根据教育部2010年《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲》修订

2010年

专科起点升本科

最新全国成人高等学校统一招生考试教材

高等数学(二)

主编　　胡东华　郭秀梅

审定　　全国成人高考命题研究组

團结出版社

全国成人高等学校统一招生考试教材

专科起点升本科

高等数学(二)

主编　胡东华　郭秀梅
审定　全国成人高考命题研究组

团结出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．2/胡东华，郭秀梅主编．—北京：团结出版社，2010.2

全国成人高等学校统一招生考试教材．专科起点升本科

ISBN 978-7-80214-988-5

Ⅰ．①高… Ⅱ．①胡… ②郭… Ⅲ．①高等数学-成人教育：高等教育-升学参考资料 Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 022604 号

出　　版：团结出版社

（北京市东城区东皇城根南街 84 号　邮编：100006）

电　　话：（010）65228880　65244790（出版社）

（010）82608025　82617040（发行）

网　　址：www.tjpress.com

E-mail：65244790@163.com

经　　销：全国新华书店

印　　刷：湖南众鑫印务有限公司

开　　本：850 mm×1168 mm　1/16

字　　数：2960 千字

版　　次：2010 年 4 月　第 1 版

印　　次：2010 年 4 月　第 1 次印刷

书　　号：ISBN 978-7-80214-988-5/G·575

定　　价：276.00 元

前　言

成人高考魅力不减！

作为一项国家级大考，成人高考和自学考试一样，是我国高等教育的重要组成部分。在今天建设全民学习、终身学习的学习型社会的进程中，成人高考有其独特的优势，散发出独特的魅力。从这个意义上讲，近几年成人高考增加的不仅仅是人数，也是人们对继续教育的渴求。这是学习型社会带给我们的一股清新之风！

教育部高校学生司、教育部考试中心修订颁布的2010年《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲》（以下简称《大纲》），凸显了**“更好地体现成人高等学历教育入学考试的目标、满足成人高等学校选拔新生的需要，突出为地方社会经济发展和广大在职从业人员服务的宗旨”**。在要求上适当降低了难度，实用性、针对性更强。

为了适应2010年大纲出现的新变化、新要求，我们邀请了全国各地著名高校的专家、教授和重点高中的特、高级教师，严格依据大纲精神对复习考试丛书进行了系统的修订。修订后的这一套复习考试丛书，及时反映了大纲的最新变化，全面体现了大纲的最新精神，结构更加科学、合理，适用性更强，成为广大考生复习备考的理想用书。

修订后的这套复习考试丛书，具有以下几个新特点：

一、内容紧扣大纲，编写立意突出了大纲提出的“更注重考查考生对基础知识的把握和分析、解决问题的实际能力”的要求。

二、各章、各部分的同步练习、典型例题、答案解析等各个方面，都贯穿了大纲要求，着眼和服务于对考生的基础知识和基本技能的培养和提高这个基本目标上。

三、丛书内容方面，在保证覆盖大纲所有知识点的前提下，剔除了部分过于冗长的文字，适当减少了篇幅，使复习考试丛书更精练、简洁。

根据各类成人高等学校招生考试（专科起点升本科）不同专业科目设置的不同，为方便报考不同专业考生的需要，本套丛书设置包括以下四个系列书目：**教材、一本通、全真模拟试卷和命题预测试卷。分别是：**

1. **专科起点升本科教材**：政治、时事政治、英语、大学语文、高等数学

(一)、高等数学（二）、民法、教育理论、医学综合。

2. 专科起点升本科一本通：

政治·英语·大学语文

政治·英语·高等数学（一）

政治·英语·高等数学（二）

政治·英语·民法

政治·英语·教育理论

政治·英语·艺术概论

政治·英语·生态学基础

政治·英语·医学综合

3. 专科起点升本科全真模拟试卷：

政治·英语·大学语文

政治·英语·高等数学（一）

政治·英语·高等数学（二）

政治·英语·民法

政治·英语·教育理论

政治·英语·艺术概论

政治·英语·生态学基础

政治·英语·医学综合

4. 专科起点升本科命题预测试卷：政治、英语、大学语文、高等数学(一)、高等数学（二）、民法、教育理论、医学综合。

由于编写时间仓促，难免有疏漏或不当之处，欢迎广大考生、读者及同仁批评指正。

全国成人高考命题研究组

2010年2月

目 录

第一章　函数、极限和连续

第一节　函　　数

大纲要求

2010年修订的《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲（专科起点升本科）高等数学（二）》中没有函数这一节内容，这就是说在成人高考专升本的考试试卷中将不会单独出现有关函数概念及性质的试题．但是，由于在后面的内容中常涉及到这些知识，为此，我们仍将函数的相关内容编写在第一节，以便读者学习．

内容精讲

一、函数的概念

1．函数的定义

在某个变化过程中有两个变量 x 和 y，当变量 x 在其变化范围内取定某一数值后，变量 y 按着一定的规律总有一个确定的值与之对应，就称 y 是 x 的函数，记作

$$y=f(x)$$

x 叫自变量，y 叫因变量，f 表示 x 与 y 之间的对应规律，自变量 x 的取值范围，称为函数的定义域、因变量 y 的变化范围，称为函数的值域．定义域有时用字母 D 或 $D(f)$ 表示，值域有时用字母 Z 或 $Z(f)$ 表示．

在函数的定义中，如果对于每一个 $x\in D(f)$，都有惟一的 $y\in Z(f)$ 与之对应，那么就称这种函数为单值函数，否则就称多值函数．以后无特别说明，所研究的函数都是指单值函数．

两个函数只要定义域相同，对定义域内的每一个值，与之对应的两个函数的函数值都相同，这两个函数就相同．在某一个问题中，如果同时出现几个不同函数，要用不同的对应规律符号来区别它们．如果两个函数定义域相同，对应法则相同，只是表示自变量的字母不同，这两个函数值仍是相同的．即函数与表示自变量的字母无关．

2．函数的定义域、值域

定义域　在数轴上使函数 y 有定义的自变量的取值范围 D，称为函数的定义域，记为 $D(f)$．

值域　函数 y 的取值范围，称为函数的值域，记为 $Z(f)$．

当自变量 x 取某一定值 a 时，函数 $y=f(x)$ 的对应值记为 $f(a)$，有时也记为 $y|_{x=a}$．

注：当我们在研究函数时，必须首先注意函数的定义域．对于反映实际问题的函数，其定义域要由所给问题的实际意义来确定．对于用数学式子表示的函数，确定其定义域应注意下面几点：

（1）函数式里若有分式，分母的值不能为零；

（2）函数式里若有偶次根式，根号里的整个式子必须大于或等于零；

（3）函数式里若有对数记号，要使真数为正；

（4）函数式里若有正切或余切函数，在正切、余切符号下的式子的值分别不能等于 $k\pi+\frac{\pi}{2}$、$k\pi$（k 为整数）；

（5）函数式里若有反正弦或反余弦函数，在反正弦、反余弦符号下的式子的绝对值不能大于 1；

（6）若函数的表达式由若干项组成，则定义域是各项定义域的公共部分（交集）.

函数定义域常用区间表示，也可用不等式、集合等方式表示.

3. 函数的表示法

常用的函数表示法有三种：解析法、表格法和图示法.

（1）解析法　对自变量和常数施加四则运算、乘幂、指数运算、取对数、取三角函数等数学运算所得到的式子称为解析表达式．用解析表达式表示一个函数就称为函数的解析法，也叫公式法．高等数学中讨论的函数，大多由解析法表示，这是由于对解析式子可以进行各种运算，便于研究函数的性质.

（2）表格法　在实际应用中，常把自变量所取的值和对应的函数值列成表，用以表示函数关系，函数的这种表示法称为表格法．例如，我们所用的各种数学用表——平方表、立方表、对数表、三角函数表等，都是用表格法表示的函数关系．在研究社会经济现象时，常常采用这种表格法.

（3）图示法　设 $y=f(x)$ 是一个给定的函数，定义域是 $D(f)$，由于自变量和函数都取实数值，因而我们可以在平面上取定一个直角坐标系 xOy，用 x 轴上的点表示自变量的值，用 y 轴上的点表示函数值，于是，在 $D(f)$ 内的每一个 x 及相应的函数值 $f(x)$ 就确定了该平面直角坐标系中的一个点 $P(x,y)$，当 x 在 $D(f)$ 内变动时，点 P 便在坐标平面上移动，一般得到平面上的一条曲线，这就是用图示法表示函数.

函数的三种表示法各有优缺点，在具体应用时，常常是三种方法配合使用.

4. 分段函数

有时还要考察这样的函数，对于其定义域内自变量 x 的不同值，函数不能用一个统一的公式表示，而要用两个或两个以上的公式来表示．这类函数称为“分段函数”.

例如 $y=|x|$，就是一个分段函数，因为它可以写成：

$$y=|x|=\begin{cases}-x & x<0\\ x & x\geqslant 0\end{cases}$$

当 $x<0$ 时，公式为 $y=-x$；当 $x\geqslant 0$ 时，用公式 $y=x$ 来表示（如图 1-1）．这个函数的定义域是 $(-\infty,+\infty)$.

又如

$$y=f(x)=\begin{cases}x+1 & x<-1\\ 0 & -1\leqslant x\leqslant 0\\ x+2 & x>0\end{cases}$$

也是一个分段函数（如图 1-2）．这个函数的定义域也是 $(-\infty,+\infty)$.

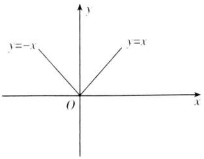


图 1－1

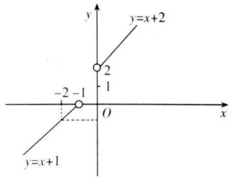


图 1－2

关于分段函数，要注意以下几点：

（1）分段函数是用几个公式合起来表示一个函数，而不是表示几个函数；

（2）因为函数式子是分段表示的，所以各段的定义域必须明确标出；

（3）对分段函数求函数值时，不同点的函数值应代入相应范围的公式中去求；

（4）分段函数的定义域是各项定义域的并集.

二、函数的简单性质

1. 函数的单调性

定义　设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内有定义，如果对于 (a, b) 内的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内是单调增加的；如果当 $x_1<x_2$，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 (a, b) 内是严格单调增加的.

如果对于 (a, b) 内的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内是单调减少的；如果当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 (a, b) 内是严格单调减少的.

由定义可知，在 (a, b) 内严格单调增加的函数 $f(x)$，其图形是沿 x 轴的正向逐渐上升的（如图 1－3）；严格单调减少的函数 $f(x)$，其图形是沿 x 轴的正向逐渐下降的（如图 1－4）.

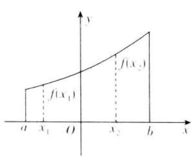


图 1－3

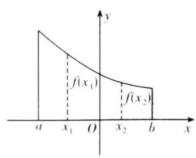


图 1－4

注意：单调性对一区间而不是对一个点来讲的.

2. 函数的奇偶性

定义　如果对函数 $y=f(x)$ 定义域中的任一点 x，恒有

$$f(-x)=f(x)$$

则称 $f(x)$ 为偶函数.

如果对于定义域中的任一点 x，恒有

$$f(-x)=-f(x)$$

则称 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图形是对称于 y 轴的（如图 1 – 5）.

奇函数的图形是对称于原点的（如图 1 – 6）.

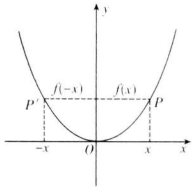


图 1 – 5

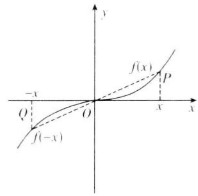


图 1 – 6

注意：很多函数是没有奇偶性的，切不可认为任何函数都具有奇偶性．例如 $y=x^2+\sin x$ 就没有奇偶性，它既不是奇函数，也不是偶函数.

3. 函数的有界性

定义 设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，如果存在一个正数 M，使得对于 (a,b) 内的任意一点 x，总有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是有界的．否则，称 $f(x)$ 在 (a,b) 内是无界的．

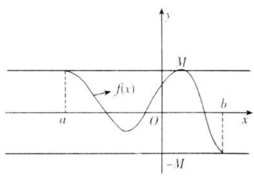


图 1 – 7

如图 1 – 7，函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内有界的几何意义是：曲线 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内被限制在 $y=-M$ 和 $y=M$ 两条水平直线之间的范围内.

4. 函数的周期性

定义 对于函数 $y=f(x)$，如果存在一个不为零的常数 T $(T\neq 0)$，使得关系式 $f(x+T)=f(x)$ 对于 $(-\infty,+\infty)$ 内的任何 x 都成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，称满足这个等式的最小正数 T 为函数的周期.

例如 $Y=\sin x$ 就是一个周期函数，周期 $T=2\pi$.

三、反函数

定义 设已知函数为

$$y=f(x) \quad ①$$

如果由此解出的

$$x=\varphi(y) \quad ②$$

是一个函数，则称它为 $f(x)$ 的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$，并称 $f(x)$ 为直接函数.

由于习惯上往往用字母 x 表示自变量，而用字母 y 表示函数，为了与习惯一致，通常将②式中的自变量 y 改写成 x，而将函数 x 改写成 y，于是①式的反函数就变为

$$y=\varphi(x) \quad ③$$

记为 $y=f^{-1}(x)$.

当然，也可以说 $y=f(x)$ 是 $y=f^{-1}(x)$ 的反函数，也就是说它们互为反函数.

要注意：函数 $x=\varphi(y)$ 与 $y=\varphi(x)$ 是同一个函数，所以当 $x=\varphi(y)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数时，$y=\varphi(x)$ 也是 $y=f(x)$ 的反函数.

明确了反函数的定义之后，还应知道：

在什么条件下直接函数 $y=f(x)$ 有反函数存在？

以下的反函数存在定理可以回答这个问题.

定理 如果函数

$$y=f(x),\quad D(f)=X,\quad Z(f)=Y$$

是严格单调增加（或减少）的，则它必定存在反函数

$$x=\varphi(y),\quad D(\varphi)=Y,\quad Z(\varphi)=X$$

并且也是严格单调增加（或减少）的.

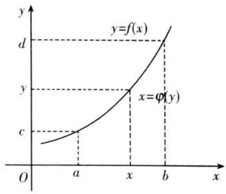


图 1-8

这个定理很容易从图 1-8 中加以理解.

求反函数的步骤：

第一步：从直接函数 $y=f(x)$ 中解出

$$x=\varphi(y)$$

第二步：如果 $x=\varphi(y)$ 是函数，将字母 x 换成 y，将字母 y 换成 x，得

$$y=\varphi(x)$$

这就是 $y=f(x)$ 的反函数.

结论：

（1）直接函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形，必定对称于直线 $y=x$（一般地，二者是不同的函数，其图形是不同的曲线）；

（2）直接函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 是同一条曲线（二者是不同的函数，但是，它们的图形是同一条曲线）.

根据这个结论，当我们知道了直接函数 $y=f(x)$ 的图形后，就可以利用对称于直线 $y=x$ 的性质画出其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形；但若要画反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图形，则就是直接函数 $y=f(x)$ 的图形.

四、基本初等函数

基本初等函数是指：

（1）常数函数 $y=c$（c 为常数）；

（2）幂函数 $y=x^{\alpha}$（α 为任何实数）；

（3）指数函数 $y=a^{x}$（$a>0$，$a\neq1$），

特别当 $a=e\approx2.71828\cdots$ 时，有 $y=e^{x}$；

（4）对数函数 $y=\log_{a}x$（$a>0$，$a\neq1$），

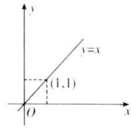
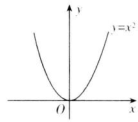
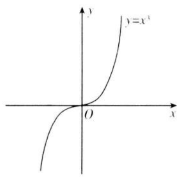
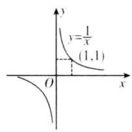
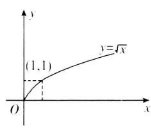
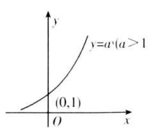
特别当 $a=e$ 时，有 $y=\ln x$，称为自然对数；

（5）三角函数 $y=\sin x$ $y=\cos x$ $y=\tan x$ $y=\cot x$ $y=\sec x$ $y=\csc x$

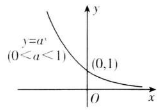
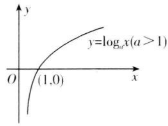
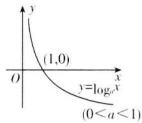
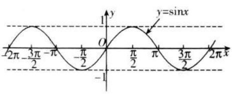
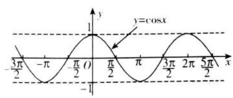
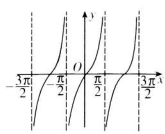
（6）反三角函数 $y=\arcsin x$ $y=\arccos x$ $y=\arctan x$ $y=\operatorname{arccot} x$

基本初等函数是我们分析、研究函数的基础，对它们的性质及图形，用表格形式详细附于下面（除去常数函数 $y=c$）.

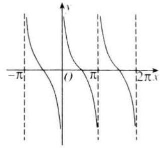
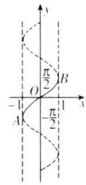
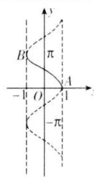
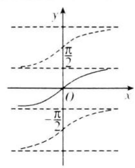
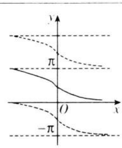
基本初等函数总表：

	函　数	定义域与值域	图　象	特　性
幂函数	$y=x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加
	$y=x^2$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		偶函数 在$(-\infty,0)$内单调减少 在$(0,+\infty)$内单调增加
	$y=x^3$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加
	$y=x^{-1}$	$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$		奇函数 单调减少
	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$x\in[0,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		单调增加
指数函数	$y=a^x$ $(a>1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调增加

续表

	函　数	定义域与值域	图　象	特　性
指数函数	$y=a^x$ $(0<a<1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调减少
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调增加
	$y=\log_a x$ $(0<a<1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调减少
三角函数	$y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		奇函数，周期 2π，有界，在 $(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2})$ 内单调增加，在 $(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2})$ 内单调减少
	$y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		偶函数，周期 2π，有界，在 $(2k\pi,2k\pi+\pi)$ 内单调减少，在 $(2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi)$ 内单调增加
	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\ (k\in Z)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期 π，在 $(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2})$ 内单调增加

续表

	函数	定义域与值域	图象	特性
三角函数	$y=\cot x$	$x\neq k\pi\ (k\in Z)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期 π，在 $(k\pi,\ k\pi+\pi)$ 内单调减少
	$y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$ $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$		奇函数，单调增加，有界
	$y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$ $y\in[0,\pi]$		单调减少，有界
	$y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$		奇函数，单调增加，有界
	$y=\operatorname{arccot} x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$		单调减少，有界

五、复合函数、初等函数

定义：设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，并且对于 x 值所对应的 u

值，函数 $y=f(u)$ 有定义，则函数 $y=f[\varphi(x)]$ 叫做 x 的复合函数．x 是自变量，u 是中间变量．

实际上，复合函数就是将中间变量代入后所构成的函数．

但要注意：不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的，例如 $y=\arcsin u$ 及 $u=x^2+3$ 就不能复合成一个复合函数．由定义，对于 $u=x^2+3$ 的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内的任何值 x 所对应的 u 值（都大于或等于3），$y=\arcsin u$ 都没有定义．就是说，$u=\varphi(x)$ 的值域必须取在函数 $y=f(u)$ 的定义域内．另外，复合函数的中间变量也可能不止一个，即二个、三个以上等，例如 $y=e^{\sqrt{x^2+1}}$ 可以看成是由

$$y=e^u,\ u=\sqrt{v},\ v=x^2+1$$

三个函数复合而成，其中 u、v 是中间变量．

在实际中，常常要考虑一个复合函数是由哪几个基本初等函数或简单函数（由基本初等函数经过四则运算）复合而成的．

初等函数是指：由基本初等函数经过有限次的四则运算（加、减、乘、除）和复合所构成的函数．初等函数是能用一个式子表示的函数．

例如

$$y=\frac{2+x}{2-x}$$

$$y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$$

$$y=\sin(3x-1)$$

$$y=\cos^2(\ln x)$$

都是初等函数．

分段函数（除去能用一个式子表示的）通常都是非初等函数．

六、建立函数关系问题

为了解决应用问题，先要给问题建立数学模型，即建立函数关系（列函数式），其步骤如下：

（1）分析实际问题中存在的各种量，弄清楚哪些是常量，哪些是变量，哪个变量作自变量，哪个变量作因变量．

（2）根据变量间的依赖关系，列出函数式（若有两自变量，则要找出它们之间的关系，消去多余的自变量）．

（3）由实际问题的需要，求出函数的定义域．

典型例题

【例1】 函数 $y=\sqrt{3-x}+\sin\sqrt{x}$ 的定义域是（　　）．

A. $[0,1]$　　　　B. $[0,3]$

C. $[0,1]\cup[1,3]$　　　　D. $[0,+\infty]$

解　选B

分析　因为对于函数 $y_1=\sqrt{3-x}$，要求 $3-x\geqslant 0$，所以它的定义域为 $(-\infty,3]$；

对于函数 $y_2=\sin\sqrt{x}$，要求 $x\geqslant 0$，所以它的定义域为 $[0,+\infty)$；

所以函数 $y=y_1+y_2$ 的定义域是这两个定义域的交集 $(-\infty,3]\cap[0,+\infty)=[0,3]$．

【例2】 函数 $f(x)=\sqrt{x^2-1}+\lg(x+2)$ 的定义域为（　　）．

A. $(-2,\ -1]\cup[1,\ +\infty)$　　B. $(-\infty,\ -1)$

C. $(-2,\ +\infty)$　　D. $(-2,\ -1)\cup(-1,\ +\infty)$

解　选 A

分析　第一项，当 $x^2-1\geqslant 0$ 时，即 $x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 1$ 时，才有意义；

第二项，当 $x+2>0$，即 $x>-2$ 时，才有意义.

所以 $f(x)$ 的定义域为 $(-2,\ -1]\cup[1,\ +\infty)$，故应选择 A.

【例 3】 设 $f(x)$ 为 $(-\infty,\ +\infty)$ 上的任一函数，则 $F(x)=f(x)-f(-x)$ 必为（　　）.

A. 偶函数　　B. 奇函数

C. 非奇非偶函数　　D. 恒等于零的函数

解　选 B

分析　因为 $F(-x)=f(-x)-f(x)=-[f(x)-f(-x)]=-F(x)$

所以 $F(x)$ 为奇函数.

【例 4】 函数 $y=\dfrac{1}{x^2}$ 在区间 $(0,\ 1)$ 内是（　　）.

A. 单调增加有界的　　B. 单调增加无界的

C. 单调减少有界的　　D. 单调减少无界的

解　选 D

分析　因为在区间 $(0,\ 1)$ 内，函数 $y=\dfrac{1}{x^2}$ 的值随 x 的增大而减少，所以是单调减少的. 又因为当 $x>0$ 时，只要 x 的值充分地小，$y=\dfrac{1}{x^2}$ 的值就可以变得充分地大. 也就是说，对于预先给定的任意大的正数 M，只要正数 x 满足关系式 $x\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{M}}$，就有 $\dfrac{1}{x^2}\geqslant M$，所以 $y=\dfrac{1}{x^2}$ 在 $(0,\ 1)$ 内是无界的.

【例 5】 曲线 $y=2^x$ 与 $y=\log_2 x$ 关于（　　）对称.

A. x 轴　　B. y 轴　　C. 直线 $y=x$　　D. 原点

解　选 C

分析　因为函数 $y=2^x$ 与 $y=\log_2 x$ 互为反函数，由于函数的图形与其反函数图形关于 $y=x$ 对称，故选 C.

【例 6】 函数 $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ 的反函数是（　　）.

A. $y=\dfrac{x-1}{x+1}$　　B. $y=\dfrac{1-x}{1+x}$　　C. $y=\dfrac{x+1}{x-1}$　　D. $y=\dfrac{1+x}{1-x}$

解　选 D

分析　因为由 $y=\dfrac{x-1}{x+1}\ (x\neq -1)$ 可以得到

$$(x+1)y=x-1$$

$$xy-x=-y-1$$

可以解出 $x=\dfrac{1+y}{1-y}\ (y\neq 1)$，将式中的 x 换成 y，将 y 换成 x 可得反函数为

$$y=\frac{1+x}{1-x}$$

【例7】设 $f(u)=\begin{cases}u+1 & u<0\\ u-1 & u\geqslant 0\end{cases}$，$u=\varphi(x)=\lg x$，则 $f[\varphi(10)]=$（　　）.

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

解　选 B

分析　因为 $u=\varphi(10)=\lg 10=1$ 所以 $f(u)=f[\varphi(10)]=f(1)=1-1=0$.

【例8】设 $y=f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，求：

(1) $f(x+a)$ $(a>0)$ 的定义域；

(2) $f(x^2)$ 的定义域.

解 (1) 因为 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，所以对函数 $f(x+a)$ 来说，只有当 $0\leqslant x+a\leqslant 1$ 时，$f(x+a)$ 才有意义.

由不等式 $0\leqslant x+a\leqslant 1$　得　$-a\leqslant x\leqslant 1-a$.

所以函数 $f(x+a)$ 的定义域为 $[-a,1-a]$.

(2) 因为 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，所以对函数 $f(x^2)$ 来说，只有当 $0\leqslant x^2\leqslant 1$ 时，$f(x^2)$ 才有意义.

由不等式 $0\leqslant x^2\leqslant 1$　得　$|x|\leqslant 1$，即得 $-1\leqslant x\leqslant 1$.

所以函数 $f(x^2)$ 的定义域为 $[-1,1]$.

【例9】求函数 $y=\lg\dfrac{x}{x-2}+\arcsin\dfrac{3x-1}{5}$ 的定义域.

解　设 $y_1=\lg\dfrac{x}{x-2}$，$y_2=\arcsin\dfrac{3x-1}{5}$

对于 y_1，要求 $\dfrac{x}{x-2}>0$，解得

(1) $x>0$，且 $x-2>0$　$\therefore x>2$

或 (2) $x<0$，且 $x-2<0$　$\therefore x<0$

因此 y_1 的定义域为 $x>2$ 或 $x<0$.

对于 y_2，由反正弦的定义知，应有，

$$\left|\frac{3x-1}{5}\right|\leqslant 1,\ \text{即}\ -1\leqslant\frac{3x-1}{5}\leqslant 1$$

$$\therefore\ -5\leqslant 3x-1\leqslant 5$$

解得

$$-\frac{4}{3}\leqslant x\leqslant 2$$

因为 y_2 的定义域为 $\left[-\dfrac{4}{3},2\right]$.

由于 $y=y_1+y_2$，所以函数 y 的定义域是上述两个定义域的交集，即

$$D(f)=\{x\mid x>2\text{ 或 }x<0\}\cap\left\{x\mid -\frac{4}{3}\leqslant x\leqslant 2\right\}$$

$$=\left\{x\mid -\frac{4}{3}\leqslant x<0\right\}$$

【例10】区别下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=2x^2+3x$　　(2) $f(x)=\sin x+x^3$

(3) $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$

解 (1) $f(x)=2x^2+3x$