奇异摄动丛书 4

奇异摄动问题中的空间对照结构理论

倪明康　林武忠　著

科学出版社

奇异摄动丛书　4

奇异摄动问题中的空间对照结构理论

倪明康　林武忠　著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书共分 4 章. 第 1 章主要介绍奇异摄动理论的一些基本概念，以及奇异摄动微分方程初边值问题形式渐近解的构造和余项估计，这些都为引入空间对照结构理论打下了基础. 第 2 章主要介绍二阶奇异摄动常微分方程的内部层问题，即阶梯状空间对照结构，其中包括了阶梯状解的形式渐近解的构造，转移点的确定，并用微分不等式方法证明了解的存在性和给出了余项估计. 第 3 章主要介绍奇异摄动常微分方程组的阶梯状空间对照结构，其中包括了各种类型的奇异摄动微分方程组，从二阶奇异摄动微分方程组着手一直到高阶奇异摄动微分方程组为止，不但构造了渐近解，而且用缝接法证明了解的存在性. 第 4 章主要介绍奇异摄动抛物型方程中的转移型空间对照结构，这里的内容更丰富，所得到的许多结果都是以数值计算为基础的，还留下了许多目前尚未解决的问题.

本书可作为高等院校数学系学生的教材，也可供数学、力学和物理学等相关专业工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

奇异摄动问题中的空间对照结构理论/倪明康，林武忠著. —北京：科学出版社，2013.11

(奇异摄动丛书 4/张伟江主编)

ISBN 978-7-03-039077-6

Ⅰ.①奇… Ⅱ.①倪… ②林… Ⅲ.①奇摄动-空间结构-研究 Ⅳ.①O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013) 第 263450 号

责任编辑：王丽平 / 责任校对：彭 涛

责任印制：赵德静 / 封面设计：耕者设计工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2014 年 1 月第 一 版 开本：720×1000 1/16

2014 年 1 月第一次印刷 印张：9 1/2

字数：200 000

定价：48.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换<源海>)

《奇异摄动丛书》序言

科学家之所以受到世人的尊敬, 除了因为世人都享受到了科学发明的恩惠之外, 还因为人们为科学家追求真理的执着精神而感动. 而数学家又更为世人所折服, 能在如此深奥、复杂、抽象的数学天地里遨游的人着实难能可贵, 抽象的符号、公式、推理和运算已成了当今所有学科不可缺少的内核了, 人们在享受各种科学成果时, 同样也在享受内在的数学原理与演绎的恩泽. 奇异摄动理论与应用是数学和工程融合的一个奇葩, 它出人意料地涉足许多无法想象的奇观, 处理人们原来常常忽略却又无法预测的奇特. 于是其名字也另有一问, 为 “奇异摄动”(Singular Perturbation).

20 世纪 40 年代, 科学先驱钱伟长等已对奇异摄动作了许多研究, 并成功地应用于力学等方面. 20 世纪 50 年代后, 中国出现了一大批专攻奇异摄动理论和应用的学者, 如著名的学者郭永怀, 在空间技术方面作出了巨大贡献, 苏煜城教授留苏回国后开创我国奇异摄动问题的数值计算研究, 美国柯朗研究所、美籍华裔丁汝教授在 1980 年间奔波上海、西安、北京, 讲授奇异摄动理论及应用 ……1979 年, 钱伟长教授发起并组织在上海召开了 “全国第一次奇异摄动讨论会”.

可贵的是坚韧. 此后, 虽然起起伏伏, 但是开拓依旧. 2005 年 8 月在上海交通大学、华东师范大学、上海大学组织下, 我们又召开了 “全国奇异摄动学术研讨会”, 并且一发而不可止. 此后每年都召开全国性学术会议, 汇集国内各方学者研究讨论. 2010 年 6 月在中国数学会、上海市教委 E- 研究院和上海交通大学支持下, 在上海召开了世界上第一次 “奇异摄动理论及其应用国际学术大会”. 该领域国际权威人士 Robert O'Malley(华盛顿大学), John J H Miller(爱尔兰 Trinity 学院) 等都临会, 并作学术报告.

更可喜的是经过学者们的努力, 在 2007 年 10 月, 中国数学会批准成立中国数学会奇异摄动专业委员会, 学术研究与合作的旗帜终于在华夏大地飘起.

难得的是慧眼识英雄. 科学出版社王丽平同志敏锐地觉察到了奇异摄动方向的成就和作用, 将出版奇异摄动丛书一事提到了议事日程, 并立刻得到学者们的赞同. 于是, 本丛书中的各卷将陆续呈现于读者面前.

作序除了简要介绍一下来历之外, 更是想表达对近七十年来中国学者们在奇异摄动理论和应用方面所作出巨大贡献的敬意. 中国科技创新与攀登少不了基础理

论的支持, 更少不了坚持不懈精神的支撑.

但愿成功!

张伟江博士
中国数学会奇异摄动专业委员会理事长
2011 年 11 月

前　言

进入 21 世纪之后, 奇异摄动理论和方法已渗透到自然科学的各个领域, 成为求解非线性问题的重要近似方法, 而奇异摄动问题中的空间对照结构理论一直是该领域的热点问题之一. 空间对照结构这一概念最早是由前苏联著名数学家 A. Vasil'eva 和 B. Butuzov 在 20 世纪 90 年代初提出的. 它是指奇异摄动方程的退化系统存在多个孤立根, 并且解在这些不同孤立根之间产生跳跃而产生的复杂结构. 在自然科学研究的各个领域, 当我们处理带有小参数的奇异摄动问题时常常碰到空间对照结构和转点的困难. 目前我们仅认识到下面两种形式: 第一种是阶梯状空间对照结构, 它的存在性依赖于辅助系统的相空间存在异宿轨道; 第二种是脉冲状空间对照结构, 它的存在性依赖于辅助系统的相空间存在同宿轨道. 它们的一个共同特点就是在很短时间内解的结构会发生剧烈的变化. 空间对照结构解的存在性和转点附近解的渐近展开已成为近代奇异摄动理论中复杂动力学行为的重要源头之一. 目前, 对空间对照结构的研究仅停留在低维奇异摄动系统, 对高维奇异摄动系统或者 Tikhonov 系统研究还不多见, 因为这里面所涉及的高维相空间里同 (异) 宿环的存在性问题本身就很困难.

空间对照结构理论从 20 世纪 90 年代开始发展至今已获得了丰富的成果, 并已形成了一整套理论体系, 我们希望能将对这一理论感兴趣的读者从初学引到科研前沿.

本书的前身是作者在华东师范大学数学系多次讲授的 “奇异摄动问题中的空间对照结构理论” 讲义. 它包括了国内外有关研究资料和作者近几年的研究成果. 基本内容由浅到深, 通俗易懂, 而且也向读者介绍一些比较深入的内容, 展示该领域科研的前沿.

全书共分 4 章. 第 1 章主要介绍奇异摄动理论的基础知识, 为初学读者进入专题学习奠定基础; 后 3 章分别就奇异摄动常微分方程的阶梯状空间对照结构、奇异摄动常微分方程组的空间对照结构、奇异摄动抛物型方程中的转移型空间对照结构等内容作比较系统、深入的专题介绍.

在本书的编写过程中, 我的同事和研究生们提出了宝贵的意见. 其中林苏蓉和王爱峰仔细校对了书稿, 陆海波、武利猛以娴熟的技术打印了部分书稿, 胡绪超、周燕对全书的排版做了大量工作, 借此机会对他们一并表示感谢.

本书的出版得到了国家自然科学基金委员会专项科研基金的资助以及浙江师范大学李继彬教授的关心和帮助, 特致谢意.

本书可作为综合性大学、高等师范院校和工科院校有关专业的研究生教材, 也可供有关教师和科技工作者进行科研时参考.

由于时间以及作者水平有限, 书中的疏漏以及不足之处在所难免, 希望读者们批评与指正.

作 者

2012 年 7 月

目　　录

第 1 章　空间对照结构理论基础

1.1　奇异摄动理论的基本概念

奇异摄动理论最早是由前苏联数学家吉洪诺夫所创立的, 发展至今已七十余年. 在这期间由于解决实际问题的需要, 又发展出了各种各样的方法, 其中, Vasil'eva 的边界层函数法是本书所介绍的空间对照结构理论的基础.

考虑最简单的初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=f(y,t,\epsilon),\quad y(0,\epsilon)=y_0, \tag{1.1}$$

这里 ϵ 是正的小参数, 函数 $f(y,t,\epsilon)$ 足够光滑. 初值问题(1.1) 称为正则摄动问题, 在许多常微分方程教材中都有介绍.

如果在 (1.1) 中令 $\epsilon=0$, 就得到所谓的退化问题

$$\frac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}t}=f(\bar{y},t,0),\quad y(0)=y^0. \tag{1.2}$$

正则摄动一般具有下面性质: 假设初值问题 (1.1) 的解 $y(t,\epsilon)$ 和 (1.2) 的解 $\bar{y}(t)$ 在区间 $[0,T]$ 上有定义, T 是某个常数, 那么, 当 $\epsilon\to 0$ 时, 它们差的绝对值

$$|y(t,\epsilon)-\bar{y}(t)|\to 0$$

关于 t 在 $[0,T]$ 上一致成立. 这样, 在实际问题中就可以 “丢掉” 小项以得到近似解. 函数 $\bar{y}(t)$ 称为 $y(t,\epsilon)$ 的近似, 或者渐近近似. 通常对函数 $\bar{y}(t)$ 的研究总比对 $y(t,\epsilon)$ 要简单.

再看下面初值问题:

$$\epsilon\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=F(y,t),\quad y(0,\epsilon)=y^0. \tag{1.3}$$

虽然问题 (1.1) 和问题 (1.3) 同样含有小参数, 但属于不同的类型. 如果把 (1.3) 写成 (1.1) 的形式, 则小参数 ϵ 含在右端分母里. 当 $\epsilon\to 0$ 时, 方程右端就不满足连续性条件, 于是就会产生这样的问题: 在方程 (1.3) 中令 $\epsilon=0$ 时能否得到类似于问题 (1.1) 的近似解. 在方程 (1.3) 中令 $\epsilon=0$ 同样得到退化方程 (它已不是微分方程).

$$F(\bar{y},t)=0, \tag{1.4}$$

它可能有若干个解 $\bar{y}=\varphi_i(t)$, $i=1,2,\cdots$. 一般而言, 它们都不满足初值条件, 这就同正则摄动产生了本质差异: 即 $y(t,\epsilon)$ 和 $\bar{y}(t)$ 在 $t=0$ 是不相等的. 取方程 (1.4) 的一个解, 记为 $\bar{y}=\varphi(t)$, 并假设它在 $[0,T]$ 上是孤立的. 而方程 (1.4) 的其他解记为 $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ 等, 不妨认为 $\varphi_1(t)<\varphi(t)<\varphi_2(t)$. 初值 y^0 不同于 $\varphi(0)$, 也不妨认为 $y^0<\varphi(0)$ 或者 $y^0>\varphi(0)$.

再假设

$$F(y,t)\begin{cases} >0, & \varphi_1(t)<y<\varphi(t),\\ <0, & \varphi(t)<y<\varphi_2(t).\end{cases} \tag{1.5}$$

在向量场上不难发现, 从 $(0,y^0)$ 出发的积分曲线很快进入曲线 $y=\varphi(t)$ 的 η 邻域, 直到 $t=T$ 也不离开, 因为不管 η 取多么小, 只要取足够小的 ϵ, 积分曲线的切向量总是向着该邻域内部.

当 $\epsilon\to 0$ 时, 在 $0<t\leqslant T$ 上, 因为有 $y(t,\epsilon)\to\varphi(t)$, 所以 $\varphi(t)$ 在 $0<t\leqslant T$ 上可作为 $y(t,\epsilon)$ 的近似解. 这里重要的是满足条件 (1.5) 以及在 $\varphi_1(0)<y^0<\varphi_2(0)$. 但是极限转移式 $y(t,\epsilon)\to\varphi(t)$ 在 $0<t\leqslant T$ 上不是一致的, 因为在点 $t=0$ 不成立. 在初值 $t=0$ 的邻域内有一区域, 那里 $y(t,\epsilon)$ 完全不同于 $\varphi(t)$, 这个区域称为边界层.

由此可以得出结论: 在 $t_0\leqslant t\leqslant T$ 上, $\varphi(t)$ 是 $y(t,\epsilon)$ 的渐近近似, 其中无论 t_0 多么小, 但它不依赖于 ϵ.

为了得到 $y(t,\epsilon)$ 在整个区间 $[0,T]$ 上的渐近近似, 除了 $\varphi(t)$ 外, 在渐近近似中应增加表达式 $\tilde{y}(t,\epsilon)-\varphi(0)$, 其中 $\tilde{y}(t,\epsilon)$ 是由 (1.3) 右端令 $t=0$ 初值仍为 $y(0,\epsilon)=y^0$ 所构成新问题的解. 这样, 在边界层外, 当 $\epsilon\to 0$ 时 $\tilde{y}(t,\epsilon)\to\varphi(0)$. 表达式 $\bar{Y}(t,\epsilon)=\varphi(t)+\tilde{y}(t,\epsilon)-\varphi(0)$ 满足初值是 $y(t,\epsilon)$ 在 $[0,T]$ 上的一致有效渐近近似. 事实上, $|y(t,\epsilon)-\bar{Y}(t,\epsilon)|=|y(t,\epsilon)-\varphi(t)-\tilde{y}(t,\epsilon)+\varphi(0)|$ 在边界层外很小, 因为 $y(t,\epsilon)\to\varphi(t)$, $\tilde{y}(t,\epsilon)\to\varphi(0)$. 在边界层内它也很小, 因为 $\tilde{y}(t,\epsilon)$ 趋近于 $y(t,\epsilon)$, 而 $\varphi(t)$ 趋近于 $\varphi(0)$. 这里增量 $\tilde{y}(t,\epsilon)-\varphi(0)$ 称为边界函数.

上面的讨论并不严格, 我们的目的在于让读者对奇异摄动问题有个初步了解, 这些问题都将在本书中进行严格阐述.

考虑二阶微分方程边值问题

$$\begin{cases} \epsilon^2\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=F(y,t), \quad 0<t<1, & (1.6)\\ y(0,\epsilon)=y^0, \quad y(1,\epsilon)=y^1. & (1.7)\end{cases}$$

它的退化方程就是 (1.4), 设 (1.4) 有解 $y=\varphi(t)$. 一般而言, 该解不满足边值条件 (1.7), 所以无论在 $t=0$ 的邻域还是在 $t=1$ 的邻域都会产生边界层.

类似于对初值问题 (1.1) 的讨论, 对边值问题 (1.6), (1.7) 也应加若干条件, 这些条件在本书的正文中将详细论述.

如果退化方程 (1.4) 有两个根 $y=\varphi(t)$ 和 $y=\psi(t)$, 那么边值问题 (1.6), (1.7) 除了在 $t=0$ 和 $t=1$ 的邻域存在有边界层外, 还可能在某个内点 t_0 附近存在快速变化的区域, 在该区域上解从一个根 $\varphi(t)$ 的邻域快速转移到另一根 $\psi(t)$ 的邻域. 当然, 解的转移也可能是从 $\psi(t)$ 向 $\varphi(t)$ 相反的过程, 这个区域称为内部层, 具有这种内部层的解称为阶梯状空间对照结构.

除了阶梯状空间对照结构, 还可能有其他类型的空间对照结构, 如脉冲状空间对照结构: 存在区域内某点 t_0 的邻域, 只在该邻域之外解处处接近于 $\varphi(t)$, 即在点 t_0 迅速远离 $\varphi(t_0)$, 然后又迅速回到 $\varphi(t)$. 空间对照结构也可以产生于偏微分方程中, 例如下面给出的边值问题:

$$\begin{cases} \epsilon^2\Delta u=F(u,t,y), \ \ (t,y)\in D, \\ u\mid_{\partial D}=g(t,y). \end{cases} \tag{1.8}$$

如果退化方程 $F(u,t,y)=0$ 只有孤立根 $u=\varphi(t,y)$, 那么在给定条件下问题 (1.8) 存在解 $u(t,y,\epsilon)$, 当 $\epsilon\to 0$ 时, 在 D 内 $u(t,y,\epsilon)$ 趋近于 $\varphi(t,y)$, 而在边界 ∂D 的小邻域内会产生边界层. 如果退化方程有两个根 $\varphi(t,y)$ 和 $\psi(t,y)$, 那么可能存在下面类型的解: 对充分小的 ϵ, 在 D 的内部区域 Ω (并且 $\bar{\Omega}\subset D$) 上解 $u(t,y,\epsilon)$ 任意接近于 $\varphi(t,y)$, 而在 $D/\bar{\Omega}$ 上任意接近于 $\psi(t,y)$, 在 ∂D 的区域产生内部层. 在空间 (t,y,u) 里具有内部层的曲面 $u=u(t,y,\epsilon)$ 形如 "礼帽".

问题 (1.8) 同样可以存在脉冲解, 即在闭曲线 $\partial\bar{\Omega}$ 的某个邻域里, 解 $u(t,y,\epsilon)$ 迅速远离 $\varphi(t,y)$ 到某值, 又马上重新回到 $\varphi(t,y)$.

1.2 第一类边值问题

考虑二阶半线性奇异摄动方程

$$\begin{cases} \epsilon^2\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=F(y,t), \quad 0<t<1, & (1.9) \\ y(0,\epsilon)=y^0, \quad y(1,\epsilon)=y^1, & (1.10) \end{cases}$$

其中 $0<\epsilon\ll 1$. 假设退化方程 $F(y,t)=0$ 有解 $y=\varphi(t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$.

我们的目的是证明在一定条件下问题 (1.9), (1.10) 的解 $y(t,\epsilon)$ 存在, 并得到它的 n 阶渐近表达式 , 即构造函数 $Y_n(t,\epsilon)$ 满足不等式

$$|y(t,\epsilon)-Y_n(t,\epsilon)|<C\epsilon^{n+1}, \quad 0\leqslant t\leqslant 1, \tag{1.11}$$

这里 C 是不依赖于 ϵ 的常数, 但它依赖于 n. 当 ϵ 很小时, $Y_n(t,\epsilon)$ 是 (1.9),(1.10) 解 $y(t,\epsilon)$ 的很好近似, 然而求解 $Y_n(t,\epsilon)$ 比求 $y(t,\epsilon)$ 简单得多, 而 $y(t,\epsilon)$ 只是在某些特定的情况下才能求得.

给出下面的假设:

H 1.1 函数 $F(y,t)$ 在 $D=\{a<t<b, A<y<B\}$ 上无限次可微 $(a<0, b>1, y^i\in(A,B), i=0,1, \varphi(t)\in(A,B), 0\leqslant t\leqslant 1)$, 往下该条件可以削弱.

H 1.2 当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时, $F_y(\varphi(t),t)>0$.

其他条件将在讨论过程中给出, 下面将用边界层函数法来构造 $Y_n(t,\epsilon)$, 使得 $Y_n(t,\epsilon)$ 满足 (1.11). 该方法已在许多工作中有详细介绍.

往下为了讨论简单起见, 所有不依赖 ϵ 的常数, 除特殊情况外都记作 C, 常数 C 可能依赖于 n, 但这不重要, 因为我们只讨论有限项和, n 总是固定的整数.

这里被构造的形式渐近解为

$$y(t,\epsilon)=\bar{y}(t,\epsilon)+L(\tau_0,\epsilon)+R(\tau_1,\epsilon),$$

其中

$$\bar{y}(t,\epsilon)=\bar{y}_0(t)+\epsilon\bar{y}_1(t)+\cdots+\epsilon^k\bar{y}_k(t)+\cdots \tag{1.12}$$

为正则级数;

$$L(\tau_0,\epsilon)=L_0(\tau_0)+\epsilon L_1(\tau_0)+\cdots+\epsilon^k L_k(\tau_0)+\cdots \tag{1.13}$$

为左边界级数;

$$R(\tau_1,\epsilon)=R_0(\tau_1)+\epsilon R_1(\tau_1)+\cdots+\epsilon^k R_k(\tau_1)+\cdots \tag{1.14}$$

为右边界级数.

考虑到把正则级数 (1.12) 的 n 项和代入方程后误差为 $O(\epsilon^{n+1})$, 并且它不满足边值条件, 所以需要引进边界级数来纠正这一误差, 使得左边界级数加上正则项满足左边值条件, 但在离开左边界点 $t=0$ 时, 左边界级数迅速消失, 右边界级数在 $t=1$ 处也起着同样作用.

为了求出左边界级数 (1.13) 中的各项 $L_k(\tau_0)$, 需要把它与 (1.12) 的和用同一变量 $\tau_0=t/\epsilon$ 形式地代入方程

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau_0^2}[\bar{y}(\tau_0\epsilon,\epsilon)+L(\tau_0,\epsilon)]=F(\bar{y}(\tau_0\epsilon,\epsilon)+L(\tau_0,\epsilon),\tau_0\epsilon), \tag{1.15}$$

写成下面形式:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau_0^2}L(\tau_0,\epsilon)=F(\bar{y}(\tau_0\epsilon,\epsilon)+L(\tau_0,\epsilon),\tau_0\epsilon)-F(\bar{y}(\tau_0\epsilon,\epsilon),\tau_0\epsilon).$$

在比较 ϵ 同次幂之后就可以得到确定 $L_k(\tau_0)$ 的微分方程, 零次近似 $L_0(\tau_0)$ 由下面的方程确定:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau_0^2}L_0 = F(\bar{y}_0(0)+L_0,0)-F(\bar{y}_0,0)=F(\bar{y}_0(0)+L_0,0). \tag{1.16}$$

因为 L_k 都是由微分方程确定, 求解微分方程还需要初边值条件, 因此需要把 $\bar{y}(\tau_0\epsilon,\epsilon)+L(\tau_0,\epsilon)$ 代入 (1.10) 中令 $t=0$, 比较 ϵ 同次幂后有

$$\bar{y}_0(0)+L_0(0)=y^0,\quad L_k(0)=-\bar{y}_k(0),\quad k\geqslant 1. \tag{1.17}$$

等式 (1.17) 只给出了一个条件, 另一个条件必须根据 L_k 的性态给出, 即

$$L_k(\infty)=0,\quad k=0,1,\cdots. \tag{1.18}$$

引进新变量 $\tilde{y}=\bar{y}_0(0)+L_0$, 则 (1.16)~(1.18) 可写成

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2\tilde{y}}{\mathrm{d}\tau^2}=F(\tilde{y},0),\\ \tilde{y}(0)=y^0,\quad \tilde{y}(\infty)=\bar{y}_0(0).\end{cases} \tag{1.19}$$

对 (1.19) 中的方程进行积分, 可得首次积分

$$\frac{1}{2}\tilde{z}^2=\int_{\bar{y}_0(0)}^{\tilde{y}}F(y,0)\mathrm{d}y+C. \tag{1.20}$$

在相平面 $(\tilde{y},\tilde{z})$ 上, 由条件 H1.2 可知 $M(\bar{y}_0(0),0)$ 是鞍点. 在鞍点处两条分界轨道的斜率是

$$\left(\frac{\mathrm{d}\tilde{z}}{\mathrm{d}\tilde{y}}\right)_1=[2F_y(\bar{y}_0(0),0)]^{\frac{1}{2}},\quad \left(\frac{\mathrm{d}\tilde{z}}{\mathrm{d}\tilde{y}}\right)_2=-[2F_y(\bar{y}_0(0),0)]^{\frac{1}{2}}.$$

不妨认为斜率为 $\left(\dfrac{\mathrm{d}\tilde{z}}{\mathrm{d}\tilde{y}}\right)_2$ 的分界轨道当 $\tau\to+\infty$ 时进入鞍点, 为了使边值问题 (1.19) 有解必须给出下面条件:

H 1.3 假设在 (1.19) 的相平面 $(\tilde{y},\tilde{z})$ 上, 直线 $\tilde{y}=y^0$ 与当 $\tau\to+\infty$ 时进入鞍点 $M(\bar{y}_0(0),0)$ 的分界线相交.

H 1.4 假设当 $y^0\leqslant y\leqslant\bar{y}_0(0)$ 时, $\displaystyle\int_{\bar{y}_0(0)}^{\tilde{y}}F(y,0)\mathrm{d}y>0$.

当然, 也可能出现分界线不与垂线相交或多次相交的情况. 如果不相交, 则 (1.19) 无解; 如果交于多个点, 则至少有两个解.

在 (1.16) 中, 令 $C=0$, 取正半支可得关于 $\tilde{y}$ 的一阶方程

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{y}}{\mathrm{d}\tau_0}=\left[2\int_{\bar{y}_0(0)}^{\tilde{y}}F(y,0)\mathrm{d}y\right]^{\frac{1}{2}},\quad y^0\leqslant\tilde{y}\leqslant\bar{y}_0(0), \tag{1.21}$$

为确定起见, 不妨设 $y^0 < \bar{y}_0(0)$.

从方程 (1.21) 和初值 $\tilde{y}(0) = y^0$ 可以确定 $\tilde{y}(\tau_0)$, 然后就可以求得 $L_0(\tau_0) = \tilde{y}(\tau_0) - \bar{y}_0(0)$. 完全类似地可求得 $R_0(\tau_1)$.

注释 1.1 如果 $y^0 > \bar{y}_0(0)$, 只要对所说的作相应的变形即可.

我们把在 $t = 1$ 处求 $R_0(\tau_1)$ 所需满足的条件记为 H1.3′, H1.4′ 它们类似于条件 H1.3, H1.4.

往下将给出 L_0 的一个重要估计式, 从 (1.21) 可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}L_0}{\mathrm{d}\tau_0} &= [(F_y(\bar{y}_0(0),0) + \theta L_0)(\tilde{y} - \bar{y}_0(0))^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= -(F_y(\bar{y}(0),0) + \theta L_0)^{\frac{1}{2}} L_0, \quad 0 < \theta < 1. \end{aligned} \tag{1.22}$$

当 $\tau > \tau^*$ 时, L_0 可很小, 从 (1.22) 可得

$$|L_0(\tau)| < |L_0(\tau^*)| \mathrm{e}^{-(F_y(\bar{y}(0),0)+\theta L_0)^{\frac{1}{2}}(\tau-\tau^*)}.$$

因为从 0 到 τ^* 时函数 L_0 有界, 所以

$$|L_0(\tau)| < C\mathrm{e}^{-\kappa_0(\tau-\tau^*)} < \overline{\overline{C}}\mathrm{e}^{-\kappa_0\tau}, \tag{1.23}$$

其中 $0 < \kappa_0 < F_y(\bar{y}_0(0), 0)$.

同样也可以得到下界估计式:

$$|L_0(\tau)| > \underline{\underline{C}}\mathrm{e}^{-\kappa_0\tau}. \tag{1.24}$$

这是因为, 当 $0 \leqslant \tau_0 \leqslant \tau^*$ 时, $\tilde{y} \neq \overline{y}_0(0)$, 即 $L_0(\tau_0) \neq 0$.

把 (1.23) 和 (1.24) 合在一起可写成

$$\overline{\overline{C}}\mathrm{e}^{-\kappa_0\tau} < L_0(\tau) < \underline{\underline{C}}\mathrm{e}^{-\kappa_0\tau}.$$

函数 $L_1(\tau)$ 满足下面问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2} L_1 = \tilde{F}_y L_1 + \Delta F_y \bar{y}_0'(0)\tau + \Delta F_t \tau, \\ L_1(0) = -\bar{y}_1(0) = 0, \quad L_1(\infty) = 0, \end{cases} \tag{1.25}$$

其中 $\tilde{F}$ 表示在 $(\bar{y}_0(0) + L_0, 0)$ 的取值. 记

$$h_1(\tau) = (\tilde{F}_y - \bar{F}_y)\bar{y_0}'(0)\tau + (\tilde{F}_t - \bar{F}_t)\tau = \tilde{F}_y\bar{y_0}'(0)\tau + \tilde{F}_t\tau,$$

这里 $h_1(\tau)$ 有两种表示法, 因为从 $F(\bar{y_0}(t), t) \equiv 0$ 可导可得

$$F_y(\bar{y_0}(t), t)\bar{y_0}'(t) + F_t(\bar{y_0}(t), t) = 0,$$

在不同的场合可取不同的形式.

考虑到

$$\max\{|\tilde{F}_y-\bar{F}_y|,|\tilde{F}_t-\bar{F}_t|\}<CL_0$$

和估计式 (1.23), 可得

$$|h_1(\tau)|<C\mathrm{e}^{-\kappa_1\tau},\quad \kappa_1<\kappa_0. \tag{1.26}$$

这里用到了 $\tau\mathrm{e}^{-\kappa_0\tau}=\tau\mathrm{e}^{-(\kappa_0-\delta)\tau}\mathrm{e}^{-\delta\tau}=C\mathrm{e}^{-\kappa_1\tau}$, 其中 $\kappa_1=\kappa_0-\delta$, 且 δ 很小又不依赖于 ϵ.

线性边值问题 (1.25) 的解可表示成下面形式:

$$L_1(\tau)=L_1(0)\frac{\phi(\tau)}{\phi(0)}+\phi(\tau)\int_0^\tau\phi^{-2}(\eta)\int_\infty^\eta\phi(\sigma)h_1(\sigma)\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\eta, \tag{1.27}$$

其中 $\phi(\tau)=\dfrac{\mathrm{d}\tilde{y}}{\mathrm{d}\tau}=\dfrac{\mathrm{d}L_0}{\mathrm{d}\tau}$.

从 (1.22), (1.23) 可得对 $\phi(\tau)$ 的估计

$$|\phi|=\left|\frac{\mathrm{d}L_0}{\mathrm{d}\tau}\right|<C|L_0|<\underline{\underline{C}}\mathrm{e}^{-\kappa_0\tau}$$

和

$$|\phi|>\overline{\overline{C}}\mathrm{e}^{-\kappa_0\tau}.$$

进而从 (1.27) 很容易得到对 L_1 的估计

$$|L_1|<C\mathrm{e}^{-\kappa_1\tau},\quad \kappa_1<\kappa_0.$$

显然, 对 $L_1(\tau)$ 的估计比 $L_0(\tau)$ 要差.

对任意阶边界层项 $L_n(\tau)$ 有下面结论.

引理 1.1 展开式 (1.13) 中的边界层函数有下面的估计:

$$|L_n(\tau)|<C\mathrm{e}^{-\kappa_n\tau},\quad \kappa_n<\kappa_{n-1}.$$

证明 往下用数学归纳法进行证明. 当 $n=0,1$ 时已经证明了, 倘若当 $k=0,1,\cdots,n-1$ 时, L_k 具有指数衰减.

先来看确定 L_n 方程右端的结构, 它是比较 ϵ^n 后得到的. 把 $\bar{y}(\tau\epsilon,\epsilon)$ 展开成 ϵ 幂级数

$$\bar{y}(\tau\epsilon,\epsilon)=\bar{y_0}(0)+\bar{y_0}'(0)\epsilon\tau+\cdots=M_0+\cdots+\epsilon^kM_k+\cdots,$$

其中 M_k 是 τ 的 k 次多项式, 且具有估计式

$$|M_k|<C(1+\tau+\cdots+\tau^k).$$

再看

$$\bar{y}(\tau\epsilon,\epsilon)+L_0=M_0+L_0+\epsilon M_1+\cdots+\epsilon^k M_k=\bar{M}_0+\epsilon M_1+\cdots$$

和

$$\bar{y}(\tau\epsilon,\epsilon)+\theta L_0=M_0+\theta L_0+\epsilon M_1+\cdots+\epsilon^k M_k=\bar{M}_0+\epsilon M_1+\cdots,\quad 0\leqslant\theta\leqslant 1.$$

由此可见, $F(\bar{y}(\tau\epsilon,\epsilon)+L_0,\tau\epsilon), F(\bar{y}(\tau\epsilon,\epsilon)+\theta L_0,\tau\epsilon)$ 以及任意阶导数 $F_y^{(k)}(\bar{y}+L_0,\tau\epsilon)$, $F_y^{(k)}(\bar{y}+\theta L_0,\tau\epsilon)$ 关于 ϵ 的展开式中系数 P_k 具有和 M_k 相同的估计式.

把方程 (1.15) 的右端表示成下面形式:

$$\begin{aligned}\Delta F=&F(\bar{y}(\tau\epsilon,\epsilon)+L(\tau,\epsilon),\tau\epsilon)-F(\bar{y}(\tau\epsilon,\epsilon),\tau\epsilon)\\=&F(\bar{y}(\tau\epsilon,\epsilon)+L_0,\tau\epsilon)-F(\bar{y}(\tau\epsilon,\epsilon),\tau\epsilon)\\&+F_y'(\bar{y}(\tau\epsilon,\epsilon)+L_0,\tau\epsilon)(\epsilon L_1+\cdots+\epsilon^k L_k+\cdots)+\cdots\\&+\frac{1}{n!}F_y^{(n)}(\bar{y}(\tau\epsilon,\epsilon)+L_0,\tau\epsilon)(\epsilon L_1+\cdots+\epsilon^k L_k)^n+\cdots.\end{aligned}\tag{1.28}$$

从该表达式中可见含有 L_n 的项就是 $\tilde{F}_y L_n$, 而余项依赖于 L_k $(k<n)$, 即

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}L_n=\tilde{F}_y L_n+h_n(L_0,\cdots,L_{n-1},\tau).$$

由 (1.17), (1.18) 可得边值为

$$L_n(0)=-\bar{y}_n(0),\quad L_n(\infty)=0.$$

根据展开式 (1.28) 可知, 从一次项 $(F_y'(\bar{y}(\tau\varepsilon,\varepsilon)+L_0,\tau\varepsilon)(\varepsilon L_1+\cdots+\varepsilon^k L_k+\cdots)$ 开始, h_n 是 $L_i^\alpha L_k^\beta P_l$ 类型的乘积和, 其中 $i\alpha+k\beta+l=n$, 并且每一项和都有估计式

$$C(1+\tau+\cdots+\tau^l)\mathrm{e}^{-\alpha\kappa_i\tau}\mathrm{e}^{-\beta\kappa_k\tau}<C\mathrm{e}^{-\gamma\tau}.$$

至于 (1.28) 中的零次项可写成

$$(\Delta F)_0=F(\bar{y}(\tau\epsilon,\epsilon)+L_0,\tau\epsilon)-F(\bar{y}(\tau\epsilon,\epsilon),\tau\epsilon)=F_y(\bar{y}(\tau\epsilon,\epsilon)+\theta L_0,\tau\epsilon)L_0,$$

所以 $(\Delta F)_0$ 展开式中 ϵ^n 前系数有估计

$$C(1+\tau+\cdots+\tau^n)|L_0|<C(1+\tau+\cdots+\tau^n)\mathrm{e}^{-\gamma_0\tau},\quad \gamma_0<\kappa_0.$$

记 $\kappa_n=\min\{\gamma,\gamma_0\}$, 有估计式

$$|h_n|<C\mathrm{e}^{-\kappa_n\tau}.\tag{1.29}$$