列**). $n$ 个不同的元素的全排列共有 $n!$ 种. 例如，自然数 1,2,3 的排列共有六种：

1 2 3， 1 3 2， 2 1 3， 2 3 1， 3 1 2， 3 2 1.

为了方便，以后把自然数 $1,2,\cdots,n$ 视为 $n$ 个不同元素的代表. 用 $p_i$ 表示这 $n$ 个数中的一个$(i=1,2,\cdots,n)$，且当 $i\neq j$ 时 $p_i\neq p_j$，于是 $p_1p_2\cdots p_n$ 便是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列.

$n$ 级排列

$$1\,2\cdots n$$

具有自然顺序，称为**自然排列或标准排列**.

对于 $n$ 个自然数的一个排列，如果一个大的数排在一个小的数之前，就称这两个数构成一个**逆序**. 一个排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序总和称为该排列的**逆序数**，记为$\tau(p_1p_2\cdots p_n)$.

如果一个排列的逆序数是偶数，则称这个排列为**偶排列**，否则称为**奇排列**.

**例 1.3** 求下列排列的逆序数，并指出它们的奇偶性.

(1) 21354； (2) 135246.

**解** (1) 在五级排列 21354 中，共有逆序 21，54，即 $\tau(21354)=2$，所以 21354 是偶排列.

(2) 在六级排列 135246 中，共有逆序 32，52，54，即 $\tau(135246)=3$，所以 135246 是奇排列.

在一个排列中，把某两个数的位置互换，而保持其余的数不动，这种对一个排列作出的变动称为**对换**. 将相邻两个数对换，称为**相邻对换**.

**例 1.4** 五级偶排列 21354 经过 2，3 对换变成排列 31254，容易计算 $\tau(31254)=3$，所以 31254 是奇排列.

关于对换对排列奇偶性的影响，有下述一般性结论. 有兴趣的读者可以自行证明.

**定理 1.1** 对换改变排列的奇偶性，即经过一次对换，奇排列变成偶排列，偶排列变成奇排列.

**定理 1.2** 在全部 $n$ 级排列中$(n\geqslant 2)$，奇偶排列各占一半.

**定理 1.3** 任意一个 $n$ 级排列可经过一系列对换变成自然排列，并且所作对换次数的奇偶性与这个排列的奇偶性相同.

### 1.2.2 $n$ 阶行列式的定义

为了给出 $n$ 阶行列式的定义，先来研究三阶行列式的结构. 由三阶行列式的定义容易看到有以下两个特点：

(1) 三阶行列式展开式的每一项恰是取自不同行、不同列的三个元素的乘积

$$a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}.$$

这里行标按自然顺序排成 123，列标排成 $p_1p_2p_3$，它是 1，2，3 的某个排列. 这样的排列共有 3！种，对应于行列式的展开式共含 3！项. 因此行列式恰好是所有位于不同行、不同列的 3 个元素之积的代数和.

(2) 行列式的展开式中各项的正负号由其列标排列的奇偶性决定(此时行标按自然顺序排列). 对应列标的排列分别是 123，312，231 时，它们都是偶排列，取正号；对应列标的排列分别是 132，213，321 时，它们都是奇排列，取负号. 因此各项所带的正负号可以表示为 $(-1)^{\tau(p_1p_2p_3)}$.

于是，三阶行列式的展开式可以写成 $\sum\limits_{p_1p_2p_3}(-1)^{\tau(p_1p_2p_3)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2p_3}(-1)^{\tau(p_1p_2p_3)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3},$$

这里 $\sum\limits_{p_1p_2p_3}$ 表示对所有三级排列求和.

至此，可将行列式的概念推广到 $n$ 阶.

**定义 1.2** 由 $n^2$ 个元素 $a_{ij}$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 $n$ 阶行列式，其中横排称为行，竖排称为列，它等于所有取自不同行不同列的 $n$ 个元素乘积 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 的代数和

$$\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}, \tag{1.8}$$

其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，$\tau(p_1p_2\cdots p_n)$ 为这个排列的逆序数，$\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}$ 表示对所有 $n$ 级排列求和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}. \tag{1.9}$$

$n$ 阶行列式通常简记作 $\det(a_{ij})$. 数 $a_{ij}$ 称为行列式 $\det(a_{ij})$ 的第 $i$ 行第 $j$ 列的元素. 式(1.8)称为 $n$ 阶行列式的展开式.

**例 1.5** 证明 $n$ 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.$$

这种主对角线(从左上角到右下角的对角线)以下(上)的元素都是零的行列式,称为上(下)三角行列式.

**证** 由式(1.9)知道,$n$ 阶行列式的展开式中每一项的一般形式是

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

其中只要有一个元素等于零,乘积就是零,所以只需计算乘积中因子不出现零的项. 对于上三角行列式,第 $n$ 行中当 $p_n \neq n$ 时,$a_{np_n}=0$,故只需考虑 $p_n=n$ 的项即可. 又因为在第 $n-1$ 行中,当 $p_{n-1}\neq n-1, n$ 时,$a_{n-1,p_{n-1}}=0$,故只需考虑 $p_{n-1}=n-1$或 $p_{n-1}=n$ 这两种情形. 但是已取 $p_n=n$,并且 $p_{n-1}\neq p_n$,因此只有 $p_{n-1}=n-1$. 依次类推,可知在 $n$ 阶行列式的展开式中只有唯一的一项 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 可能不为零,而 $\tau(12\cdots n)=0$. 于是结论得证. **证毕**

用类似于例 1.5 的讨论,可以证明下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

及

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

作为上(下)三角行列式的特例,可得对角行列式

$$\begin{vmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{vmatrix} = d_1d_2\cdots d_n.$$

下面对 $n$ 阶行列式的展开式(1.9)中各项前所带符号作两点补充说明.

(1) 由定理 1.2 知,$n$ 阶行列式的展开式(1.9)中,前面带负号的项数与前面带

正号的项数相等,均为$\frac{n!}{2}$项.

(2) 在行列式的定义中,为方便,我们将 $n$ 个元素的行标按自然顺序排列. 事实上,数的乘法是可交换的,因而这 $n$ 个元素的次序是可以任意排列的. 一般地,$n$ 阶行列式中的项可以写成

$$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n},$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的两个排列. 利用定理 1.1 可以证明,$n$ 阶行列式中,项 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 前面的符号为

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}.$$

特别地,项 $a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}$ 前面的符号为 $(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}$,于是 $n$ 阶行列式的定义又可以写成

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{q_1q_2\cdots q_n}(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}. \tag{1.10}$$

我们定义的行列式中的元素是数,事实上,可以将其推广成元素是某些其他数学对象的情形. 例如,可以同样地定义元素是多项式的行列式.

## 1.3 行列式的性质及计算

### 1.3.1 行列式的性质

当行列式的阶数 $n$ 较大时,直接用定义计算行列式是很困难的,为了简化行列式的计算,需要讨论行列式的性质. 行列式的性质不仅可以用于行列式的计算,而且对行列式的理论研究也是很重要的.

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

即 $D^{\mathrm{T}}$ 是这样得到的:把 $D$ 中第 $i$ 行作为 $D^{\mathrm{T}}$ 的第 $i$ 列,这就是说 $D^{\mathrm{T}}$ 的第 $i$ 行第 $j$ 列处的元素为 $D$ 的第 $j$ 行第 $i$ 列处的元素. 称 $D^{\mathrm{T}}$ 为行列式 $D$ 的**转置行列式**.

**性质 1.1** 行列式与它的转置行列式相等.

**证** 记 $D=\det(a_{ij})$,$b_{ij}=a_{ji}$,$i,j=1,2,\cdots,n$,则由行列式的定义式(1.9)与式(1.10)可得

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}$$

$$=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}$$

$$=D.$$

**证毕**

由性质 1.1 可知,行列式中的行与列具有同等的地位,行列式的性质凡是对"行"成立的,对"列"也同样成立,反之亦然.因此在以下性质的证明中,只对"行"进行证明.

**性质 1.2** 互换行列式的两行(列),行列式变号.

**证** 设行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

是由行列式 $D=\det(a_{ij})$ 交换 $i,j$ 两行得到的,即当 $k\neq i,j$ 时,$b_{kp}=a_{kp}$;当 $k=i,j$ 时,$b_{ip}=a_{jp},b_{jp}=a_{ip}$(不妨设 $i<j$),于是

$$D_1=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}b_{1p_1}\cdots b_{ip_i}\cdots b_{jp_j}\cdots b_{np_n}$$

$$=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{np_n}$$

$$=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n},$$

其中 $12\cdots i\cdots j\cdots n$ 为自然排列.由定理 1.1 知

$$(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}=-(-1)^{\tau(p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n)},$$

故

$$D_1=-\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}=-D.$$

**证毕**

**推论** 如果行列式有两行(列)完全相同,则此行列式为零.

**性质 1.3** 行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一数 $k$,等于用数 $k$ 乘此行列式.

**证** 设行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是由行列式 $D=\det(a_{ij})$ 的第 $i$ 行中所有的元素都乘以同一数 $k$ 得到的. 由行列式的定义知

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}\cdots a_{i-1,p_{i-1}}(ka_{ip_i})a_{i+1,p_{i+1}}\cdots a_{np_n} \\ &= k\sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}\cdots a_{i-1,p_{i-1}}a_{ip_i}a_{i+1,p_{i+1}}\cdots a_{np_n} \\ &= kD. \end{aligned}$$

**证毕**

**推论 1** 行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

**推论 2** 若行列式中有两行(列)对应元素成比例,则此行列式等于零.

**推论 3** 若行列式中某一行(列)的元素全为零,则此行列式等于零.

**性质 1.4** 若行列式的某一行(列)的元素都是两数之和,则此行列式等于两个行列式之和. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a_{i1}' & a_{i2}+a_{i2}' & \cdots & a_{in}+a_{in}' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}' & a_{i2}' & \cdots & a_{in}' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

利用行列式的定义,不难给出性质 1.4 的证明,请读者自证(参考性质 1.3 的证明).

**性质 1.5** 把行列式的某一行(列)的各元素乘以同一数然后加到另一行(列)对应的元素上去,行列式不变.

**证** 利用性质 1.4 及性质 1.3 的推论 2 可得性质 1.5 的证明. **证毕**

为方便起见,交换行列式 $i,j$ 两行(列),记作 $r_i\leftrightarrow r_j$ $(c_i\leftrightarrow c_j)$;行列式第 $i$ 行(列)乘以数 $k$,记作 $kr_i(kc_i)$;以数 $k$ 乘行列式第 $i$ 行(列)加到第 $j$ 行(列)上,记作 $r_j+kr_i(c_j+kc_i)$.

**例 1.6** 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

**解**

$$D=\begin{vmatrix}2&1&1&1\\4&2&1&-1\\2&1&-1&1\\1&2&1&-2\end{vmatrix}\xlongequal{c_1\leftrightarrow c_3}-\begin{vmatrix}1&1&2&1\\1&2&4&-1\\-1&1&2&1\\1&2&1&-2\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4+(-1)r_1]{\substack{r_2+(-1)r_1\\ r_3+r_1}}-\begin{vmatrix}1&1&2&1\\0&1&2&-2\\0&2&4&2\\0&1&-1&-3\end{vmatrix}\xlongequal{\substack{r_3+(-2)r_2\\ r_4+(-1)r_2}}-\begin{vmatrix}1&1&2&1\\0&1&2&-2\\0&0&0&6\\0&0&-3&-1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3\leftrightarrow r_4}\begin{vmatrix}1&1&2&1\\0&1&2&-2\\0&0&-3&-1\\0&0&0&6\end{vmatrix}=-18.$$

**例 1.7** 计算 $n$ 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}2&1&1&\cdots&1\\1&2&1&\cdots&1\\1&1&2&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&1&\cdots&2\end{vmatrix}.$$

**解** 注意到行列式各列(各行)的元素之和都为 $n+1$,故可把 $2,3,\cdots,n$ 行同时加到第1行,再进行计算:

$$D=\!=\!=\begin{vmatrix}n+1&n+1&n+1&\cdots&n+1\\1&2&1&\cdots&1\\1&1&2&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&1&\cdots&2\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{第 1 行提出公因子 } n+1}(n+1)\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&2&1&\cdots&1\\1&1&2&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&1&\cdots&2\end{vmatrix}$$