应用经济学研究与教学方法论丛书

数理经济学理论与应用

谌贻庆　陶春峰　编著

科学出版社

应用经济学研究与教学方法论丛书

数理经济学理论与应用

谌贻庆　陶春峰　编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书主要以数学方法来分析经济理论，通过明确地给出假设条件，进行相关推理，得出相关结论，力求每一步推导都较符合逻辑，确切地表示所涉及的经济理论的内在规律，并注重理论阐述过程中的思维方式和分析方法，尽量使经济学中的相关概念和命题简洁明确。本书通过理论推导和相关应用展示，使学生掌握经济学分析和研究的方法，并加以推广应用，以此来提高学生的分析、解决问题能力和研究能力。本书着重阐述了经济活动中消费、生产、交换和分配等方面的数理分析及应用。全书共分七章，主要包括数理基础、消费者选择理论、厂商选择理论、市场均衡理论、分配理论，以及这些理论在经济活动中的应用。

本书既可作为经济类专业研究生或高年级本科生的教材，也可供从事经济与管理研究的专业人员阅读和参考。

图书在版编目（CIP）数据

数理经济学理论与应用/谌贻庆，陶春峰编著.—北京：科学出版社，2013

（应用经济学研究与教学方法论丛书）

ISBN 978-7-03-038993-0

Ⅰ.①数… Ⅱ.①谌…②陶… Ⅲ.①数理经济学—研究 Ⅳ.①F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 254907 号

责任编辑：张 宁 江 薇 / 责任校对：黄江霞

责任印制：阎 磊 / 封面设计：蓝正设计

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

新科印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2014 年 3 月第 一 版 开本：787×1092 1/16

2014 年 3 月第一次印刷 印张：15 1/4

字数：355 000

定价：48.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

符 号 说 明

$\forall$	对于任意的
$\exists$	存在
$\ni$	使得
$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$	$x_i=y_i$，$i=1$，2，…，n
$\boldsymbol{x}>\boldsymbol{y}$	$x_i>y_i$，$i=1$，2，…，n(类似地，有$<$)
$\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{y}$	$x_i\geqslant y_i$，$i=1$，2，…，n(类似地，有$\leqslant$)
$\boldsymbol{x}\gneq\boldsymbol{y}$	$\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{y}$，且 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$(类似地，有$\lneq$)
$\boldsymbol{x}\prec\boldsymbol{y}$	$\boldsymbol{x}$ 劣于 $\boldsymbol{y}$
$\boldsymbol{x}\preceq\boldsymbol{y}$	$\boldsymbol{x}$ 不优于 $\boldsymbol{y}$
$\boldsymbol{x}\sim\boldsymbol{y}$	$\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 等价
Φ	空集
$\mathbf{R}^n$	n 维欧氏空间
$\mathbf{R}^n_+$	n 维欧氏空间的非负象限
Ω	R^n_+的内部，n 维欧氏空间的正象限
A°	集合 A 的内部
A'	集合 A 的导集
$\overline{A}$	集合 A 的闭包
∂A	集合 A 的边界
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置
$\boldsymbol{A}^{-1}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆
$\lvert\boldsymbol{A}\rvert$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式，或有限集 $\boldsymbol{A}$ 的元素个数
sup	上确界
inf	下确界
max	最大值
min	最小值
cov	凸包

目 录

第1章

导论

在亚里士多德时代，政治学、伦理学、政治经济学三位一体，直到英国人亚当·斯密(Adam Smith)于1776年发表《国富论》，经济学才正式成为一门独立的社会科学。亚当·斯密在其伦理学著作《道德情操论》中，解释了追求财富和奢侈的欲望如何会促使人们去从事庞大的工业和生产活动，认为通过努力而变得富有的人们，尽管生性自私和贪婪，只图自己的方便，雇用千百万人劳动所要达到的唯一目的就是满足自己无聊的和无厌的欲望，但他们却被“看不见的手”引导着去进行生活必需品的分配，这种分配促进了社会利益的合理分配，为人类的繁衍提供了生活资料。在亚当·斯密看来，是个人行为的非故意的结果，导致了一种能产生效率的社会秩序出现。在亚当·斯密的体系中可以看到牛顿物理学中的运动原理的影子：吸引力主导了物体的运动，所以“看不见的手”主导了经济系统的运行。他在《国富论》中说道：“每个人都试图应用他的资本，来使其生产品得到最大的价值。一般来说，他并不企图增进公共福利，也不清楚增进的公共福利有多少，他所追求的仅仅是他个人的安乐，个人的利益，但当他这样做的时候，就会有一双看不见的手引导他去达到另一个目标，而这个目标绝不是他所追求的东西。由于追逐他个人的利益，他经常促进了社会利益，其效果比他真正想促进社会效益时所得到的效果大。”

以亚当·斯密为代表的古典经济学派(大约起自1776年，至1848年止)认为人类皆有“利己心”，经济体系会自动达成均衡，充分就业是社会常态，失业是短暂社会现象，主张自由放任，反对政府干涉。在该学派中，亚当·斯密提出了“绝对利益法则”，主张国际间的分工与专业，强调自由贸易；李嘉图(David Richard)提出了边际报酬递减法则、差额地价说、比较利益法则及生存费用说；等等。

大约从1848年到1890年，反古典学派兴起。在该学派中，以李斯特(F. List)为代表的历史派以归纳法研究经济学，提出了经济发展五阶段说，主张保护贸易政策，保护幼稚工业理论；以孟格尔(Manger)、瓦尔拉斯(Walras)为代表的边际效用派提出了边际效用价值分析法，解决“钻石与水”价值的矛盾；瓦尔拉斯从亚当·斯密的论述中发现了其合理的内核，把“看不见的手”理解为价格体系，把“社会利益”理解为供需平衡，提

出了一组方程来描写国家经济的数学模型；以马克思(Karl Marx)为代表的社会主义学派提出了剩余价值学说，主张反对资本主义社会造成的贫富不均，主张废除私有财产制度，倡导唯物史观，提倡阶级斗争；等等。

大约从1890年到1936年，新古典学派（又称为剑桥学派）兴起，马歇尔(A. Marshell)为其创始人，以“经济学”名称取代以往的“政治经济学”，以生产成本与边际效用为基础，建立了折中的“二元价值论”，提出了消费者剩余、需求弹性等重要概念，着重个体经济的研究，应用部分均衡分析法，侧重于客观的实证研究，将时间因素分为极短期、短期、长期和极长期；另一位重要代表人物是庇古(A. C. Pigou)，其在1920年提出了“福利经济学”；等等。

大约从1936年到1970年，新兴古典经济学派（又称凯恩斯学派）兴起，起因是20世纪30年代全球经济大恐慌，引起严重失业问题。其创始人是凯恩斯(J. M. Keynes)，他否定古典经济学派的充分就业，认为失业才是常态，否定供给创造需求，主张政府应增加公共支出，刺激有效需求，解决失业问题，提出了流动性偏好说、乘数原理、节俭的矛盾概念等；另一位代表人物是萨缪尔森(P. A. Samuelson)，他提出了复合乘数来解释景气循环变动的“乘数-加速原理”；等等。

大约从1970年以后，又出现了货币学派（又称芝加哥学派），代表人物是弗里德曼(M. Friedman)，其主张自由经济，政府不过分干涉，认为政府的经济政策短期有效，长期则无效，提出了货币法则(monetary rule)，以“法则取代权衡”；另一个是理性预期学派，代表人物是卢卡斯(R. Lucas)，以动态分析及理性预期假说为主要特征，认为政府的经济政策在民众理性预期下皆无效；还有一个供应学派（又称里根经济学派），代表人物是拉弗尔(A. Laffer)，其主张以减税的方式提供经济诱因，刺激私人投资，促进经济成长，降低政府对企业经营的控制，这些政策带来了20世纪80年代后美国经济的持续繁荣，拖垮了前东欧社会主义阵营；等等。

1.1 什么是数理经济学

从上面的大致描述可以看出，人类经济活动的过程就是对经济现象进行描述，再加上一些必要的假设，形成经济思想，产生经济理论，建立经济模型，制定经济政策的过程，如图1-1-1所示。在有限的资源中，人们消费什么，消费多少，如何来满足消费，如何进行交换、生产和分配等，是经济理论要阐述的内容。

因此，我们有理由认为，经济学是研究人类经济行为的社会科学，它研究个人、企业和政府及其经济单位如何进行抉择，以便决定如何使用稀缺的或有限的资源。

经济学结构包括理论、方法和应用三个方面。从理论上来说，经济学可分为微观经济学、宏观经济学和制度经济学等。微观经济学研究消费者、生产者、供应商等个体行为如何做出决策，主要讨论产品市场、要素市场和劳动力市场的供求关系。宏观经济学研究各个市场的演变过程，因此除了将产品市场、要素市场和劳动力市场扩充到多国的开放型经济系统外，还要增加一个市场，那就是货币市场。制度经济学研究经济政策的演变过程。从分析方法上来说，经济学可分为数理经济学、计量经济学和博弈论等。从

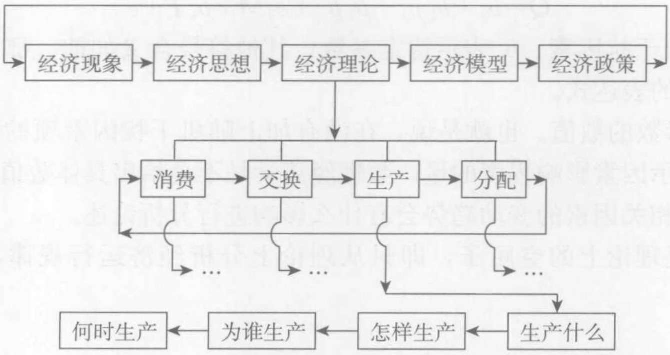

图 1-1-1

应用上来说，经济学可以在各个行业上进行应用，包括产业组织理论、农业经济学、环境卫生经济学、发展经济学等，每个行业的应用又可能都涉及投资学、国际经济学、货币金融学、保险学、公共政策理论等。

由于科学技术的迅速发展和各学科的日益交融，所以数学方法不可避免地被引入了经济学研究领域，学者们不断使用和建立经济学的数理模型。数学作为一种描述语言，通过明确地给出假设条件，并且使每一步推导都符合逻辑，从而形成确切表示某种理论(包括经济理论)的一种方便的工具。基于数理方法分析的抽象的经济学理论，为我们研究现实世界中的问题和制度提供了一种很好的途径，最后人们可以根据这些分析结论形成经济政策。

数理经济学就是用微分、差分、代数、几何等数学方法来研究微观、宏观和制度经济学。它采用最艰深的数学工具，在最宽泛的条件下来描述“经济”，并研究其内在规律。在本书中，我们要讨论的主要内容包括消费、生产、均衡、分配等的数理分析方法。它是由瓦尔拉斯(Walras)、阿罗(Arrow)、德布鲁(Debreu)、冯·纽曼(von Neumann)、列昂惕夫(Leontief)等创立起来的。然而，数理经济学的内容远不止这些。

数理经济学与其他一些学科的关系可由图 1-1-2 来表示。在图 1-1-2 中，A 部分为数理经济学，B 部分为经济统计学，C 部分为数理统计学，D 部分为计量经济学。

数理经济学具有以下特点：

(1)用符号特别是数学符号来阐述经济理论，与文字阐述经济理论没有区别。

(2)用精确的形式来描述经济关系，建立在假设的基础上，可考虑随机变量，但不考虑随机干扰因素。例如，有以下表达式：

$$Q=b_0+b_1p_1+b_2p_2+b_3M+b_4T$$

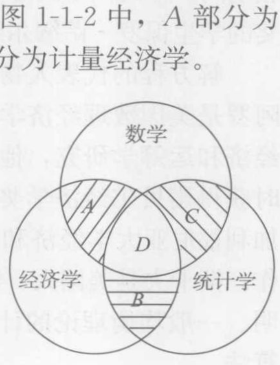

图 1-1-2

其中，Q 表示某一商品的需求量；p_1 表示该商品的价格；p_2 表示与该商品相关的其他商品的综合价格；M 表示消费者收入；T 表示消费者的消费偏好；b_i 表示各相关因素对需求量的影响程度。这被认为是一个数理经济学的表达式。但是，如果写成

$$Q=b_0+b_1p_1+b_2p_2+b_3M+b_4T+\varepsilon$$

其中，ε 表示随机干扰因素；b_i 表示待定参数；其他符号含义如前。那么，我们就认为这是计量经济学的表达式。

(3)不提供参数的数值。也就是说，在没有加上随机干扰因素项的数理经济学表达式中，对一些表示因素影响程度的量，数理经济学是不会给出具体数值的，而只对这些量的变化对于其相关因素的变动趋势会有什么影响进行分析论述。

(4)它本身是理论上的空匣子，即只从理论上分析经济运行规律，因此有许多的应用。

1.2 数理经济学的研究方法及代表人物

简单地说，数理经济学研究方法就是列方程和解方程。所谓列方程，就是用方程或方程组来描述经济系统中各因素之间的因果关系。所谓解方程，就是求解所列的方程或方程组，包括解的存在性、如果解存在的话是否唯一、解不唯一时的稳定性、解稳定时是否可控制、可控制时解是否能达到等相关问题。

列方程的代表人物有瓦尔拉斯、冯·纽曼、列昂惕夫等。瓦尔拉斯列出了产品市场供求平衡的联系方程，他是瑞士经济学家、洛桑大学经济学教授，是一般均衡理论的创始人，是洛桑学派的代表人物，著有《纯粹政治经济学原理》等。冯·纽曼是美籍匈牙利数学家、普林斯顿大学数学教授，在许多方面有开创性贡献，其发表的《量子力学的数学基础》等是奠基性的著作，开辟了泛函分析和拓扑线性空间的研究，他与 Morgensern 合著的《对策论与经济行为》在经济学中具有划时代意义，他还是第一代电子计算机的创始人，曾任美国总统艾森豪威尔的顾问。列昂惕夫是美籍俄罗斯人，是投入产出分析方法的创始人，投入产出分析为系统地分析经济内部各产业之间错综复杂的交易提供了一种实用的经济分析方法，备受西方经济学界的推崇，并因此获得诺贝尔经济学奖，他在哈佛大学经济系任教期间，他的同事约瑟夫·熊彼特对他的研究成果极为推崇，他的两位曾获诺贝尔经济学奖的学生保罗·萨缪尔森和罗伯特·索洛著有《美国经济的结构，1919-1929》等著作。

解方程的代表人物有阿罗(Arrow)、德布鲁(Debreu)、斯卡夫(Herbert Scraf)等。阿罗是美国数理经济学家、哈佛大学教授，曾在美国空军服务，第二次世界大战后从事经济和运筹学研究，他发表的“不可能性定理”为经济学界所称道，与希克斯(Hicks)同时获得诺贝尔经济学奖，曾任美国总统肯尼迪的顾问。德布鲁是美籍法国数理经济学家、加利福尼亚大学经济和数学教授，曾在法军服务，著有《价值论》和《数理经济论文》等著作。斯卡夫是美国人、数学博士、耶鲁大学经济学教授，他在一般均衡理论的存在性证明、一般均衡理论的计算方面做出了重大贡献，他首先给出了市场均衡点求解的具体算法。

1.3 数理方法应用举例

为了让大家有一个较好的理解，我们兹举例如下。

例 1.3.1 方桌问题。把方桌在不平的地面上一放，通常只有三只脚着地，不能放稳，能否通过挪动方桌使之变稳？

解：读者很快就会给出答案：通过挪动方桌，肯定能使之变稳。这个答案来自哪里呢？一般读者会说来自经验常识。但是，我们在这里要说的是，我们希望逻辑地得出这个结论。

(1)分析问题："稳"是什么？

(2)做出假设：①方桌是规范的，即四只脚是牢固的，四只脚一样长，四只脚的连线是正方形；②地面虽然是凹凸不平的，但却是连续的，即视地面是连续的曲面；③稳的含义是四脚落地；④桌脚落地视为桌脚与地面接触为一个点；等等。

(3)设计符号：用θ表示桌子绕中心旋转的角度，如图1-3-1所示，原四只桌脚的位置是$ABCD$，旋转后四只桌脚的位置是$A'B'C'D'$。用$f_1(\theta)$、$f_2(\theta)$、$f_3(\theta)$、$f_4(\theta)$分别表示桌脚A、B、C、D离地面的距离。

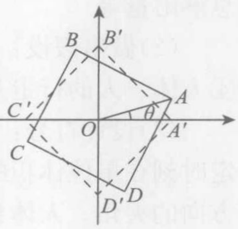

图 1-3-1

(4)建立模型。$f_i(\theta)$满足的性质：由于地面为连续曲面，所以$f_i(\theta)(i=1, 2, 3, 4)$是连续函数，且在$f_i(\theta)(i=1, 2, 3, 4)$中，总有三个值是为0的。稳的含义的数学表达：存在一个角度ξ，使得

$$f_1(\xi)=f_2(\xi)=f_3(\xi)=f_4(\xi)=0$$

(5)模型改进：由于在$f_i(\theta)(i=1, 2, 3, 4)$中，总有三个值是为0的(桌子的三只脚总是落地的)，如果我们令$f(\theta)=f_1(\theta)+f_2(\theta)$，$g(\theta)=f_3(\theta)+f_4(\theta)$，那么$f(\theta)$和$g(\theta)$至少有一个为0。这也可以用数学式来表示：总有$f(\theta)g(\theta)=0$。这时，稳的含义的数学表达为：存在一个角度$\xi$，使得$f(\xi)=g(\xi)=0$。

因此，求解方桌问题就变成了一个数学模型：已知$f(\theta)$和$g(\theta)$是非负连续函数，且对于任何角度θ，满足$f(\theta)g(\theta)=0$，是否存在一个角度ξ，使得$f(\xi)=g(\xi)=0$？

(6)模型求解：如果你认为存在这样一个角度，那么就请你逻辑地为大家证明一下。否则，就请你给出一个反例。

下面我们为你所做的肯定的回答给出富有逻辑的证明。

因为$f(0)g(0)=0$，不妨设$f(0)=0$，如果$g(0)=0$，则表明这时桌子已经是稳的，我们就取$\xi=0$。否则$g(0)>0$，这时，让方桌旋转$\frac{\pi}{2}$，请注意这时有$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=g(0)>0$，$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=f(0)=0$。

记$h(\theta)=f(\theta)-g(\theta)$，则$h(\theta)$是连续的，且

$$h(0)=f(0)-g(0)=0-g(0)<0$$

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)-g\left(\frac{\pi}{2}\right)=g(0)-0>0$$

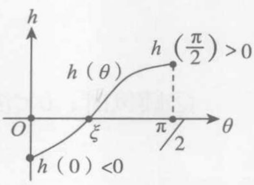

图 1-3-2

这说明，$h(\theta)$在闭区间$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$上满足介值定理条件，因此，由介值定理可知，存在$\xi$，使得$h(\xi)=0$。这个结论我们也可以从图 1-3-2 中得出来。

既然 $h(\xi)=0$，即 $f(\xi)-g(\xi)=0$，说明 $f(\xi)=g(\xi)$，由于 $f(\xi)g(\xi)=0$，因此 $f(\xi)=g(\xi)=0$，也就是说，可以通过挪动方桌使方桌变稳。

例 1.3.2 雨中行走问题。一个雨天，你有急事要从学校赶回到家里去，学校距家 1 千米，由于紧急，来不及找雨具，你决定冒雨跑着赶回去。尽管雨不小，但是你下定决心不回头。一路上，你被大雨淋着。在没有雨具和不借助任何交通工具的情况下，你能否有一种策略，使自己在雨中跑着时尽可能减少被雨淋湿的程度？

解：(1)分析问题：给定一定的条件，找出一种策略，使淋雨量尽可能小。与这有关的因素有落雨的速度及方向、落雨的密度、行走的速度及方向、人体的形状、路程、总淋雨量等。

(2)做出假设：①落雨的速度不变；②行走的速度及方向不变；③落雨的密度均匀；④人体、人的行走及雨的方向在同一平面上；⑤人体近似看成长方体；等等。

(3)设计符号：用 u 表示雨的速度，v 表示人行走的速度，ρ 表示落雨的密度，即一定时刻在单位体积的空间中落下的雨水所占的体积数。用 θ 表示落雨的方向与人行走的方向的夹角。人体身高为 h，宽度为 b，厚度为 a。路程为 s，总淋雨量为 c，如图 1-3-3 所示。

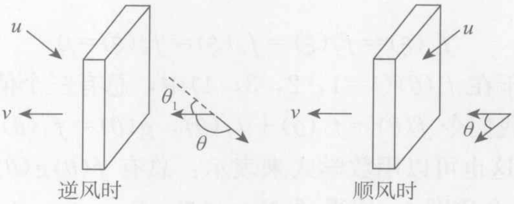

图 1-3-3

(4)建立模型：①逆风时，$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$，顶部的淋雨量为

$$c_1=ab(u\sin\theta)\cdot\frac{s}{v}\cdot\rho$$

前部的淋雨量为

$$c_2=bh(-u\cos\theta+v)\cdot\frac{s}{v}\cdot\rho$$

所以，总淋雨量为

$$\begin{aligned}c=c_1+c_2&=ab(u\sin\theta)\cdot\frac{s}{v}\cdot\rho+bh(-u\cos\theta+v)\cdot\frac{s}{v}\cdot\rho\\&=(au\sin\theta+h(-u\cos\theta+v))\frac{bs\rho}{v},\quad \frac{\pi}{2}<\theta<\pi\end{aligned}$$

②顺风时，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$，顶部的淋雨量为

$$c_1=ab(u\sin\theta)\cdot\frac{s}{v}\cdot\rho$$

后部的淋雨量为

$$c_2=bh(u\cos\theta-v)\cdot\frac{s}{v}\cdot\rho$$

所以，总淋雨量为

$$c=c_1+c_2=ab(u\sin\theta)\cdot\frac{s}{v}\cdot\rho+bh(u\cos\theta-v)\cdot\frac{s}{v}\cdot\rho$$
$$=(au\sin\theta+h(u\cos\theta-v))\frac{bs\rho}{v},\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}$$

(5)模型改进：由于当 θ 在第二象限时，$\sin\theta_1=\sin\theta$，$\cos\theta_1=-\cos\theta$，因此，逆风时，总淋雨量为

$$c=c(v)=(au\sin\theta_1+hu\cos\theta_1)\frac{bs\rho}{v}+bhs\rho,\ 0<\theta_1<\frac{\pi}{2}$$

顺风时，总淋雨量为

$$c=c(v)=(au\sin\theta+h(u\cos\theta-v))\frac{bs\rho}{v},\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}$$

因此，我们的模型是：寻找 v，使得 $c(v)$ 最小。

(6)模型求解：逆风时，由于总淋雨量 c 是行走速度 v 的减函数，所以，这时的最优策略是以自己最大的速度向前跑。顺风时，模型求解比较复杂，不能像逆风时那样，把总淋雨量表达式写成

$$c=c(v)=(au\sin\theta+hu\cos\theta)\frac{bs\rho}{v}-bhs\rho,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}$$

后，然后说，当 $v\to+\infty$ 时，总淋雨量 $c\to-bhs\rho$。因为总淋雨量不可能是负数。但是我们可以说，行走速度 $v<\cos v$ 时的总淋雨量 c 比行走速度 $v=\cos v$ 时的总淋雨量 c 要大些。当 $v>\cos v$ 时，我们暂不去考虑，留到大家读完第 2 章后，如果有兴趣的话再去研究吧。我们姑且做出结论：顺风时，当行走速度 $v=\cos v$ 时总淋雨量最小。

总结起来，数理经济学研究方法的一般步骤如图 1-3-4 所示。

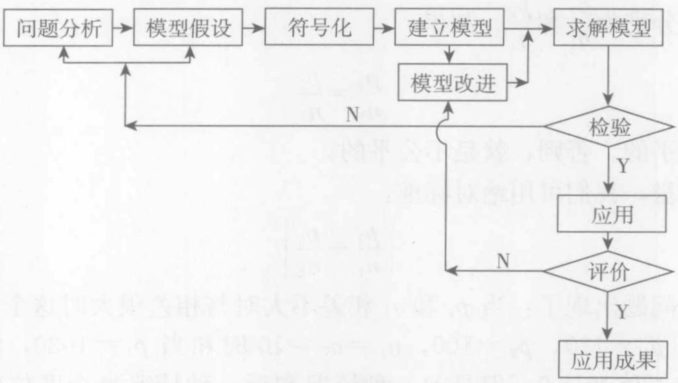

图 1-3-4

例 1.3.3　席位分配问题。某学院共有甲、乙、丙三个系，甲系有 103 名学生，乙系有 63 名学生，丙系有 34 名学生，全院共 200 名学生。若学生代表会议设 20 个席位，能否设计一个公平的分配方案？一般地，有 n 个席位，k 个单位分配，每个单位人数分

别为 p_1，p_2，…，p_k，你如何设计一个公平的分配方案(制度)？

解：(1)分析问题：按照惯例，有

$$m=q\cdot\frac{p}{N}$$

其中，m 表示某单位的席位数；q 表示总席位数；p 表示该单位的人数；N 表示总人数。对于本问题，如果甲系的学生是 100 名，乙系是 60 名，丙系是 40 名，那么，上述公式是一个挺好的公式，恰好分给甲系 $20\times\frac{100}{200}=10$ 个席位，分给乙系 $20\times\frac{60}{200}=6$ 个席位，分给丙系 $20\times\frac{40}{200}=4$ 个席位，20 个席位正好分完。

可是，实际情况是，甲系为 103 名学生，乙系为 63 名，丙系为 34 名。如果按上述公式，应分给甲系 $20\times\frac{103}{200}=10.3$ 个席位，分给乙系 $20\times\frac{63}{200}=6.3$ 个席位，分给丙系 $20\times\frac{34}{200}=3.4$ 个席位。由于席位数应该是整数，所以，操作上无法这样分。你可能马上会说，“这好办，取整数后，把剩下的最后一个席位分给小数点最大的那个单位”。于是，按照你的提议，甲系分得 10 个席位，乙系分得 6 个席位，丙系分得 4 个席位。事后，你会不会觉得对甲、乙两系稍有些不公平呢？

如果总席位由 20 个增加到 21 个，按照上述公式，理论上甲系应分得 $21\times\frac{103}{200}=10.815$ 个席位，乙系应分得 $21\times\frac{63}{200}=6.615$ 个席位，丙系分得 $21\times\frac{34}{200}=3.57$ 个席位，实际上你按“小数点最大的那个单位分得最后一个席位”的原则，甲、乙、丙系分别分得 11 个、7 个、3 个席位。事后，你应该为丙系鸣不平吧？

问题的关键是，如何表达公平？先考虑两个单位，若用 p_1、p_2 分别表示 A、B 两单位的人数，用 n_1、n_2 分别表示 A、B 两单位分得的席位数，则 A、B 两个单位每个席位代表的人数分别为$\frac{p_1}{n_1}$和$\frac{p_2}{n_2}$。如果

$$\frac{p_1}{n_1}=\frac{p_2}{n_2}$$

则席位分配是公平的。否则，就是不公平的。

不公平的衡量，我们可用绝对标准：

$$\left|\frac{p_1}{n_1}-\frac{p_2}{n_2}\right|$$

只是，有另一个问题出现了：当 p_i 和 n_i 相差不大时与相差很大时这个绝对值是可能相等的，例如，当 $p_1=120$，$p_2=100$，$n_1=n_2=10$ 时和当 $p_1=1020$，$p_2=1000$，$n_1=n_2=10$ 时，此绝对值都是 2，但是前一种情况和后一种情况每个席位代表的人数差较大，后一种情况的不公平事实上是小些，可是我们认定不公平值都是 2。

因此，我们采用不公平相对标准：

若$\frac{p_1}{n_1}>\frac{p_2}{n_2}$，则对 A 相对不公平，不公平值定义为

$$r_A=\frac{\frac{p_1}{n_1}-\frac{p_2}{n_2}}{\frac{p_2}{n_2}}=\frac{p_1}{p_2}\frac{n_2}{n_1}-1$$

若$\frac{p_1}{n_1}<\frac{p_2}{n_2}$，则对 B 相对不公平，不公平值定义为

$$r_B=\frac{\frac{p_2}{n_2}-\frac{p_1}{n_1}}{\frac{p_1}{n_1}}=\frac{p_2}{p_1}\frac{n_1}{n_2}-1$$

(2)做出假设：①如果每个单位的每个席位代表的人数相等，我们认为是公平的，否则，认为是不公平的；②对不公平的衡量，我们采用相对标准；③考虑增加一个席位时，分给谁所带来的不公平性会小一些。

(3)设计符号：用 p_1、p_2 分别表示 A、B 两单位的人数，用 n_1、n_2 分别表示 A、B 两单位分得的席位数，如果对 A 相对不公平，则用 r_A 表示 A 的不公平值，如果对 B 相对不公平，则用 r_B 表示 B 的不公平值。

(4)建立模型：不失一般性，我们考虑对 A 相对不公平的情况，这时$\frac{p_1}{n_1}>\frac{p_2}{n_2}$。如果$\frac{p_1}{n_1+1}>\frac{p_2}{n_2}$，这说明，即使增加 1 个席位，仍然对 A 相对不公平，所以这一席位应该分给 A 单位。如果$\frac{p_1}{n_1+1}<\frac{p_2}{n_2}$，这说明，当对 A 相对不公平时，给 A 增加一席，又造成了对 B 的不公平。这时，我们只好分别计算：

$$r_A(n_1,\ n_2+1)=\frac{p_1}{p_2}\frac{n_2+1}{n_1}-1$$

$$r_B(n_1+1,\ n_2)=\frac{p_2}{p_1}\frac{n_1+1}{n_2}-1$$

如果 $r_A(n_1,\ n_2+1)>r_B(n_1+1,\ n_2)$，则这一席位分给 A 单位；否则，分给 B 单位。

(5)模型改进：由于 $r_A(n_1,\ n_2+1)>r_B(n_1+1,\ n_2)$等价于

$$\frac{p_1^2}{n_1(n_1+1)}>\frac{p_2^2}{n_2(n_2+1)}$$

并且，当$\frac{p_1}{n_1}>\frac{p_2}{n_2}$，$\frac{p_1}{n_1+1}>\frac{p_2}{n_2}$时，也有

$$\frac{p_1^2}{n_1(n_1+1)}>\frac{p_2^2}{n_2(n_2+1)}$$

所以，我们的决策为：分别计算$\frac{p_1^2}{n_1(n_1+1)}$和$\frac{p_2^2}{n_2(n_2+1)}$的值，把增加的那一个席位分给值为最大的那个单位。

一般地，设有 k 个单位分配，每个单位人数分别为 p_1，p_2，…，p_k，如果各单位已经分别分得 n_1，n_2，…，n_k 个席位，那么，分别计算

$$Q_i=\frac{p_i^2}{n_i(n_i+1)},\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ k$$

把增加的那个席位分给 Q 值最大的那个单位。

(6)模型求解：一般从每个单位至少可分得 1 个席位开始，如果有一个单位连 1 个席位也分不到，则暂时把这个单位排除在外，直到大家都连 1 个席位也分不到，才开始考虑这个单位。按照我们建立的模型，分别计算 Q_i，$i=1，2，\cdots，k$，把即将分配的这个席位分给 Q 值最大的那个单位，再去按上述模型分配下一个席位，直到所有的席位都分完为止。

下面我们针对甲、乙、丙系各有 103 名、63 名和 34 名学生去分配 21 个席位的情况，来叙述一下分配席位的过程。

第 1 步：把前 3 个席位分别分给甲、乙、丙各 1 个席位。

第 2 步：计算 Q_i。这时

$$Q_1=\frac{103^2}{1\times(1+1)}=5304.5$$

$$Q_2=\frac{63^2}{1\times(1+1)}=1984.5$$

$$Q_3=\frac{34^2}{1\times(1+1)}=578$$

按照分配模型，我们把第 4 个席位分给甲系。由于没有分完，所以去重复第 2 步。

第 2 步(第 2 次)：这时

$$Q_1=\frac{103^2}{2\times(2+1)}=1768.2$$

$$Q_2=\frac{63^2}{1\times(1+1)}=1984.5$$

$$Q_3=\frac{34^2}{1\times(1+1)}=578$$

按照分配模型，我们把第 5 个席位分给乙系。由于没有分完，所以去重复第 2 步。

第 2 步(第 3 次)：这时

$$Q_1=\frac{103^2}{2\times(2+1)}=1768.2$$

$$Q_2=\frac{63^2}{2\times(2+1)}=661.5$$

$$Q_3=\frac{34^2}{1\times(1+1)}=578$$

按照分配模型，我们把第 6 个席位分给甲系。由于没有分完，所以去重复第 2 步。

第 2 步(第 4 次)：这时

$$Q_1=\frac{103^2}{3\times(3+1)}=884.1$$

$$Q_2=\frac{63^2}{2\times(2+1)}=661.5$$

$$Q_3=\frac{34^2}{1\times(1+1)}=578$$

按照分配模型，我们把第 7 个席位分给甲系。由于没有分完，所以去重复第 2 步。

如此一直进行下去，我们把分配结果列在表1-3-1中。

表 1-3-1

甲系	1	4	6	7	10	11	13	16	17	19	20
乙系	2	5	8	12	14	18					
丙系	3	9	15	21							

表1-3-1中阿拉伯数字表示第几个席位号，第一行表示甲系所分得的席位号，第二行表示乙系所分得的席位号，第三行表示丙系所分得的席位号。这样一来，甲系分得11个席位，乙系分得6个席位，丙系分得4个席位。

以上计算过程可编程计算。

例 1.3.4 报童问题。每天清早，当天的《南昌晚报》由配送员送到报童的报亭。为了鼓励大额订单，对未售出的报纸配送员会付少量的钱款以废报纸购回(这实际上是一种易变质产品，即 perishable product)。以下是报童的成本数据：报童为送来的每份报纸付0.25元；报童售出报纸的价格是每份0.5元；报童得到的未售出报纸的购回款是每份0.1元。那么，报童每天应该从配送员那里订多少份报纸呢？

解：(1)分析问题：如果报童订多了报纸，那么，他每多订一份报纸，就会从所赚得的利润中多扣去0.25－0.1＝0.15元，因此，他显然不愿多订报纸。如果报童订少了报纸，那么，他每少订一份报纸，就会少赚0.5－0.25＝0.25元的利润。这样一来，他选择订多少份报纸会有些犹豫，你认为他订多少份报纸的决策是：与前一天所售份数一致？近若干天所售报纸份数的平均值？近若干天所售报纸份数最多的那个数？等等。

(2)做出假设：①报童卖报纸是为了生计，不是为了好玩；②不考虑报童的固定成本；③不考虑报童的库存成本；④不考虑销售有特别异常的情况；⑤只考虑零卖方式，不考虑其他销售方式；⑥报童经营报亭已经有不短的时间，也就是说，他有若干天的销售数据。

(3)设计符号：用X表示报童的订货数量，它是一个一般变量。用Q表示报童的现实销售量，它是一个随机变量。用$P(Q)$表示报童卖了Q份报纸的概率，$P(Q)$是一个介于0与1之间的实数。用R表示报童每售出一份报纸的收益，这时$R=0.5-0.25=0.25$，它是一个常量。用L表示报童每一份没有卖出去的报纸所造成的损失，这时$L=0.25-0.1=0.15$，它也是一个常量。

(4)建立模型和改进：我们当然可以把问题归结为报童的销售利润最大化问题。但是，我们也可以考虑报童损失最小化问题。

当供大于求时，即$X>Q$，这时随机变量Q有$Q=0$，$Q=1$，$Q=2$，…，$Q=X-1$共X种取值，因此，报童的期望损失是

$$\sum_{Q=0}^{X-1} L(X-Q)P(Q)$$

当供小于求时，即$X<Q$，这时理论上随机变量Q有许多取值：$Q=X+1$，$Q=X+2$，$Q=X+3$，…。因此，报童的期望损失是

$$\sum_{Q=X+1}^{\infty} R(Q-X)P(Q)$$