

新學制
混合算學教科書
第六冊
初級中學用

編輯者 段育華

校閱者 胡明復

商務印書館印行

新 學 制

混合算學教科書

第 六 冊

初 級 中 學 用

編 輯 者 段 育 華

校 閱 者 胡 明 復

商 務 印 書 館 發 行

初 級 中 學 教 科 書

算 學

編 輯 大 意

一這部書完全是按照新學制同新學制課程綱要編輯出來的。全書共有六冊，每學期一冊，適合初級中學三年每星期五小時之用。

一根據初中課程綱要所規定，採用混合方法，全書用代數幾何為主，算術三角為輔，合一爐而冶，不拘門類，循着數理自然的秩序，編法特出心裁，和一切舊本，迥然不同。

一象數通名，在西文是 *Mathematics*；從前沿用日本名詞，叫做“數學”；現在照新學制課程會議改正了，叫做“算學”。

一全書共插有古今疇人肖像三十幅，并附載小傳，藉此引起學生崇拜學者的觀念，立高尚的志向，同時也可知道些算學發達的歷史。

一這冊書是全書的第六冊，就是最後一冊。在前面的第五冊已經把幾何完全授畢，所以這冊只有代數和三角，結束全書。篇末附有總溫習一章，將全書分做：算術，求積，幾何，代數，三角，五大部，使學生於混合之餘，仍得略知分科的系統。

一這書純用白話講解，並加新式標點，使學生沒有文學上的糾紛，才有學算的興趣。

一歐美出版普通算學教科書，爲了便於初學閱讀起見，往往不令一句文字，或一套算式，分跨在兩頁上面。這部書也不避麻煩，仿照這法編輯。

一這書對於名詞初見的地方，附註西文，可爲學生將來研究西書的幫助。

編者識

民國十五年一月

李善蘭的小傳 (清道光—光緒)

李善蘭，字壬叔，浙江海寧人。十歲的時候，在家裏讀書，偶然在書架上，翻到一部九章算術稍一閱讀，就說“這個可以不學都會的”，從此就歡喜算學。到處搜集高深的算書，不多時便把九章學，天元學，四元學，等書都已看懂了。

十五歲讀前明徐光啟所譯的幾何原本嘗恨徐光啟沒有譯後七卷。因為歐几里得的幾何原本原來有十三卷，徐光啟只譯了前六卷。後來到豐咸二年時，李善蘭乃與英人，偉烈亞力續譯歐几里得的幾何原本的後七卷，並附錄二卷，爲九卷，合前徐光啟之六卷，總計十五卷。

古時的天元四元，就是今日的代數，天元四元別以位次，代數別以記號，法雖不同，理都是一樣的。李善蘭既精四元，又精代數。曾與偉烈亞力譯棣摩甘的代數學，後更進一步，譯代微積拾級，重學及曲線說等書。中國自此以後，才有代數及微積等學問。同治六年，京師設同文館，特聘李善蘭爲總教授。官做到三品卿戶部郎中。

李善蘭不但譯書很多，自著的書亦不少。他的研究與發現，都在他所著的一部則古昔齋算學書裏。李善蘭不但算學爲當時第一，並且對於中國文學也曾經致力研究，不過最愛的是算學。



李善蘭 的 省 像

初級中學算學教科書

第六冊目次

第一章 三角函數.....1—28

Trigonometric Functions

(1) 角度與長度, (2) 半條直線, (3) 角的發生, (4) 角與坐標系, (5) 三角函數的定義, (6) 正割, 餘割, (7) 餘角的函數公式, (8) 三角函數表, (9) 三角函數表的說明, (10) 三角函數表的檢查法, (11) 有角度找正函數, (12) 有角度找餘函數, (13) 有函數找角度, (14) 角度帶有分秒的檢表法, (15) 鈍角函數的正負號, (16) 特別角的三角函數, (17) 補角的函數公式, (18) 同角函數的基本關係。

第二章 三角形三大定律.....29—50

Three Laws of a Triangle

(1) 三角形邊角的關係, (2) 正弦求積公式, (3) 正弦定律, (4) 三角形外接圓徑, (5) 畢達哥拉定理的推廣, (6) 餘弦定律, (7) 餘弦定律的特別, (8) 三斜求積公式, (9) 三角形內接圓徑, (10) 半角正切公式, (11) 正切定律。

第三章 三角形解法……………51—82

Solution of a Triangle

(1) 三角形在幾何學上的位置, (2) 三角學, (3) 三角形裏的幾何量, (4) 三角形的解法, (5) 三角形解法的分類, (6) 解三角形所根據的定律, (7) 第一類: 已知一邊與任兩角的解法, (8) 第二類: 已知兩邊與一非夾角的解法, (9) 平方根表檢查法, (10) 第三類: 已知二邊與一夾角的解法, (11) 第四類: 已知三邊的解法, (12) 決定三角形的條件, (13) 解三角形的應用, (14) 三角學在幾何上的應用, (15) 三角學在物理上的應用, (16) 三角學在測量上的應用.

第四章 二次方程及其圖形……………83—106

Quadratic Equation and Its Graph

(1) 二次方程通式, (2) 二次方程都有兩根, (3) 根與係數的關係, (4) 二次方程的製造法, (5) 虛數, (6) 二次方程兩根的虛數, (7) 二次方程與軌迹, (8) 拋物線的位置與對稱軸, (9) 拋物線頂點的坐標, (10) 作二次函數軌迹的簡法, (11) 二次方程兩根與軌迹的關係, (12) 用交軌解二次方程, (13) 用圓規解二次方程.

第五章 分指數與負指數……………107—126

Fractional and Negative Exponents

(1) 冪的定義, (2) 根的定義, (3) 根與冪的關係, (4) 指數

三大定律, (5)指數定律的討論, (6)分指數的意義, (7)零指數的意義, (8)負指數的意義, (9)分指數負指數零指數的定義, (10)指數加法定律的推廣, (11)同底冪或根的積, (12)同底冪或根的商, (13)指數乘法定律的推廣, (14)冪或根的冪或根, (15)指數分配定律的推廣, (16)異底冪或根的積, (17)異底冪或根的商, (18)根式化簡.

第六章 對數與複利息.....127—160

Logarithm and Compound Interest

(1)對數的發現, (2)指數表, (3)帶有小數的指數, (4)指數函數的圖形, (5)對數的定義, (6)對數的特性, (7)常用對數, (8)對數函數的圖形, (9)對數表, (10)對數表檢查法, (11)對數的用法, (12)對數三大定律, (13)對數有恰是整數的, (14)定位部與定值部, (15)找任何數的對數的規則, (16)用對數求算術式的數值, (17)指數方程, (18)複利息.

第七章 三角形對數解法.....161—188

Logarithmic Solution of a Triangle

(1)用對數解三角形, (2)三角函數的對數表, (3)三角對數表的檢查法, (4)有角度要找三角函數的對數, (5)有三角函數的對數要找角度, (6)用對數解三角形, (7)第一類:已知一邊與任兩角的解法, (8)第二類:已知二邊與一非夾角的解法, (9)第三類:已知二邊與一夾角的解法, (10)第四類:已知三邊的解法, (11)應用問題.

第八章 全書的總溫習.....189—204

Recapitulation of the Whole Course

(1) 提要與溫習, (2) 質因數檢驗法, (3) 約數原則, (4) 分數原則, (5) 比例判定法, (6) 應用公式, (7) 級數公式, (8) 平面形的面積, (9) 立體的表面積, (10) 立體的容積, (11) 公理公法, (12) 直線形定理, (13) 圖形定理, (14) 代數基本四法, (15) 乘積與因子公式, (16) 變與比例, (17) 方程, (18) 指數, (19) 對數, (20) 三角函數基本關係, (21) 餘角補角公式, (22) 特別角函數, (23) 三角形邊角關係。

算學家的肖像同小傳

1. 李善蘭.....1 章前
2. 尤拉 *Euler*2 章前
3. 拉果蘭諸 *Le-grange*4 章前
4. 訥白爾 *Napier*6 章前
5. 拉普拉斯 *Le-place*8 章前

初級中學教科書

算 學

第六冊

第一章 三角函數

Trigonometric Functions

(1) **角度與長度** 量的最緊要的，當然要算長度，你看我們找面積體積，都是從長度去推算；因為長度有可以直接量得的便利。

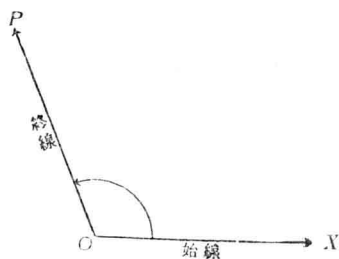
但是量長度還要身至其地，才能辦到，至於隔岸量山高，登臺測艦遠，那就只好束手。雖然這裏我們還有一種量可量，就是角度。從角度可以推算長度。量角度要比量長度便當得多，不必身至其地，只要能看得見的，一概可量。若是太遠，看不清爽，再加上望遠鏡的幫助，便是天上的星斗，也不難很準確的量了出來！角度的用處，真是大呀！

(2) **半條直線** Half Line 一條直線,看他有沒有端點,可分三種如下:——

一種有限的直線,兩端有兩個端點,這個叫線段。如果兩端都伸長到無限遠,那就兩端都沒有端點,叫做完全直線,或單說一條直線。還有一種,一端有端點,他端伸到無限遠,沒有端點,這個只好叫他做半條直線。

(3) **角的發生** 一隻角的發生,可算是半條直線,繞着他唯一的端點旋轉得來的結果。

譬如有 OX 半條直線, O 是他的唯一端點。使他繞着 O 點旋轉,好比鐘錶上的指針倒退的樣子。當他轉到了 OP 的位置時,同原來位置就造成

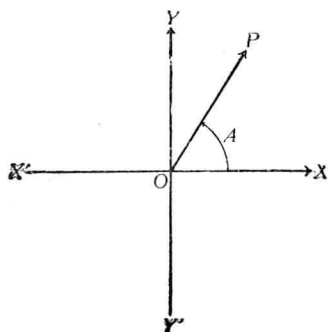


(圖一)

$\angle XOP$ 角。這個原來的位置線,稱為這角的始線 *Initial Line*; 那動線所停止的位置線,稱為這角的終線 *Terminal Line*。

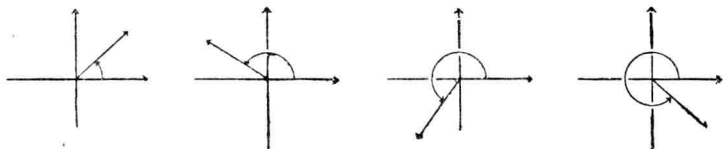
(4) **角與坐標系** 要明瞭一隻角逐漸漲大的情形，最好把他擺在一個縱橫正交的坐標系裏來討論。

如圖 $X'X, Y'Y$ 爲正交坐標系。認原點做角的頂點， OX 做這角的始線。



(圖二)

設有一條動線從 OX 位置出發，繞着 O 點，依反鐘向旋轉。假如停在 OP 的地方，就成 $\angle A$ 角，如圖二。如果還要繼續進行，便可發生種種大小的角，如圖三。

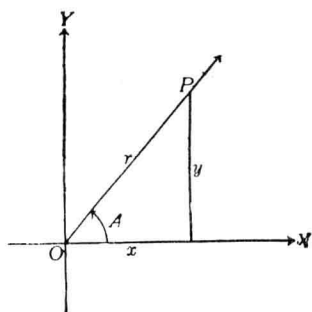


(圖三)

所以角的大小，全看這動線旋轉的分量：旋轉分量小，角就小，旋轉分量大，角也大。

(5) **三角函數的定義** 量角比量長度便當，要想從角度去推算長度，當然非設法先找出線段與角的關係不可，找法如下：——

在一隻角的轉動線上，隨便取一點如圖 P 點。設 P 到 O 的距離為 r 。這線段 r 同 P 點的兩個坐標 x, y 共造成一個直角三角形。這直角三角形三邊的長短，雖然要看 P 點在動線上的位置來定，但是這三線段互相



(圖 四)

對待的比，卻與 P 的位置無關，完全看 $\angle A$ 角的大小來變換。所以從這些線段比就可以決定這角的大小，於是有定義：

- (一) $\frac{\text{縱坐標 } y}{\text{距離 } r}$ 的比稱為 $\angle A$ 的正弦 *Sine*,
- (二) $\frac{\text{橫坐標 } x}{\text{距離 } r}$ 的比稱為 $\angle A$ 的餘弦 *Cosine*,
- (三) $\frac{\text{縱坐標 } y}{\text{橫坐標 } x}$ 的比稱為 $\angle A$ 的正切 *Tangent*,
- (四) $\frac{\text{橫坐標 } x}{\text{縱坐標 } y}$ 的比稱為 $\angle A$ 的餘切 *Cotangent*.

$$1. \text{ 正弦寫做 } \sin A = \frac{y}{r}$$

$$2. \text{ 餘弦寫做 } \cos A = \frac{x}{r}$$

$$3. \text{ 正切寫做 } \tan A = \frac{y}{x}$$

$$4. \text{ 餘切寫做 } \cot A = \frac{x}{y}$$

(注意) 從上面的定義,一望便知正餘切互為倒數如:—— $\cot A = \frac{1}{\tan A}$

所以有了正切,差不多餘切就用不着了;因為可以正切的倒數來代替。

(6) **正割,餘割** 在 x, y, r 三個線段裏,任取兩個成比,應當有六個比,所以除上面正餘弦切之外,還有兩個函數,定義如下:——

(五) $\frac{r}{x}$ 稱為 $\angle A$ 的正割 *Secant*, 寫做 $\sec A = \frac{r}{x}$

(六) $\frac{r}{y}$ 稱為 $\angle A$ 的餘割 *Cosecant*, 寫做 $\csc A = \frac{r}{y}$

這兩個函數的用處比較的很少,所以我們平常都不去理會他。而且依定義,一望便知他是正餘弦的倒數如:——

$$\sec A = \frac{1}{\cos A} \qquad \csc A = \frac{1}{\sin A}$$

所以有了正餘弦也就用不着他們了。

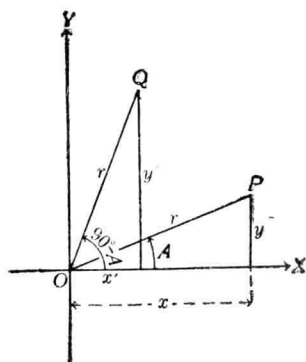
(7)餘角的函數公式 兩角湊成 90° , 這兩角就互稱為餘角。

假如有銳角 $\angle A$, 他的餘角可寫做 $90^\circ - A$.
把這兩角都擺在同一坐標系裏, 如圖五.

設令 $OP = OQ = r$

那麼 $\triangle xyr \cong \triangle y'x'r$

就有 $x = y' \quad y = x'$



(圖五)

於是依三角函數的定義, 就得下面的等式:——

$$\sin (90^\circ - A) = \frac{y'}{r} = \frac{x}{r} = \cos A$$

$$\cos (90^\circ - A) = \frac{x'}{r} = \frac{y}{r} = \sin A$$

$$\tan (90^\circ - A) = \frac{y'}{x'} = \frac{x}{y} = \cot A$$

$$\cot (90^\circ - A) = \frac{x'}{y'} = \frac{y}{x} = \tan A$$

$$\therefore \text{餘角函數公式} \begin{cases} \sin (90^\circ - A) = \cos A \\ \cos (90^\circ - A) = \sin A \\ \tan (90^\circ - A) = \cot A \\ \cot (90^\circ - A) = \tan A \end{cases}$$

這套公式極容易記得，把他用話來講一下，便知道：——“一隻角的正函數，就是他的餘角的餘函數 *Co-functions*；一隻角的餘函數，就是他的餘角的正函數——換句話說：兩角互為正餘，函數也互為正餘。”

練習一

1. 已知 $\sin 35^\circ 40' = 0.5831$ ，問 $\cos 54^\circ 20' = ?$
2. 已知 $\cot 78^\circ 12' = 0.2089$ ，問 $\tan 11^\circ 48'' = ?$
3. 已知 $10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ, 60^\circ, 70^\circ, 80^\circ$ 的 $\sin$ 同 $\tan$ ，求 $10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ, 60^\circ, 70^\circ, 80^\circ$ 的 $\cos$ 同 $\cot$.

4. 已知 $\tan 30^\circ = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ ，求 $\cot 60^\circ$ 同 $\tan 60^\circ$ ，

5. 若 $\sin x = \cos 4x$ ， $x = ?$

6. 若 $\tan 8x = \cot x$ ， $x = ?$

7. 若 $\cos x = \sin (45 - \frac{x}{2})$ ， $x = ?$

8. 若 $\cot x = \tan (45 + x)$ ， $x = ?$

(8)三角函數表 一角的各函數，有一定的數值，設法把他都找出來，開列成表，叫三角函數表，翻過下面來看便是。