查理斯密大代数学

A TREATISE ON

ALGEBRA

BY

Charles Smith, M. A.

連江陳文
南海何崇禮 合譯

查理斯密大代數學

中卷

科學會編譯部刊行

總發行所　上海（四馬路巡捕房東首）科學會編譯部總發行所

發行者　科學會編譯部

印刷所　秀英舍第一工場

印刷者　藤本兼吉

譯述者　南海何崇禮　連江陳文

中華民國元年十月一日六版發行

定價大洋壹圓

（大代數學中卷奥付）

查理斯密

大代數學中卷

目錄

查理斯密
大代數學
中卷

第拾叁編
方乘　方根　分指數　負指數

(158). **累乘法** (Involution) 求諸數量之方乘。其法謂之累乘法。

〔增補〕 如求 $4a^2b$ 之立方。則得 $(4a^2b)^3=64a^6b^3$。此法謂之累乘法。

開方法 (Evolution) 反其法以求諸數量之方根。其法謂之開方法。

〔增補〕 如求 $64a^6b^3$ 之立方根。則得 $4a^2b$。此法謂之開方法。

本編專論累乘法及開方法。

(159). **指數之法則** (Index Laws) 在第貳編31章。設 m 及 n 皆爲正整數。則可證。

$$a^m\times a^n=a^{m+n}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

此法則稱爲指數之法則。依此法則。可得。

$$a^m\times a^n\times a^p=a^{m+n}\times a^p=a^{m+n+p}$$

由是類推。無論因子若干。恒得。

$$a^m\times a^n\times a^p\times a^q\times\cdots\cdots=a^{m+n+p+q+\cdots}\cdots\cdots\cdots(2)$$

由是得次之法則。

〔法則〕 諸同數量之方乘之積。(即同數量之方乘)。其指數等於諸因子指數之和。

又於 (2) 式設 $m=n=p=q\cdots\cdots$。則

$a^m\times a^m\times a^m\times\cdots\cdots$至 n 因子。

$=a^{m+m+m+\cdots\cdots}$至 n 項

$=a^{mn}$

$$\therefore\ (a^m)^n=a^{mn}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

〔法則〕 壹數量之某方乘。以他方乘乘之。其指數等於原指數與他方乘指數之積。

〔增補〕 於 (3) 式設 $m=n$。則

$$(a^m)^m=a^{mm}=a^{m^2}$$

即 m 爲 a 之指數。而 2 又爲 m 之指數也。

如求 $2^{2^{2^2}}$ 之值。此題指數之上又有指數。其上復有指數。初學者易於迷惑即由 (3) 之法則。而以爲

$2^{2^{2^2}}=\left\{2^{2^2}\right\}^2=\left\{(2^2)^2\right\}^2$。則成謬誤。若由 (3) 之法則。作 $\{(2^2)^2\}^2=\{2^{2\times2}\}^2=2^{2\times2\times2}=2^{2^3}=2^8$。則大謬誤。故必如次。

$2^{2^{2^{2}}}=2^{2^{4}}=2^{16}$。始能合理決非 2^8。

何則 a^{m^2} 即 $(a^m)^m$。決非爲 $(a^m)^2$。

又求 $(ab)^m$

$(ab)^m=ab\times ab\times ab\times\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$至 m 因子(由定義)

$=(a\times a\times a\times\ldots\ldots$至 m 因子$)\times(b\times b\times b\times\ldots\ldots$至 m 因子$)$

$=a^m\times b^m$ (由定義)

由是　$(ab)^m=a^m\times b^m$

同理　$(abc)^m=(ab)^m\times c^m=a^m\times b^m\times c^m$

由是類推。則得公式如次。

$$(abc\ldots\ldots\ldots)^m=a^m\times b^m\times c^m\times\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

〔法則〕積之 m 方乘。等于其因子之 m 方乘之積。

〔增補〕由 (4) 式。可用眞數代入以證明之。如 256×625

$$256\times625=4^4\times5^4=(4\times5)^4=20^4=160000$$

又如 $(a+b)^5\times(a^2+b^2)^6\times(a-b)^5$

$$(a+b)^5\times(a-b)^5\times(a^2+b^2)^6=\{(a+b)(a-b)\}^5\times(a^2+b^2)^6$$

$$=(a^2-b^2)^5(a^2+b^2)^6=(a^2-b^2)^5(a^2+b^2)^5(a^2+b^2)$$

$$=\{(a^2-b^2)(a^2+b^2)\}^5(a^2+b^2)=(a^4-b^4)^5(a^2+b^2)$$

單項式最普通之例爲 $a^xb^yc^z\ldots\ldots\ldots\ldots$。而今爲 m 方乘。則

$$(a^xb^yc^z\ldots\ldots\ldots)^m=(a^x)^m(b^y)^m(c^z)^m\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\{由 (4)\}$$

$$=a^{xm}b^{ym}c^{zm}\text{.............................}\{\text{由 (3)}\}$$

是故 $(a^xb^yc^z)^m\text{.......}=a^{xm}b^{ym}c^{zm}\text{............................(5)}$

〔法則〕某代數式之某方乘。取其式內諸子之指數。以乘方乘之指數。而以其積為其因子之指數。

更有特別之例如次。

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\left(a\times\frac{1}{b}\right)^m=a^m\times\frac{1}{b^m}=\frac{a^m}{b^m}$$

又 $\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\text{.........至 } m \text{ 因子}$

$$=\frac{aaa\text{.........至 } m \text{ 因子}}{bbb\text{.........至 } m \text{ 因子}}=\frac{a^m}{b^m}$$

(160). **符號之法則** (Law of Signs) 據符號之法則。正數量之方乘。恆為正。負數量之方乘。依次第互為正負。

即
$$(-a)^2=(-a)(-a)=+a^2$$
$$(-a)^3=(-a)^2(-a)=(+a^2)(-a)=-a^3$$
$$(-a)^4=(-a)^3(-a)=(-a^3)(-a)=+a^4$$
$$(-a)^5=(-a)^4(-a)=(+a^4)(-a)=-a^5$$

以下準此。

故 $(-a)^{2n}=+a^{2n}$ 及 $(-a)^{2n+1}=-a^{2n+1}$

何則。$2n$ 必為偶數而 $2n+1$ 必為奇數故也。

由是推之。無論數量爲正爲負。其方乘爲偶數者。必爲正量。其方乘爲奇數者。其符號必與原數量同。(若原數量爲正。則所得之量亦正。若原數爲負。則所得之量亦負。)

〔增補〕 如 $n, n+1, n+2, 3n, 3n+1, 3n+2, n-3, 3n-2$ 等數。其爲奇數抑爲偶數。未能斷定。故如

$(-a)^{n+1}$。若 n 爲偶數。則得 $-a^{n+1}$, 若 n 爲奇數。則得 $+a^{n+1}$。故 $(-a)^{n+1}=(-1\times a)^{n+1}=(-1)^{n+1}a^{n+1}$

然 $(-a)^n$ 與 $(-a)^{n+1}$ 異號。何則。因 n 爲偶。則 $n+1$ 爲奇。n 爲奇則 $n+1$ 爲偶故也。

(161). **算學上之數根** (Roots of Arithmetical Numbers) 算學上諸數之某平方根,或其他方根,恒能求其略近數。今試證明如次。惟求略近數之法。演算甚繁。故不盡根之實算法本編不具論。

如求 $\sqrt{62}$。先臚列 1, 2, 3......... 諸數之平方。至其中一數之平方較 62 大而後止。

即 7^2 較 62 小。而 8^2 較 62 大。故必臚列至 8 之平方止。

次臚列 7 與 8 間之諸數。如 7.1, 7.2, 7.3 ....

7.9 之平方。亦至較 62 大而後止。

即 $(7.8)^2$ 較 62 小。而 $(7.9)^2$ 較 62 大。故必臚列至 (7.8) 之平方止。

復於 7.8, 與 7.9 之間臚列 7.81, 7.82............以至 7.89 之平方。至較 62 大而後止。即 $(7.83)^2$ 較 62 小。而 $(7.84)^2$ 較 62 大。故必臚列至 7.84 之平方止。

依此方法。次第求之。則在各兩平方數間。皆有 62 可知。而兩平方數次第相差甚微。則其間所有 62 之數。次第與此兩平方數略相似。

兩平方數。依上法次第求之。終不能全與 62 之値同。然次第所差甚微。終必至於極近可知。故 62 之平方根。雖不得其全同之値。然細求之。必能得其精密之根。斷斷然矣。故依上之方法累求之。必得其精密之値。即可稱爲 62 之平方根。

同理亦可求得他方根。

由此類推。某整數或分數之 n 方根。恒能求得。

(162). **本則之不盡根** 不盡根之法則。亦爲代數學之本則。

在第二編中。代數學之本則。已論文字之整數,分數。且已證其合理。而此編。即不盡根。亦可證其合理。

例 由根原之法則 $-(-a)=+a$。

$a=2,\ \frac{1}{2}$ 或 $\sqrt{2}$。得能證其合理。

$$-(-2)=+2$$

$$-\left(-\frac{1}{2}\right)=+\frac{1}{2}$$

$$-(-\sqrt{2})=+\sqrt{2}$$

今試用交換法則以研究之。

即證 $$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{b}\times\sqrt[n]{a}$$

今命 x, y, p, q 四數爲整數或爲分數。而 x 與 y 之間有 $\sqrt[n]{a}$。p 與 q 之間有 $\sqrt[m]{b}$。

即 $$x>\sqrt[n]{a}>y$$

$$p>\sqrt[m]{b}>q$$

而 x 及 y 之差與 p 及 q 之差。可任意小至無限。

又因 x, y, p, q 爲整數或爲分數。則

$$\left.\begin{aligned} x\times p=p\times x \\ y\times q=q\times y \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{根原之法則}$$

故以前兩不等式相乘。則

$$x\times p>\sqrt[n]{a}\times\sqrt[m]{b}>y\times q$$

或
$$p\times x>\sqrt[m]{b}\times\sqrt[n]{a}>q\times y$$

又如前述。x 及 y 與 p 及 q 之差。可任意小至無限。故 $x\times q$ 與 $y\times q$ 之差殆等於零。即求 $\sqrt[n]{a}$ 及 $\sqrt[m]{b}$ 之根至無限時。殆如 $x\times p=y\times q$。

又如上述。因 $p\times x=x\times p$ 及 $q\times y=y\times q$。乃

$$x\times p=y\times q=p\times x=q\times y$$

故
$$x\times p=\sqrt[n]{a}\times\sqrt[m]{b}=y\times q$$

$$p\times x=\sqrt[m]{b}\times\sqrt[n]{a}=q\times y$$

由是
$$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{b}\times\sqrt[n]{a}$$

據上之方法。亦能證明次例。

$$a-(\sqrt[m]{b}-\sqrt[n]{c})=a-\sqrt[m]{b}+\sqrt[n]{c}$$

命 x, y, p, q 爲整數或爲分數。而定之如次。

$$\left.\begin{aligned} x>\sqrt[m]{b}>y \\ p>\sqrt[n]{c}>q \end{aligned}\right\}\qquad\therefore\ x-y>y-p$$

由是
$$a-(x-q)<a-(\sqrt[m]{b}-\sqrt[n]{c})<a-(y-p)$$

$$a-x+q<a-\sqrt[m]{b}+\sqrt[n]{c}<a-y+p$$

但 x 及 y 之差與 p 及 q 之差。可任意小至

無限。故 $x\times p$ 及 $y\times q$ 之差與 $p\times x$ 及 $q\times y$ 之差。亦可任意小至無限。

故殆如　$a-(x-q)=a-(\sqrt[m]{b}-\sqrt[n]{c})=a-(y-p)$

$$a-x+q=a-\sqrt[m]{b}+\sqrt[n]{c}=a-y+p$$

但 x, y, p, q 爲整數或爲分數。故

$$a-(x-q)=a-x+q \text{ 及 } a-(y-p)=a-y+p$$

$$\therefore \quad a-(\sqrt[m]{b}-\sqrt[n]{c})=a-\sqrt[m]{b}+\sqrt[n]{c}$$

(163). 方乘及方根之區別。凡各數量。其平方根有二。其立方根有三。前既證之矣。然各數量之 n 方根。則必各有 n 個。此即方根與方乘最著之異點也。

何則。因各數量之某方乘僅有一故也。

〔增補〕 如 64 之平方根。爲 $\sqrt{64}$, 有 8 及 -8 貳根。立方根爲 $\sqrt[3]{64}$, 有 4, $4\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)$, $4\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)$ 三根。

然 2 之平方根 $2^2=4$

2 之立方根 $2^3=8$

2 之 n 方根爲 2^n 之一根。

故求壹數之方乘則甚易。而求其方根則甚難。

(164). 積之 m 方乘。等於其因子 m 方乘之積。已示於 159 章。

即 $(abc\ldots\ldots\ldots\ldots)^m=a^mb^mc^m\ldots\ldots\ldots\ldots$

然亦可據不盡根及代數學根原之法則以證明之。

如 $(\sqrt{a}\times\sqrt{b}\times\sqrt{c}\times\ldots\ldots\ldots)^2=(\sqrt{a})^2\times(\sqrt{b})^2\times(\sqrt{c})^2\ldots\ldots\ldots$

$$=a\times b\times c\times\ldots\ldots\ldots\ldots$$

是故 $\sqrt{a}\times\sqrt{b}\times\sqrt{c}\ldots\ldots\ldots=\sqrt{(a\times b\times c\times\ldots\ldots\ldots)}$

是故 $\sqrt{a}\times\sqrt{b}\times\sqrt{c}\ldots\ldots\ldots$ 等於 $abc\ldots\ldots\ldots$ 平方根之壹。即謂 $a, b, c\ldots\ldots\ldots$ 之各壹平方根之積等於 a, b, c 之積之壹平方根。

由此推之。可得他之方根。

即 $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}\ldots\ldots\ldots=\sqrt[n]{abc\ldots\ldots\ldots}$ 又得二證如次

〔第壹〕 證 $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\times\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\times\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\times\ldots\ldots\ldots=\frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n}=\frac{a}{b}$$

$$\therefore\quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

〔第貳〕 證 $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$

$$(\sqrt[n]{a^m})^n=a^m,\quad (\sqrt[np]{a^{mp}})^{np}=a^{mp}=(a^m)^p$$

由是 $$(\sqrt[n]{a^m})^{np}=(\sqrt[np]{a^{mp}})^{np}$$

$$\therefore\quad \sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$$

故方根及方乘各以同數乘之。其值不變。又