新學制

混合算學教科書

第六册

初級中學用

編輯者 段育華

校閱者 胡明復

商務印書館印行

新學制

混合算學教科書

第六冊

初級中學用

編輯者 段育華

校閱者 胡明復

商務印書館發行

初級中學教科書

算學

編輯大意

一這部書完全是按照新學制同新學制課程綱要編輯出來的. 全書共有六册,每學期一册,適合初級中學三年每星期五小時之用.

一根據初中課程綱要所規定,採用混合方法,全書用代數幾何爲主,算術三角爲輔,合一爐而冶,不拘門類,循着數理自然的秩序,編法特出心裁,和一切舊本,迥然不同.

一象數通名,在西文是 *Mathematics*; 從前沿用日本名詞,叫做"数學"; 現在照新學制課程會議改正了,叫做"算學".

一全書共插有古今疇人肖像三十幅,并附載小傳,藉此引起學生崇拜學者的觀念,立高尙的志向,同時也可知道些算學發達的歷史.

一這册書是全書的第六册，就是最後一册．在前面的第五册已經把幾何完全授畢，所以這册只有代數和三角，結束全書． 篇末附有總溫習一章，將全書分做：算術，求積，幾何，代數，三角，五大部，使學生於混合之餘，仍得略知分科的系統．

一這書純用白話講解，並加新式標點，使學生沒有文學上的糾紛，才有學算的興趣．

一歐美出版普通算學教科書，爲了便於初學閱讀起見，往往不令一句文字，或一套算式，分跨在兩頁上面． 這部書也不避麻煩，仿照這法編輯．

一這書對於名詞初見的地方，附註西文，可爲學生將來研究西書的幫助．

編者識

民國十五年一月

李善蘭的小傳 (清道光—光緒)

李善蘭，字壬叔，浙江海寧人. 十歲的時候，在家裏讀書，偶然在書架上，翻到一部九章算術稍一閱讀，就說"這個可以不學都會的"，從此就歡喜算學. 到處搜集高深的算書，不多時便把九章學，天元學，四元學，等書都已看懂了.

十五歲讀前明徐光啟所譯的幾何原本嘗恨徐光啟沒有譯後七卷. 因為歐几里得的幾何原本原來有十三卷，徐光啟只譯了前六卷. 後來到豐咸二年時，李善蘭乃與英人，偉烈亞力續譯歐几里得的幾何原本的後七卷，並附錄二卷，為九卷，合前徐光啟之六卷，總計十五卷.

古時的天元四元，就是今日的代數，天元四元別以位次，代數別以記號，法雖不同，理都是一樣的. 李善蘭既精四元，又精代數. 曾與偉烈亞力譯棣麼甘的代數學，後更進一步，譯代微積拾級，重學及曲線說等書. 中國自此以後，才有代數及微積等學問. 同治六年，京師設同文館，特聘李善蘭為總教授. 官做到三品卿戶部郎中.

李善蘭不但譯書很多，自著的書亦不少. 他的研究與發現，都在他所著的一部則古昔齋算學書裏. 李善蘭不但算學為當時第一，并且對於中國文學也曾經致力研究，不過最愛的是算學.

李善蘭的肖像

初級中學算學教科書

第六册目次

算學家的肖像同小傳

算學

第六册

第一章 三角函數

Trigonometric Functions

(1)角度與長度 量的最緊要的,當然要算長度,你看我們找面積體積,都是從長度去推算;因爲長度有可以直接量得的便利.

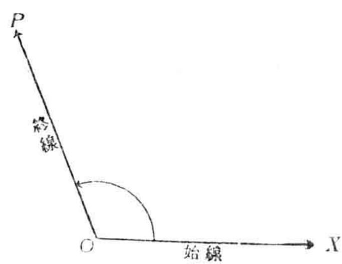
但是量長度還要身至其地,才能辦到,至於隔岸量山高,登臺測艦遠,那就只好束手. 雖然這裏我們還有一種量可量,就是角度. 從角度可以推算長度. 量角度要比量長度便當得多,不必身至其地,只要能看得見的,一概可量. 若是太遠,看不清爽,再加上望遠鏡的幫助,便是天上的星斗,也不難很準確的量了出來! 角度的用處,眞是大呀!

(2)**半條直線** *Half Line* 一條直線,看他有沒有端點,可分三種如下:——

一種有限的直線,兩端有兩個端點,這個叫線段. 如果兩端都伸長到無限遠,那就兩端都沒有端點,叫做完全直線,或單說一條直線.還有一種,一端有端點,他端伸到無限遠,沒有端點,這個只好叫他做半條直線.

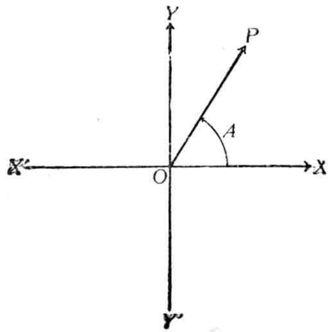
(3)**角的發生** 一隻角的發生,可算是半條直線,繞着他唯一的端點旋轉得來的結果.

譬如有 OX 半條直線,O 是他的唯一端點. 使他繞着 O 點旋轉,好比鐘錶上的指針倒退的樣子.當他轉到了 OP 的位置時,同原來位置就造成 $\angle XOP$ 角. 這個原來的位置線,稱爲這角的始線 *Initial Line*;那動線所停止的位置線,稱爲這角的終線 *Terminal Line*.



(圖 一)

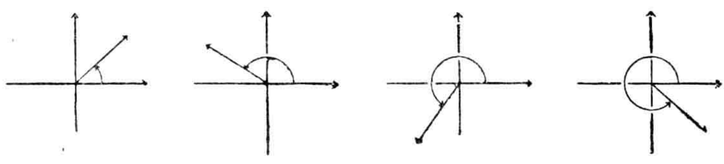
(4) **角與坐標系** 要明瞭一隻角逐漸漲大的情形,最好把他擺在一個縱橫正交的坐標系裏來討論.



(圖 二)

如圖 $X'X, Y'Y$ 爲正交坐標系. 認原點做角的頂點, OX 做這角的始線.

設有一條動線從 OX 位置出發,繞着 O 點,依反鐘向旋轉. 假如停在 OP 的地方,就成 $\angle A$ 角,如圖二. 如果還要繼續進行,便可發生種種大小的角,如圖三.

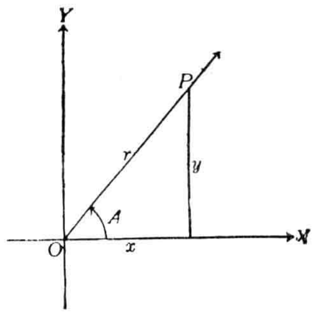


(圖 三)

所以角的大小, 全看這動線旋轉的分量: 旋轉分量小,角就小,旋轉分量大,角也大.

(5) 三角函數的定義 量角比量長度便當,要想從角度去推算長度,當然非設法先找出線段與角的關係不可,找法如下:——

在一隻角的轉動線上,隨便取一點如圖 P 點. 設 P 到 O 的距離爲 r. 這線段 r 同 P 點的兩個坐標 x, y 共造成一個直角三角形. 這直角三角形三邊的長短,雖然要看 P 點在動線上的位置來定,但是這三線段互相對待的比,卻與 P 的位置無關,完全看 $\angle A$ 角的大小來變換. 所以從這些線段比就可以決定這角的大小,於是有定義:



(圖 四)

(一) $\frac{\text{縱坐標}\,y}{\text{距離}\,r}$ 的比稱爲 $\angle A$ 的正弦 *Sine*,

(二) $\frac{\text{橫坐標}\,x}{\text{距離}\,r}$ 的比稱爲 $\angle A$ 的餘弦 *Cosine*,

(三) $\frac{\text{縱坐標}\,y}{\text{橫坐標}\,x}$ 的比稱爲 $\angle A$ 的正切 *Tangent*,

(四) $\frac{\text{橫坐標}\,x}{\text{縱坐標}\,y}$ 的比稱爲 $\angle A$ 的餘切 *Cotangent*.

1. 正弦寫做　　$\sin A = \frac{y}{r}$

2. 餘弦寫做　　$\cos A = \frac{x}{r}$

3. 正切寫做　　$\tan A = \frac{y}{x}$

4. 餘切寫做　　$\cot A = \frac{x}{y}$

(注意)　從上面的定義,一望便知正餘切互為倒數如:——　　$\cot A = \frac{1}{\tan A}$

所以有了正切,差不多餘切就用不着了;因為可以正切的倒數來代替.

(6) **正割,餘割**　在 x, y, r 三個線段裏,任取兩個成比,應當有六個比,所以除上面正餘弦切之外,還有兩個函數,定義如下:——

(五) $\frac{r}{x}$ 稱為 $\angle A$ 的正割 *Secant*,　寫做 $\sec A = \frac{r}{x}$

(六) $\frac{r}{y}$ 稱為 $\angle A$ 的餘割 *Cosecant*,寫做 $\csc A = \frac{r}{y}$

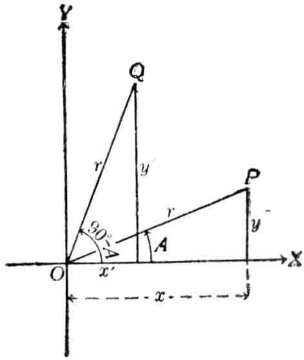
這兩個函數的用處比較的很少,所以我們平常都不去理會他.　而且依定義,一望便知他是正餘弦的倒數如:——

$$\sec A = \frac{1}{\cos A} \qquad \csc A = \frac{1}{\sin A}$$

所以有了正餘弦也就用不着他們了.

(7)餘角的函數公式　兩角湊成 $90°$, 這兩角就互稱為餘角。

假如有銳角 $\angle A$, 他的餘角可寫做 $90°-A$. 把這兩角都擺在同一坐標系裏, 如圖五.



(圖 五)

設令　　$OP=OQ=r$

那麼　　$\triangle xyr \cong \triangle y'x'r$

就有　　$x=y' \quad y=x'$

於是依三角函數的定義,就得下面的等式:——

$$\sin(90°-A)=\frac{y'}{r}=\frac{x}{r}=\cos A$$

$$\cos(90°-A)=\frac{x'}{r}=\frac{y}{r}=\sin A$$

$$\tan(90°-A)=\frac{y'}{x'}=\frac{x}{y}=\cot A$$

$$\cot(90°-A)=\frac{x'}{y'}=\frac{y}{x}=\tan A$$

$$\therefore \text{餘角函數公式}\begin{cases}\sin(90°-A)=\cos A\\ \cos(90°-A)=\sin A\\ \tan(90°-A)=\cot A\\ \cot(90°-A)=\tan A\end{cases}$$

這套公式極容易記得，把他用話來講一下，便知道:——"一隻角的正函數，就是他的餘角的餘函數 *Co-functions*；一隻角的餘函數，就是他的正角的正函數——換句話說：兩角互為正餘，函數也互為正餘."

練習一

1. 已知 $\sin 35°40'=0.5831$，問 $\cos 54°20'=?$

2. 已知 $\cot 78°12'=0.2089$，問 $\tan 11°48''=?$

3. 已知 10°,20°,30°,40°,50°,60°,70°,80° 的 *sin* 同 *tan*，求 10°,20°,30°,40°,50°,60°,70°,80° 的 *cos* 同 *cot*.

4. 已知 $\tan 30°=\frac{1}{3}\sqrt{3}$，求 $\cot 60°$ 同 $\tan 60°$,

5. 若 $\sin x=\cos 4x$, $x=?$

6. 若 $\tan 8x=\cot x$, $x=?$

7. 若 $\cos x=\sin\left(45-\frac{x}{2}\right)$, $x=?$

8. 若 $\cot x=\tan(45+x)$, $x=?$

(8)三角函數表 一角的各函數，有一定的數值，設法把他都找出來，開列成表，叫三角函數表，翻過下面來看便是.