普通高等教育“十二五”规划教材

Nucleus 新核心

理工基础教材

概率论与数理统计

徐晓岭 王蓉华 编

上海交通大學出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

普通高等教育“十二五”规划教材

Nucleus

新核心

理工基础教材

概率论与数理统计

徐晓岭 王蓉华 编

上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书是统计学专业的基础课教材，其比较系统地介绍了概率论与数理统计的基本概念、基本原理和基本方法. 本书是在多年的教学实践基础上逐步形成的，内容丰富，叙述严谨，并附有典型例题及大量习题，有助于读者掌握和理解概率论与数理统计的基础知识. 全书共10章，内容包括：随机事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、数字特征、大数定律和中心极限定理、数理统计的基础知识、参数估计、假设检验、方差分析、回归分析和相关分析等.

本书可作为高等院校理工类等其他专业师生阅读参考，也可作为考研的参考用书.

读者联系邮箱：science@press. sjtu. edu. cn

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计 / 徐晓岭，王蓉华编. —上海：
上海交通大学出版社，2013
ISBN 978-7-313-09716-3

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①徐… ②王… Ⅲ. ①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第149559号

概率论与数理统计
徐晓岭 王蓉华 编
上海交通大学出版社出版发行
(上海市番禺路951号 邮政编码 200030)
电话：64071208 出版人：韩建民
常熟市大宏印刷有限公司印刷 全国新华书店经销
开本：787 mm×960 mm 1/16 印张：33.5 字数：630千字
2013年8月第1版 2013年8月第1次印刷
印数：1～3 030
ISBN 978-7-313-09716-3/O 定价：49.00元

前　　言

本书是一本面向大学统计学专业的概率论与数理统计课程的教材. 全书较系统地介绍了概率论与数理统计的基本理论和方法，并将近一二十年来的新进展融入教材，使其内容更为丰富；例题的选取注重实用性，选用了许多背景资料来阐述和解释概率和统计的基本概念，以帮助读者正确理解和掌握这些概念的实质，这也是本书的一大特色. 本书也可作为大学理工类本科生概率论与数理统计的教材，对考研的学生也有具有一定的参考价值.

本书的编排分为两部分，第 1 章到第 5 章是概率论，第 6 章到第 10 章是数理统计. 考虑到不同院校的需要，教师可以根据课时及学生的实际情况取舍. 另外，为了使学生能更好地掌握概率论与数理统计的解题技巧，我们还编写了与本教材对应的习题参考书《概率论与数理统计习题精解》，两本书如能对照阅读，相信会有更大的收获.

本书由上海对外经贸大学的徐晓岭、上海师范大学的王蓉华两位作者合作完成. 徐晓岭编写了第 1～5 章，王蓉华编写了第 6～10 章，并由徐晓岭对全书进行了统稿.

本书的撰写得到了上海对外经贸大学的顾蓓青、赵飞、沙丹、凌学岭、王磊、范登锋、陈洁、徐冰纨等 8 位老师的关心与帮助，此外，上海师范大学概率论与数理统计专业的部分硕士研究生：张晓丽、李智军、魏晓、金藜勤、廖英、段贵锋、方园、王赟、胡平，上海对外经贸大学国际经济与贸易专业的硕士研究生梁舒，2009 级统计学专业的本科生：程慧君、於笑扬，2010 级统计学专业的本科生：刘芳芳、李桂芳、王园园、杨雯逸他们也对本书的撰写提供了协助，在此一并深表感谢！

本书出版得到了上海对外经贸大学地方本科 085 工程（二期）建设项目——统计学重点专业建设（项目编号：R085122025）的资助！

由于编者水平有限，书中存在的不妥或谬误之处，恳请广大读者和专家批评指正.

编　者

2013 年 3 月

目　　录

第1章 随机事件与概率

1.1 随机事件

1.1.1 随机现象与样本空间

1. 随机现象

在自然界和人类日常活动中，每天都发生着不同的现象，从数学角度研究社会和自然的现象，可以把这些现象大体分为两类：确定(必然)现象和随机现象.

事先可预言的现象称为确定现象，即在准确地重复某些条件下，它的结果总是肯定的.例如太阳不会从西边升起，同性电荷必然互斥等.

事前不可预言的现象称为随机现象，即在一定条件下，并不总是出现相同结果的现象.如以同样的方式抛掷硬币却可能出现正面向上也可能出现反面向上；走到某十字路口时，可能正好是红灯，也可能正好是绿灯.随机现象揭示了条件和结果之间的不确定性联系，其数量关系无法用函数加以描述，其结果具有不确定性，但在大量试验和观察中，这种结果的出现具有一定的统计规律性，概率论和数理统计是研究大量随机现象的统计规律性的数学学科.

随机现象有两个缺一不可的特点：① 随机现象的结果至少有两个；② 至于哪一个出现，事先并不知道.

例 1.1 以下是随机现象的一些例子：

(1) 抛一个骰子，观察出现的点数；

(2) 某一顾客在超市排队等候付款的时间；

(3) 某电话呼叫中心，在早晨 8:00～9:00 接到的电话呼叫次数；

(4) 在分析天平上重复称量某种物品的重量，其值相近但不尽相同的结果；

(5) 新产品在未来市场的占有率；

(6) 明天的天气可能是晴天，也可能多云或雨.

试验是一个广泛的术语，它包括各种各样的科学实验，对客观事物进行的“调查”、“观察”等.如抛掷一个骰子，观察出现的点数，记录某一电话呼叫中心在某一时间段接到的呼叫次数等.为了探索随机现象的规律性，需要对随机现象进行观

察,将观察随机现象或为了某种目的进行的试验统称为试验,在相同条件下可以重复的随机现象又称为随机试验,但也有很多随机现象是不能重复的,如某场球赛的输赢是不能重复的,某些经济现象(如失业、经济增长速度等)也是不能重复的.概率论与数理统计主要是研究大量重复的随机现象,但也十分注意研究不能重复的随机现象.随机试验是概率论中的一个基本概念,通常将符合下面3个特点的试验叫做随机试验,用英文字母E记之:

(1) 每次试验的可能结果不止一个,并且事先明确试验的所有可能结果;

(2) 进行一次试验之前无法确定哪一个结果先出现;

(3) 可以在同一条件下重复进行试验.

2. 样本空间

样本空间是一个概率论术语,将随机试验E的一切可能出现的结果组成的集合称为E的样本空间,通常记为Ω.样本空间中元素,即E的每一个可能出现的结果,称为样本点,用ω表示.在随机试验中,确定样本空间至关重要.

例 1.2 下面给出一些随机现象的样本空间:

(1) 抛掷一枚骰子,可能出现的点数,其样本空间$\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,其中的1, 2, 3, 4, 5, 6就是6个样本点;

(2) 从一批产品中一次取3件,记录出现正品与次品的情况,以N表示正品,P表示次品,则其样本空间是$\Omega=\{NNN, PPP, NNP, NPN, PNN, PNP, NPP, PPN\}$,其中的元素就是样本点,若记录出现的正品次数,则样本空间$\Omega=\{0, 1, 2, 3\}$,该例可见,样本空间的元素是由试验的目的所确定的;

(3) 某电话呼叫中心,在早晨8:00~9:00接到的电话呼叫次数,$\Omega=\{0, 1, 2, \cdots, 100, \cdots, 10\,000, \cdots\}$,“0”表示没有接到一个电话呼叫,“10 000”表示有可能接到10 000次电话呼叫,这两种情况虽然发生的概率小,但是我们不能认为它们绝不可能发生,所以该样本空间用非负整数表示,既不脱离实际,又合理想象,这便是数学的处理;

(4) 考察某地区7月份的气温$\Omega=\{T_1<t<T_2\}$,其中t表示平均气温.

列出样本空间是认识随机现象的重要一步,同时也要注意随机现象样本空间需要注意的3点:

(1) 样本空间中的元素是由试验目的所确定的,可以是数也可以不是数,当试验的目的不同时,样本空间往往是不同的,如若把某射击比赛中一选手的射击情况作为随机试验时,若以考察是否命中靶子为目的,则试验的样本空间$\Omega=\{$中,不中$\}$;若以考察射中的环数为目的,则试验的样本空间为$\Omega=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

(2) 样本空间中至少有两个样本点,只含有两个样本点的样本空间是最简单

的样本空间，如上述“(1)”中的样本空间 $\Omega=\{中, 不中\}$ 就是一个最简单的样本空间.

(3) 从样本空间含有的样本点的个数来区分，样本空间可以大致分为有限、无限可列和无限不可列 3 类.

1.1.2　随机事件

在随机试验中，可能出现也可能不出现，而在大量重复试验中具有某种规律性的事件称为随机事件，简称事件，它是由随机现象的某些样本点组成的集合，随机事件通常用大写英文字母 A, B, C 等来表示. 例如，抛掷一枚硬币时，$A=$“正面向上”是一个事件.

随机事件可以分为基本事件和复合事件，只含有一个样本点的随机事件称为基本事件，含有多个样本点的随机事件称为复合事件.

在随机试验中，随机事件一般是由若干个基本事件组成的. 样本空间 Ω 的任一子集 A 称为随机事件. 属于事件 A 的样本点出现，则称事件 A 发生.

因此在理论上，称试验 E 所对应的样本空间 Ω 的子集为 E 的一个随机事件，简称事件. 在一次试验中，当这一子集中的一个样本点出现时，称这一事件发生.

样本空间 Ω 包含所有的样本点，它是 Ω 自身的子集，在每次的试验中它总是发生，称为必然事件，必然事件仍记为 Ω，空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，它也作为样本空间 Ω 的子集. 在每次试验中都不发生，称为不可能事件，必然事件和不可能事件在不同的试验中有不同的表达方式.

综上所述，随机事件可能有不同的表达方式：一种是直接用语言描述，同一事件能有不同的描述；也可以用样本空间子集的形式表示，此时，需要理解它所表达的实际含义，有利于对事件的理解.

例 1.3　某灯具厂生产的灯泡中，一盒灯泡有 20 个，经检查其中正品有 18 个，次品有 2 个，从中任取 3 件，这是随机试验，下列事件都是随机事件：

① A 表示“随机抽取的 3 件中恰有一件正品”；② B 表示“随机抽取的 3 件中恰有两件正品”；③ C 表示“随机抽取的 3 件中至少有两件正品”；④ D 表示“随机抽取的 3 件中至少有一件正品”；并且，Ω 表示“随机抽取的 3 件中必有正品”是必然事件；$\varnothing$ 表示“随机抽取的 3 件中都是次品”是不可能事件.

注意　不可能事件和必然事件本没有随机性可言，但为了研究问题的需要，通常把这两个事件看成随机事件的两个极端情形.

例 1.4　将黑白两球随机地放入三个盒子中，试写出该试验的样本空间，并确

定下列事件所含的样本点：① $A=$“第一个盒子中恰有一个球”；② $B=$“黑球在第一个盒子中”；③ $C=$“第一个盒子中至少有一个球”.

解 记 $\omega_{ij}=$“黑球、白球分别放入第 i, j 个盒子”，$\Omega=\{\omega_{ij}: i, j=1, 2, 3\}$,

$$A=\{\omega_{ij}: \min(i, j)=1; i, j=1, 2, 3; i\neq j\},$$

$$B=\{\omega_{1j}: j=1, 2, 3\},$$

$$C=\{\omega_{ij}: \min(i, j)=1; i, j=1, 2, 3\}.$$

1.1.3 事件之间的关系及运算

在样本空间中有许多事件，这些事件之中又有联系，分析事件之间的联系，有助于更加深刻地认识随机事件和随机现象的本质，给出事件的运算及运算规律，有助于研究复杂事件.

通常用希腊字母 Ω 表示样本空间，ω 表示样本点. 称“ω 是 Ω 的成员”或者“ω 属于 Ω”，或者“ω 是 Ω 的元素”，记为 $\omega\in\Omega$.

如果 ω 不是试验的一个可能结果，那么 ω 不是 Ω 的元素，则记为 $\omega\notin\Omega$.

一个事件对应于样本空间的一个子集，因此某事件发生当且仅当它对应的子集中的某个元素（即样本点）在试验中出现. 用 $A\subset\Omega$ 表示事件 A 是 Ω 的子集. 事件的相互关系与集合论中集合的包含、相等以及集合的运算等概念对应. 以下就是这些对应关系与运算. 为简化起见，以下均假设涉及的集合 A, B, A_1, A_2, $\cdots$, A_n 等都是 Ω 的子集，而不再每次申明.

1. 事件之间的关系

1) 包含关系

如图 1.1 所示，假设有两个事件 A 和 B，若事件 A 中任意一个样本点必在事件 B 中，则称 B 包含 A，记为 $B\supset A$，或称 A 包含在 B 中，记为 $A\subset B$，也即 A 发生时，B 当然也就发生了，或说“A 的发生必导致 B 的发生”.

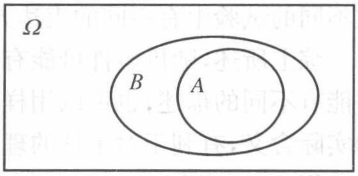

图 1.1　包含关系

例 1.5 袋中装有 2 个白球 5 个红球，任意抽取 2 个球，事件 A 表示所取的球恰有一个白球，事件 B 表示所取的球至少有一个白球，则事件 B 包含事件 A，$B\supset A$.

从上面的例子可以看出，若 B 包含 A，则事件 A 发生必然导致事件 B 发生，并且对任一事件，必有：$\varnothing\subset A\subset\Omega$.

2) 相等关系

假设有两个事件 A 和 B，若事件 A 和 B 含有完全相同的样本点，则称 A 和 B

相等，记为 $A=B$，则若 $A\subset B$，$B\subset A$，那么 $A=B$，同样若 $A=B$，则 $A\subset B$，$B\subset A$.

例 1.6　同时抛掷两枚相同的骰子，观察出现的点数. 样本点记为 (x, y)，其中 x，y 分别表示第一个和第二个骰子的出现的点数，事件 $A=\{(x, y), x+y=$ 奇数$\}$，事件 $B=\{(x, y)$，x 与 y 的奇偶性不同$\}$，可以验证，A 若发生必然导致 B 发生，B 若发生必然导致 A 发生，则 $A=B$.

从上面的例子可以看出，若事件 A 和事件 B 相等，则 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，也就是说，这两个事件表示成同一个集合，有时候不同形式表示的事件也有可能是同一个事件.

3）互不相容（两两互不相容，或称两两互斥）

如图 1.2 所示，假设有两个事件 A 和 B，若事件 A 和事件 B 没有相同的样本点，或 A、B 不可能同时发生，则称 A 和 B 互不相容，记为 $AB=\varnothing$.

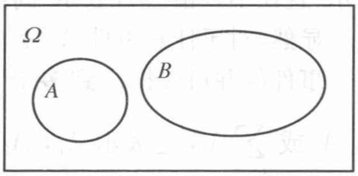

图 1.2　互不相容

例 1.7　在重复抛掷骰子两次观察其点数的试验中，事件 A 表示“两次中至少有一次出现偶数点”，事件 B 表示“两次中都是出现奇数点”，这两个事件不可能同时发生，因此它们是两个互不相容的事件.

从上面的例子可以看出，互不相容事件包含 3 种情况：A 发生 B 不发生；B 发生 A 不发生；A，B 都不发生.

4）对立关系（互逆）

如图 1.3 所示，事件 A 与事件 B 在一次试验中有且仅有一个发生，即 A 与 B 为互为对立事件或称 B 是 A 的对立事件，或称逆事件，记为 $B=\overline{A}$，通常将事件 A 的对立事件记为 $\overline{A}$.

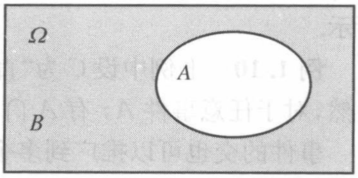

图 1.3　对立关系

对立事件属于一种特殊的互斥事件，它们的区别可以通过定义看出来. 一个事件本身与其对立事件的并集等于总的样本空间；而若两个事件互为互斥事件，表明一者发生则另一者必然不发生，但不强调它们的并集是整个样本空间. 即对立必然互斥，互斥不一定会对立.

例 1.8　在抛掷骰子的试验中，事件 A 表示“出现奇数点 1，3，5”，事件 B 表示“出现偶数点 2，4，6”，则事件 A 的对立事件就是事件 B，即 $\overline{A}=B$.

从上例可以看出，事件 A，B 互为对立事件的充要条件是：$A\cup B=\Omega$，$AB=\varnothing$.

2. 事件的运算

1) 事件的并(或和)

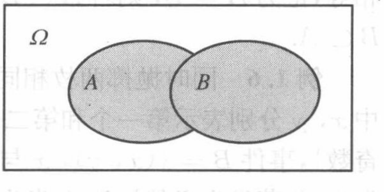

图 1.4 事件的并

事件 A 与事件 B 至少有一个发生，称为事件 A 与事件 B 的并，记作 $A\cup B$，或记为 $A+B$，$A\cup B$ 表示由事件 A 与事件 B 的所有样本点(相同的只计一次)组成的新事件，即 $A\cup B=\{\omega:\omega\in A$ 或 $\omega\in B\}$，如图 1.4 所示.

例 1.9 设有某种圆柱形的产品，若底面直径和高都合格，则该产品合格，若 A 表示"直径不合格"，B 表示"高不合格"，则 $A\cup B$ 表示"产品不合格".

显然，对于任意事件 A，有 $A\cup\varnothing=A$，$A\cup\Omega=\Omega$.

事件的并可以推广到多个事件的情形：n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 的并记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 或 $\sum\limits_{i=1}^{n}A_i$，它表示 A_1，A_2，…，A_n 至少有一个发生；可数(或称可列)个事件 A_1，A_2，…，A_n，… 的并记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty}A_i$ 或 $\sum\limits_{i=1}^{+\infty}A_i$，它表示 A_1，A_2，…，A_n，… 至少有一个发生.

2) 事件的交(或积)

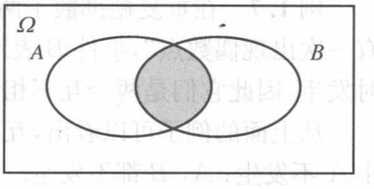

图 1.5 事件的交

事件 A 与 B 同时发生，称为事件 A 与事件 B 的交，记作 $A\cap B$，或记为 AB，$A\cap B$ 表示由事件 A 与事件 B 的公共样本点组成的新事件，即 $A\cap B=\{\omega:\omega\in A$ 且 $\omega\in B\}$，如图 1.5 所示.

例 1.10 上例中设 C 为"直径合格"，D 为"高合格"，则 $C\cap D$ 为"产品合格".
显然，对于任意事件 A，有 $A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cap\Omega=A$.

事件的交也可以推广到多个事件的情形：n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 的交记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 或 $\prod\limits_{i=1}^{n}A_i$，它表示 A_1，A_2，…，A_n 同时发生；可数(或称可列)个事件 A_1，A_2，…，A_n，… 的交记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty}A_i$ 或 $\prod\limits_{i=1}^{+\infty}A_i$，它表示 A_1，A_2，…，A_n，… 同时发生.

3) 事件的差

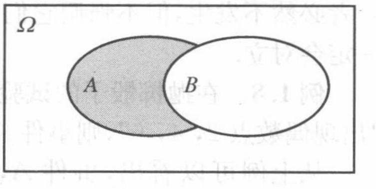

图 1.6 事件的差

事件 A 发生 B 不发生，称为事件 A 与事件 B 的差，记作 $A-B$，即 $A-B$ 表示由在事件 A 中而不在事件 B 中的样本点组成的新事件，易见 $A-B=A\overline{B}$，如图 1.6 所示.

例 1.11 在例 1.9 中 $A-B$ 表示"产品的直

径不合格而高合格”.

注意　以下等式总是成立的.

$$\overline{\Omega}=\varnothing,\ \overline{\varnothing}=\Omega,\ \Omega\cup A=\Omega,\ \Omega\cap A=A,$$
$$A\cup\overline{A}=\Omega,\ A\cap\overline{A}=\varnothing,\ \overline{(\overline{A})}=A.$$

事件之间的关系和运算与集合之间的关系和运算是类似的,下面给出事件的运算规律:

(1) 交换律: $A\cup B=B\cup A$, $AB=BA$;

(2) 结合律: $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$, $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(3) 分配律: $A(B\cup C)=(AB)\cup(AC)$, $A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C)$;

(4) 摩根律: $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$, $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

以上的运算性质均可以推广到有限个或可数个事件的情形. 例如,对 n 个事件 B_i, $i=1, 2, \cdots, n$ 有分配律: $A\cap\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i\right)=\bigcup\limits_{i=1}^{n}(A\cap B_i)$, $A\cup\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n}B_i\right)=\bigcap\limits_{i=1}^{n}(A\cup B_i)$,还有摩根律: $\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty}A_i}=\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty}\overline{A_i}$, $\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty}A_i}=\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty}\overline{A_i}$.

例 1.12　设甲、乙、丙三个人各射一次靶子,若 A 表示“甲射中靶子”, B 表示“乙射中靶子”, C 表示“丙射中靶子”,则可用上述三个事件的运算来分别表示下列事件.

解　①“甲未中靶”: $\overline{A}$; ②“甲中靶而乙未中靶”: $\overline{AB}$; ③“三个人只有丙未中靶”: $AB\overline{C}$; ④“三个人中恰有一个人中靶”: $(A\overline{B}\,\overline{C})\cup(\overline{A}B\overline{C})\cup(\overline{A}\,\overline{B}C)$; ⑤“三个人中至少有一个人中靶”: $A\cup B\cup C$ 或 $\overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}}$; ⑥“三个人中至少有一个人未中靶”: $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$ 或 $\overline{ABC}$; ⑦“三个人中恰有两个人中靶”: $(AB\overline{C})\cup(\overline{A}BC)\cup(A\overline{B}C)$; ⑧“三个人中至少两个人中靶”: $(AB)\cup(AC)\cup(BC)$; ⑨“三个人都未中靶”: $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$; ⑩“三个人至多一个人中靶”: $(A\overline{B}\,\overline{C})\cup(\overline{A}B\overline{C})\cup(\overline{A}\,\overline{B}C)\cup(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})$.

1.2 概率

在上一节中,我们已经认识到在一次试验中随机试验的发生带有不确定性,结果事先是不知道的,但在大量的重复试验的情况下,它的发生是否有一定的规律性呢? 这正是这一节要讨论的内容: 随机事件的概率,这也是概率论中最基本也最重要的概念.

1.2.1 概率的统计定义与公理化定义

1. 概率的统计定义

考虑一系列在相同条件下重复做的随机实验,在实验的最初 n 次重复试验中,假设 n_A 表示事件 A 发生的次数,那么 $\frac{n_A}{n}$ 的比值则给出了在最初 n 次试验中事件 A 发生的比例. 例如,如果是投掷硬币的实验,如果事件 A 相对应"正面",那么 $\frac{n_A}{n}$ 给出了在最初 n 次投掷中正面出现的比例,直观上感觉随着 n 的增加,$\frac{n_A}{n}$ 的比值应该稳定且接近某些可以测量事件 A 发生可能性的固定数值. 这样,可以用下面的方式来指定事件的概率: $P(A)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n_A}{n}$.

定义 1.1 事件的频数是指在相同条件下,进行 n 次试验,在这 n 次试验中,事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的频数,称比值 $\frac{n_A}{n}$ 为事件 A 发生的频率,记为: $f_n(A)=\frac{n_A}{n}$ 由上述对频率的定义知,频率具有如下性质:

(1) 非负性: $f_n(A)\geqslant 0$; (2) 规范性: $f_n(\Omega)=1$;

(3) 有限可加性: 对于互不相容的事件 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_k$, 有 $f_n\left(\sum\limits_{i=1}^{k}A_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{k}f_n(A_i)$.

例 1.13 说明频率稳定性的例子.

(1) 抛掷硬币的试验. 历史上关于抛掷硬币的试验有不少的人做过,下面表 1.1 给出了他们试验的结果,从表中的数字可以明显看出,随着试验抛掷次数 n 的增加,事件"出现正面"的频率也愈来愈接近常数 0.5.

(2) 英文字母的频率. 人们在生活实践中已经认识到: 英文中某些字母的频率要高于另外一些字母,但 26 个英文字母各自出现的频率到底是多少? 有人对各类典型的英文书刊中字母出现的频率进行统计,发现各个字母的使用频率相当稳定的,结果如表 1.2 所示,这项研究对计算机键盘设计(在方便的地方安排使用频率最高的字母键)、早期的密码破译(替代作业)等等方面都是十分有用的.

表 1.1　历史上抛掷硬币试验的若干结果

试　验　者	抛掷次数 n	出现正面的次数 n_A	出现正面的频率 $\frac{n_A}{n}$
德摩根	2 048	1 061	0.518
蒲丰	4 040	2 048	0.506 9
皮尔逊(Ⅰ)	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊(Ⅱ)	24 000	12 012	0.500 5
维尼	30 000	14 994	0.499 8
罗曼诺夫斯基	80 640	39 699	0.492 3
费勒	10 000	4 979	0.497 9

表 1.2　英文字母的使用频率

字　母	使用频率	字　母	使用频率	字　母	使用频率
E	0.126 8	L	0.039 4	P	0.018 6
T	0.097 8	D	0.038 9	B	0.015 6
A	0.078 8	U	0.028 0	V	0.010 2
O	0.077 6	C	0.026 8	K	0.006 0
I	0.070 7	F	0.025 6	X	0.001 6
N	0.070 6	M	0.024 4	J	0.001 0
S	0.063 4	W	0.021 4	Q	0.000 9
R	0.059 4	Y	0.020 2	Z	0.000 6
H	0.057 3	G	0.018 7		

(3) 女婴出生频率. 研究男婴、女婴出生频率，对人口统计是很重要的. 历史上较早研究这一问题的是拉普拉斯，他对伦敦、彼得堡、柏林和全法国的大量人口资料进行研究，发现女婴出生频率总是在 0.488 4 左右波动. 统计学家克拉梅用瑞典 1935 年的官方统计资料，如表 1.3 所示，发现女婴出生频率总是在 0.482 左右波动.

表 1.3　瑞典 1935 年各月出生女婴的频率

月　　份	婴 儿 数	女 婴 数	频　　率
1	7 280	3 537	0.486
2	6 957	3 407	0.489
3	7 883	3 866	0.490

（续　表）

月　份	婴 儿 数	女 婴 数	频　率
4	7 884	3 711	0.471
5	7 892	3 775	0.478
6	7 609	3 665	0.482
7	7 585	3 621	0.462
8	7 393	3 596	0.484
9	7 203	3 491	0.485
10	6 903	3 391	0.491
11	6 552	3 160	0.482
12	7 132	3 371	0.473
全年	88 273	42 591	0.482 5

事件发生的频率在一定程度上反映了事件发生的可能性的大小. 为什么要加上“在一定程度上”这一限定语呢？因为频率不是一成不变的. 例如，若将上述投掷硬币试验重新再做，则 A 发生次数就会有改变，这是完全有可能的. 如此说来，频率还能够真实地反映事件发生的可能性的大小吗？回答依然是肯定的，条件是试验次数 n 要足够大. 这里要指出一个重要的事实，就是，尽管 n 次试验中事件 A 发生的频数 n_A 不是一个固定的数，从而频率 $f_n(A)$ 也不是一个固定的数，但当试验的次数 n 较大时，频率 $f_n(A)$ 会趋于稳定.

人们从大量的实践中观察到的频率的稳定性可以推测，应该有一个由事件 A 自身所决定的常数 p 存在，使 $f_n(A)$ 十分稳定地在其上下做窄幅变动. 将这样一个客观存在的数 p 称作事件 A 的概率应当是合乎逻辑的.

定义 1.2　在相同条件下所做的 n 次试验中，当 $n\to+\infty$ 时，事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 稳定在某个常数 p 附近. 称此常数 p 为事件 A 发生的概率，记作

$$P(A)=p.$$

定义 1.2 是建立在试验及其统计数据的基础上的，故称之为概率的统计定义. 它有相当直观的试验背景，易被人们接受. 不足之处是，定义中数 p 的存在只是人们经过大量观察之后的推断. 从传统数学惯有的严格性角度看，似乎应对其客观性给出严格的证明才能令人信服. 此外，定义中对频率与概率关系的描述是定性的，非数学化的，从而容易造成误解. 概率与频率的区别与联系在于，一方面，事件发生的概率是客观存在的，带有确定性，是个不变的常数，而事件发生的频率是通过大