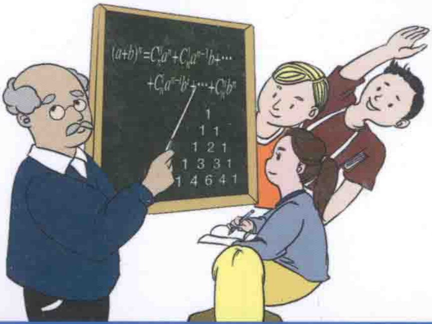


数林外传系列

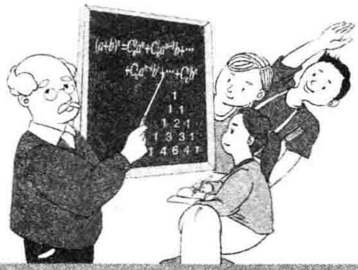
跟大学名师学中学数学

周期数列

第2版

◎曹鸿德　编著

中国科学技术大学出版社



数林外传系列

跟大学名师学中学数学

周期数列

第2版

◎ 曹鸿德　编著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

周期性是中学数学中的一项重要内容，也是各种竞赛的考点.本版在第1版的基础上做了较大改动，增加了更多与周期数列相关的基础知识，同时纠正了一些印刷错误，并完善了书中的一些证明.本书从递推数列出发，讲述了一阶、二阶递推数列，以及递推数列的有界性和单调性；最后讲述了本书的重点——周期数列以及模周期数列.其中前三章对于参加自主招生考试的学生是非常有益的.书中附有大量的练习题，并提供了解答或提示.

本书可供中学生、中学教师以及数学爱好者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

周期数列/曹鸿德编著. —2版. —合肥：中国科学技术大学出版社，2013.6

(数林外传系列：跟大学名师学中学数学)

ISBN 978-7-312-03200-4

Ⅰ.周… Ⅱ.曹… Ⅲ.代数课—中学—教学参考资料 Ⅳ.G634.623

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第118283号

中国科学技术大学出版社出版发行

安徽省合肥市金寨路96号，230026

http://press.ustc.edu.cn

合肥学苑印务有限公司印刷

全国新华书店经销

*

开本：880 mm×1230 mm 1/32 印张：9.125 字数：246千

1992年3月第1版 2013年6月第2版 2013年6月第2次印刷

定价：24.00元

再版前言

考虑到递推数列性质的完整性,再版《周期数列》一书时,增加了递推数列的其他性质.这些增加的内容,不仅为《周期数列》提供了基础,而且增加的前几章中的一些定理揭示了一些高考、自主招生和竞赛数列命题的背景,同时对广大高中数学教师是有参考价值的.

这次再版,不仅纠正了许多印刷错误,并尽可能地纠正了一些不完善的证明和错误,而且在知识系统方面尽可能做得更好一点.

1990 年后本人从事了十年行政工作,1999 年退休后又重新“玩起了”我所热衷的数学,有些新的发现,兴致颇高,晚年生活很充实.这次特邀卢明、沈新权和吕峰波三位浙江省数学特级教师参与前几章的编著和审稿.吕峰波编写第 1 章,沈新权、卢明和曹鸿德合作完成第 2 章和第 3 章,曹鸿德和徐洪泉合作完成第 4 章和第 5 章.后生可畏,是可以有所作为的.我一路能够走到现在,还能做点数学工作,除了坚持,也与大学学习时复旦大学数学系给我打下较为坚实的基础有关.

单墫先生几十年如一日地支持我的工作,这次又给予许多指导,例如,第 3 章中“混沌”一词是单先生提供的,并又审阅了全书.

在这里,我要提起一些往事.记得 1988 年夏,严镇军先生看到我的《模周期数列》手稿,举荐给湖南教育出版社《数学竞赛》

发表，后入选在北京举行的第31届IMO对外交流文集《Mathematical Olimpiad in China》.先生又力促我完成全书.严镇军先生是一个诚恳实在的人、治学严谨的人.虽然严先生有点重听，和他说话颇为吃力，但一谈到数学，他便眉飞色舞，热情地投入讨论.严先生已作古多年，我一直怀念他.

我的学生徐洪泉当年在南开大学数学系学习时为我查找了不少资料，并参与了一些定理的证明.

这里，对支持和帮助过我的朋友一并表示感谢!

书中如有错误，敬请读者指正.

曹鸿德

2012年冬

前　　言

由于纯数学与应用数学的推动，对周期数列的研究在不断地深入.这在数学竞赛中也有所反映，书中的大部分例题便取自各类竞赛.

本书在写作过程中，得到了单墫和严镇军两位先生的支持，单先生仔细审阅了本书的一、二两稿，对于写作(特别是一些证明)给予了许多指导.借此机会，谨向两位先生表示衷心的感谢.

由于才疏学浅，书中难免存在缺点和错误，敬请读者指正.

曹鸿德

1990 年冬

目　　次

第 1 章　一阶递推数列

1.1　基本概念

定义 1.1.1　设一元函数 $f(x)$的定义域为 D,值域也为 D.若 $a_1\in D$,$a_{n+1}=f(a_n)(n\in\mathbf{N}^*)$,则称数列$\{a_n\}$为由函数 $f(x)$导出的**一阶递推数列**,函数 $f(x)$称为数列$\{a_n\}$的递推(迭代)函数.

定义 1.1.2　如果一个数列$\{a_n\}$从第 2 项起,每一项与它前一项的差等于同一个常数,即 $a_{n+1}-a_n=d$(d 为常数),这个数列就叫作**等差数列**,这个常数 d 叫作等差数列的**公差**.等差数列的通项公式为 $a_n=a_1+(n-1)d$,或者 $a_n=a_m+(n-m)d$ $(m,n\in\mathbf{N}^*)$,其前 n 项和

$$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d,\ 或\ S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}\quad(n\in\mathbf{N}^*).$$

定义 1.1.3　如果一个数列$\{a_n\}$从第 2 项起,每一项与它前一项的比等于同一个常数,即$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q$,这个数列就叫作**等比数列**,这个常数 q 叫作等比数列的**公比**,等比数列的通项公式是 $a_n=a_1q^{n-1}$,或者 $a_n=a_mq^{n-m}(m,n\in\mathbf{N}^*)$,其前 $n(n\in\mathbf{N}^*)$项和

$$S_n=\begin{cases}na_1 & (q=1),\\ \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q} & (q\neq 1),\end{cases}$$

或

$$S_n=\begin{cases}na_1 & (q=1),\\ \dfrac{a_1-a_nq}{1-q} & (q\neq 1).\end{cases}$$

显然,由定义知等比数列$\{a_n\}$的每一项 $a_n\neq 0$.

由定义 1.1.1 可知,等差数列的递推函数为 $f(x)=x+d$;等比数列的递推函数为 $f(x)=xq$.

等差数列和等比数列称为最基本的递推数列.

一个数列的第 n 项与前面的 k 项 $a_{n-1},a_{n-2},\cdots,a_{n-k}$($k\in\mathbf{N}$,$k<n$),若有关系式 $a_n=f(a_{n-1},a_{n-2},\cdots,a_{n-k})$ 成立,则称数列 $\{a_n\}$ 为由 k 元函数 f 导出的 k 阶递推数列,其中前 k 项 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 称为数列 $\{a_n\}$ 的初始项.关于 $k(k\geqslant 2)$ 阶递推数列,我们将在第 2 章专门研究,本章的重点是研究一阶递推数列,但也会涉及部分能转化为一阶的 $k(k\geqslant 2)$ 阶递推数列.

等差数列的基本性质:

(1) 设 $\{a_n\}$ 是等差数列,若 $m+n=p+q$($m,n,p,q\in\mathbf{N}^*$),则 $a_m+a_n=a_p+a_q$.特别地,$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$($n\in\mathbf{N}^*$).

(2) 从等差数列 $\{a_n\}$ 中依次等距离(设为 k)地取出若干项,所得数列仍然是等差数列,其公差为 kd.

(3) 对公差为 d 的等差数列,依次按 k 项分组,每组的 k 项之和依次组成的数列仍是等差数列,其公差为 k^2d,即 $a_1+a_2+\cdots+a_k,a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{2k},\cdots,a_{nk+1}+a_{nk+2}+\cdots+a_{nk+k},\cdots$ 是公差为 k^2d 的等差数列.

(4) 若数列 $\{a_n\}$ 是等差数列,则有 $a_n=kn+b$(k,b 是常数,$n\in\mathbf{N}^*$),$S_n=An^2+Bn$(A,B 为常数,$n\in\mathbf{N}^*$),其中 k,b,A,B 为待定系数.

等比数列的基本性质:

(1) 设 $\{a_n\}$ 是等比数列,若 $m+n=p+q$($m,n,p,q\in\mathbf{N}^*$),则 $a_ma_n=a_pa_q$.特别地,$a_{n+1}^2=a_na_{n+2}$($n\in\mathbf{N}^*$).

(2) 从等比数列 $\{a_n\}$ 中依次等距离地取出若干项,所得数列仍然是等比数列.

(3) 对公比为 q 的等比数列,依次按 k 项分组,每组的 k 项之和组成的数列仍是等比数列,其公比为 q^k,即 $a_1+a_2+\cdots+a_k$,$a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{2k},\cdots,a_{nk+1}+a_{nk+2}+\cdots+a_{nk+k},\cdots$ 是公比为

q^k 的等比数列.

(4) 若数列 $\{a_n\}$ 成等比数列,则有 $a_n = A_1 q^n$(常数 A_1, $q\neq 0, n\in \mathbf{N}^*$), $S_n = \begin{cases} na_1 & (q=1) \\ A_2(q^n-1) & (q\neq 1, q\neq 0) \end{cases}$(常数 $A_2\neq 0$, $n\in\mathbf{N}^*$),其中 A_1, A_2 为待定系数.

例 1.1.1 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n = n^2 + \lambda n (n\in\mathbf{N}^*)$,且 $a_{n+1} > a_n$ 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立.求实数 λ 的取值范围(这里的 $\{a_n\}$ 是高阶等差数列).

解 由 $a_{n+1} > a_n$,可知 $(n+1)^2 + \lambda(n+1) > n^2 + \lambda n \Leftrightarrow \lambda > -(2n+1)$,故要使对任意 $n\in\mathbf{N}^*$,不等式 $a_{n+1} > a_n$ 恒成立 $\Leftrightarrow \lambda > [-(2n+1)]_{\max}$.显然,当 $n=1$ 时,有 $[-(2n+1)]_{\max} = -3$,因此所求的 λ 的取值范围为 $(-3, +\infty)$.

例 1.1.2 已知数列 $\{a_n\}$ 中, S_n 是其前 n 项和,且 $S_{n+1} = 4a_n + 2 (n=1,2,\cdots)$, $a_1 = 1$.

(1) 设数列 $b_n = a_{n+1} - 2a_n (n\in\mathbf{N}^*)$,求证:数列 $\{b_n\}$ 是等比数列;

(2) 设数列 $c_n = \dfrac{a_n}{2^n} (n\in\mathbf{N}^*)$,求证:数列 $\{c_n\}$ 是等差数列;

(3) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式及前 n 项和.

分析 由于 $\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 中的项都和 $\{a_n\}$ 中的项有关,显然可由 $S_n - S_{n-1} = a_n$ 作为切入点,消去 S_n.

解 (1) 由已知 $S_{n+1} = 4a_n + 2$,可知 $S_{n+2} = 4a_{n+1} + 2$,前面两式相减,得

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n \quad (n\in\mathbf{N}^*). \tag{1}$$

对式(1)恒等变形是解题的切入点.把式(1)化为

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 2a_n). \tag{2}$$

因为 $b_n = a_{n+1} - 2a_n$,所以由式(2)得

$$b_{n+1} = 2b_n \quad (n\in\mathbf{N}^*). \tag{3}$$

由已知得 $S_2 = 4a_1 + 2$,即 $a_1 + a_2 = 4a_1 + 2$.由于 $a_1 = 1$,故 $a_2 = 5$,

$b_1 = a_2 - 2a_1 = 3$.

由式(3)可知,数列$\{b_n\}$是首项为3、公比为2的等比数列,故$b_n = 3 \cdot 2^{n-1}(n \in \mathbf{N}^*)$.

(2) 因为$c_n = \frac{a_n}{2^n}(n \in \mathbf{N}^*)$,所以

$$c_{n+1} - c_n = \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} = \frac{a_{n+1} - 2a_n}{2^{n+1}}$$
$$= \frac{b_n}{2^{n+1}} = \frac{3 \cdot 2^{n-1}}{2^{n+1}} = \frac{3}{4} \quad (n \geqslant 1).$$

又$c_1 = \frac{a_1}{2} = \frac{1}{2}$,故数列$\{c_n\}$是首项为$\frac{1}{2}$、公差为$\frac{3}{4}$的等差数列,从而有

$$c_n = \frac{3}{4}n - \frac{1}{4} \quad (n \in \mathbf{N}^*).$$

(3) 因为$c_n = \frac{a_n}{2^n}$,又$c_n = \frac{3}{4}n - \frac{1}{4}$,所以$\frac{a_n}{2^n} = \frac{3n}{4} - \frac{1}{4}$,

$$a_n = (3n-1) \cdot 2^{n-2} \quad (n \geqslant 1).$$

当$n \geqslant 2$时,由已知得$S_n = 4a_{n-1} + 2 = (3n-4) \cdot 2^{n-3} + 2$;当$n = 1$时,$S_1 = a_1 = 1$不适合.

综上可知,数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n = (3n-1) \cdot 2^{n-2}$ $(n \geqslant 1)$,其n项和

$$S_n = \begin{cases} 1 & (n = 1), \\ (3n-4) \cdot 2^{n-3} + 2 & (n \geqslant 2). \end{cases}$$

例 1.1.3 已知数列$\{a_n\}$为等差数列且公差不为0,数列$\{a_n\}$中的部分项组成的数列$a_{k_1}, a_{k_2}, a_{k_3}, \cdots, a_{k_n}$恰为等比数列,其中$k_1 = 1, k_2 = 5, k_3 = 17$.求$k_1 + k_2 + \cdots + k_n$的值.

解 设等差数列$\{a_n\}$的首项为a_1,公差为d.因为a_1, a_5, a_{17}成等比数列,所以$a_5^2 = a_1 a_{17}$,即$(a_1 + 4d)^2 = a_1(a_1 + 16d)$,解得$a_1 = 2d, a_5 = 6d, a_{17} = 18d$,从而$a_{k_1}, a_{k_2}, a_{k_3}, \cdots$构成公比为3的等比数列,故$a_{k_i} = a_1 \cdot 3^{i-1} = 2d \cdot 3^{i-1} = 2d + (k_i - 1)d (i \geqslant 1)$,

$k_i=2\cdot3^{i-1}-1$.因此

$$\begin{aligned}k_1+k_2+\cdots+k_n&=2(1+3+3^2+\cdots+3^{n-1})-n\\&=3^n-n-1\quad(n\geqslant1).\end{aligned}$$

例 1.1.4　设等差数列的首项及公差均为非负整数,项数不少于 3,且各项之和为 97^2.这样的数列共有多少个?

分析　本题的关键是 97 为质数,从而可讨论 n 的所有取值.

解　设等差数列的首项为 a,公差为 d,项数为 $n(a,d\in\mathbf{Z},n\geqslant3)$,则由已知得

$$na+\frac{1}{2}n(n-1)d=97^2,$$

即

$$[2a+(n-1)d]n=2\cdot97^2.\tag{1}$$

因为 $n\geqslant3$,97 为素数,故由式(1),n 的值只可能是 $97,2\cdot97,97^2,2\cdot97^2$ 四者之一.

(a) $d\geqslant1$.

当 $n=97$ 时:

若 $a=0$,则由式(1)得 $96d=2\cdot97$,即 $48d=97$,无解;

若 $a\geqslant1$,则由式(1)得 $a+48d=97$,解得 $a=1,d=2$,或 $a=49,d=1$.

当 $n=2\cdot97$ 时:

若 $a=0$,则由式(1)得 $193d=97$,无解;

若 $a\geqslant1$,则由式(1)得 $2a+193d=97$,无解.

同理,当 $n=97^2,2\cdot97^2$ 时也无解.

(b) $d=0$.

由式(1)得 $na=97^2$,解得 $a=1,n=97^2$,或 $a=97,n=97$.

综上,符合条件的数列共有 4 个.

例 1.1.5　$n^2(n\geqslant4)$个正数如下排成 n 行、n 列:

$$a_{11},a_{12},a_{13},\cdots,a_{1n},$$

$$a_{21},a_{22},a_{23},\cdots,a_{2n},$$

$$\cdots\cdots$$

$$a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \cdots, a_{nn},$$

其中每一行的数依次从左到右成等差数列，每一列的数依次从上到下成等比数列，并且所有的公比相等. 已知 $a_{24}=1, a_{42}=\dfrac{1}{8}$, $a_{43}=\dfrac{3}{16}$，求 $a_{11}+a_{22}+a_{33}+\cdots+a_{nn}$的和.

解　由已知得 $a_{44}=2a_{43}-a_{42}=\dfrac{3}{16}\cdot 2-\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{4}$. 对第 4 列，有 $a_{44}=a_{24}q^2=\dfrac{1}{4}$，又 $a_{24}=1$，解得 $q=\dfrac{1}{2}$. 由于每一列的数成等比数列，故 $a_{12}=a_{42}\cdot 8=1, a_{13}=a_{43}\cdot 8=\dfrac{3}{2}$，从而第 1 行的公差 $d_1=\dfrac{1}{2}$. 因为第 1 行的数成等差数列，所以 $a_{11}=2a_{12}-a_{13}=\dfrac{1}{2}$，从而有 $a_{1k}=\dfrac{1}{2}+(k-1)\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{k}{2}$. 又因为每一列的数成等比数列，所以 $a_{kk}=a_{1k}q^{k-1}=\dfrac{k}{2^k}$，于是

$$\begin{aligned} S &= a_{11}+a_{22}+a_{33}+\cdots+a_{nn} \\ &= \frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2^2}+\cdots+n\frac{1}{2^n}, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2^2}+2\cdot\frac{1}{2^3}+\cdots+n\frac{1}{2^{n+1}}, \tag{2}$$

两式相减，得

$$S = 2-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}\quad (n\geqslant 1).$$

例 1.1.6　设有固定项的数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=2n^2+n$ $(n\geqslant 1)$. 现从中抽去某一项（不包括首项、末项）后，余下项的平均值是 79.

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式 a_n；

(2) 求这个数列的项数，问抽取的是第几项？

解　(1) 由 $S_n=2n^2+n$，得 $a_1=S_1=3$. 当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=4n-1$. 显然，a_1 满足此式，故数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=4n-1(n\geqslant 1)$.

(2) 设抽取的是第 k 项 $(1<k<n)$，则由已知得 $S_n-a_k=79(n-1)$，从而有

$$a_k=(2n^2+n)-79(n-1)=2n^2-78n+79.$$

因为 $a_k>a_1$ 且 $a_k<a_n$，所以 $2n^2-78n+79>3$ 且 $2n^2-78n+79<4n-1$，解得 $n<40$，故 $n=39$. 于是 $a_k=2\cdot 39^2-78\cdot 39+79=4k-1$，解得 $k=20$.

综上，数列 $\{a_n\}$ 共有39项，抽取的是第20项.

例1.1.7　(1991年全国高中联赛试题)设 $S=\{1,2,\cdots,n\}$，A 为至少含有两项的、公差为正的等差数列，其项都在 S 中，且添加 S 的其他元素于 A 后均不能构成与 A 有相同公差的等差数列. 求这种 A 的个数.(这里只有两项的数列也看作等差数列.)

解法1　设 A 的公差为 d，则 $1\leqslant d\leqslant n-1$. 分两种情况讨论.

(a) 若 n 为偶数，当 $1\leqslant d\leqslant \frac{n}{2}$ 时，公差为 d 的 A 有 d 个；当 $\frac{n}{2}+1\leqslant d\leqslant n-1$ 时，公差为 d 的 A 有 $n-d$ 个. 因此当 n 为偶数时，A 共有

$$\left(1+2+\cdots+\frac{n}{2}\right)+\left\{1+2+\cdots+\left[n-\left(\frac{n}{2}+1\right)\right]\right\}=\frac{n^2}{4}(\text{个}).$$

(b) 若 n 为奇数，则当 $1\leqslant d\leqslant \frac{n-1}{2}$ 时，公差为 d 的 A 有 d 个；当 $\frac{n+1}{2}\leqslant d\leqslant n-1$ 时，公差为 d 的 A 有 $n-d$ 个. 因此当 n 为奇数时，A 共有

$$\left(1+2+\cdots+\frac{n-1}{2}\right)+\left(1+2+\cdots+\frac{n-1}{2}\right)=\frac{n^2-1}{4}(\text{个}).$$

以上两种情况可统一为 $A=\left[\frac{n^2}{4}\right]$（$[x]$表示不超过 x 的最大

整数).

解法 2　对于 $n=2k$,所述数列 A 必有连续两项,一项在$\{1,2,\cdots,k\}$中,另一项在$\{k+1,k+2,\cdots,n\}$中.反之,分别从$\{1,2,\cdots,k\}$和$\{k+1,k+2,\cdots,m\}$中任取一个数,以它们的差为公差可作出一个 A.此对应是一一对应.因此,这种 A 的个数为$k^2=\frac{n^2}{4}$.

对于 $n=2k+1$,情况完全类似.注意集合$\{k+1,k+2,\cdots,n\}$中有 $k+1$ 个数,故 A 的个数为$k(k+1)=\frac{n^2-1}{4}$.

以上两种情况可统一为 $A=\left[\frac{n^2}{4}\right]$.

例 1.1.8　给定正整数 n 和正数M.对于满足条件 $a_1^2+a_{n+1}^2\leqslant M$ 的所有等差数列$a_1,a_2,a_3,\cdots$,试求 $S=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n+1}$的最大值.

解　设 $a_{n+1}=a$,公差为 d,则由 $S=(n+1)a+\frac{n(n+1)}{2}d$,得 $a+\frac{n}{2}d=\frac{S}{n+1}$.又由已知得到$(a-nd)^2+a^2\leqslant M$,所以

$$M\geqslant\frac{4}{10}\left(a+\frac{n}{2}d\right)^2+\frac{1}{10}(4a-3nd)^2\geqslant\frac{4}{10}\left(\frac{S}{n+1}\right)^2,$$

$$\sqrt{M}\geqslant\frac{2}{\sqrt{10}}\frac{|S|}{n+1}\quad\Rightarrow\quad|S|\leqslant\frac{\sqrt{10}}{2}(n+1)\sqrt{M},$$

当且仅当 $4a-3nd=0$ 时,等号能取到,故

$$S_{\max}=\frac{\sqrt{10}}{2}(n+1)\sqrt{M}.$$

例 1.1.9　已知数集 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}(1\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_n,n\geqslant2)$具有性质 P:对任意 $i,j(1\leqslant i\leqslant j\leqslant n)$,$a_ia_j$ 和$\frac{a_j}{a_i}$两个数中至少有一个属于A.

(1) 分别判断数集$\{1,3,4\}$与$\{1,2,3,6\}$是否具有性质 P,并说明理由;

（2）证明：$a_1=1$，且$\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{a_1^{-1}+a_2^{-1}+\cdots+a_n^{-1}}=a_n$；

（3）证明：当 $n=5$ 时，a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 成等比数列.

解　（1）由于 $3\cdot 4$ 与 $\dfrac{4}{3}$ 均不属于数集 $\{1,3,4\}$，故数集 $\{1,2,3\}$ 不具有性质 P. 由于 $1\cdot 2,1\cdot 3,1\cdot 6,2\cdot 3,\dfrac{6}{2},\dfrac{6}{3},\dfrac{1}{1},\dfrac{2}{2},\dfrac{3}{3},\dfrac{6}{6}$ 都属于数集 $\{1,2,3,6\}$，故数集 $\{1,2,3,6\}$ 具有性质 P.

（2）因为 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 具有性质 P，所以 a_na_n 和$\dfrac{a_n}{a_n}$中至少有一个属于 A. 由于 $1\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_n$，$a_na_n>a_n$，故 $a_na_n\notin A$. 又 $1=\dfrac{a_n}{a_n}\in A$，所以 $a_1=1$. 因为 $1=a_1<a_2<\cdots<a_n$，所以 $a_ka_n>a_n$，从而 $a_ka_n\notin A(k=2,3,\cdots,n)$. 由 A 具有性质 P 可知 $\dfrac{a_n}{a_k}\in A(k=1,2,\cdots,n)$.

又$\dfrac{a_n}{a_n}<\dfrac{a_n}{a_{n-1}}<\cdots<\dfrac{a_n}{a_2}<\dfrac{a_n}{a_1}$，故$\dfrac{a_n}{a_n}=1=a_1,\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=a_2,\cdots,\dfrac{a_n}{a_2}=a_{n-1},\dfrac{a_n}{a_1}=a_n$，从而有

$$\frac{a_n}{a_n}+\frac{a_n}{a_{n-1}}+\cdots+\frac{a_n}{a_2}+\frac{a_n}{a_1}=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n,$$

即

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{a_1^{-1}+a_2^{-1}+\cdots+a_n^{-1}}=a_n.$$

（3）由(2)知，当 $n=5$ 时，有$\dfrac{a_5}{a_4}=a_2,\dfrac{a_5}{a_3}=a_3$，即

$$a_5=a_2a_4=a_3^2.$$

因为 $1=a_1<a_2<\cdots<a_5$，所以 $a_3a_4>a_2a_4=a_5$，从而 $a_3a_4\notin A$. 由 A 具有性质 P 可知$\dfrac{a_4}{a_3}\in A$. 由 $a_2a_4=a_3^2$，得$\dfrac{a_3}{a_2}=\dfrac{a_4}{a_3}\in A$，且 $1<$