



21世纪高等院校教材

数理经济学

茹少峰 编著



科学出版社

21 世纪高等院校教材

数理经济学

茹少峰 编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

数理经济学是运用数学模型进行经济分析、解释经济现象、描述经济学理论的一门学科,是经济学专业的核心课程。本书共 10 章,主要介绍数理经济学的基础内容,包括以下几点:数理经济学概述,简述数理经济学的定义、诞生和发展、研究方法和基本问题等;微积分中的函数、极限和导数概念及如何分析经济问题;均衡分析中的基本方法——静态分析与比较静态分析;最优化模型及其在局部均衡分析中的应用,包括无约束最优化、等式约束最优化和不等式约束最优化;对偶理论在经济学中的应用;一般均衡分析及其数学模型;动态经济分析的数学方法和应用。

本书既可作为高等院校经济管理专业本科高年级学生和研究生在学习用书,也可供相关领域的科研工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

数理经济学/茹少峰编著. —北京:科学出版社,2014. 1

21 世纪高等院校教材

ISBN 978-7-03-039298-5

I. ①数… II. ①茹… III. ①数理经济学-高等学校-教材 IV. ①F224. 0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 301523 号

责任编辑:张 凯 / 责任校对:钟 洋

责任印制:阎 磊 / 封面设计:蓝正设计

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

化学工业出版社印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2014 年 1 月第 一 版 开本:787×1092 1/16

2014 年 1 月第一次印刷 印张:16

字数:376 000

定价:35.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

现代经济学的基本特征在于其分析过程中融入数学的分析方法,而数理经济学恰恰是介绍如何应用数学工具分析经济理论的学科,是运用数学概念和模型来表述、论证、演绎经济学理论和经济现象的学科。西方经济学中的宏微观经济学以经济理论为研究内容,而数理经济学以研究经济理论的分析方法为主要内容;计量经济学运用数学模型、统计数据、概率论和统计学知识进行经济预测,而数理经济学为其数学模型的科学性提供支撑,因此,数理经济学的学习是掌握中级、高级宏微观经济学的必要条件,也是学好计量经济学的必修课程。而且经济学的研究亦呈现出数据化、模型化的特点,因此,对于培养现代经济学研究人才来讲,不仅要熟悉现代经济学理论,更要掌握现代数理经济学分析方法。

西北大学经济管理学院数理经济学研究起步比较早。1981年,著名学者罗章龙、科学家钱学森、中国科学院学部委员茅以升,对西北大学经济管理学院教师胡传机将物理学中的结构耗散理论和协同学理论应用到经济学研究中给予高度评价,并指出将经济学研究与自然科学研究相结合的发展路径。“1982年2月22日到3月2日在西北大学经济管理学院召开的数量经济学年会,是我国改革开放在经济学上的一个里程碑。有许多天才的青年经济学家出席,他们后来成为主流经济学在我国的开路先锋,有的还产生了世界性的影响。^①”

参加这次会议的主要研究人员和报告的题目如下:杨小凯,“经济学和数学”;张维迎,“马克思主义和数量经济学的关系”;王国乡,“马克思主义的平均分析与边际分析的关系”;田国强,“联立方程组模型的识别问题”;胡传机,“协同论的应用”;茅于軾,“择优分配原理”;王书瑶,“乘法法需要深入研究”;钱志坚(小组长)和史树中,“介绍现代数理经济学”;于清文,“数量经济学的理论与实践”;尚衍慎,“国内市场轴承需求预测”;冯文权,“市场预测和经营决策的马尔可夫方法”;王弼和刘建长,“上海服装市场需求预测初探”;周述实,“数量经济学的方法论”;何练成和张纪岳,“协同论在微观经济学中的应用”。与会人员还有付金水、张宣三、张钟俊、侯先荣、张守一、晏清、张今声、仇家铸、刘世锦等。

可惜这次会后西北大学经济管理学院没有把当时看来紧跟学术前沿的数量经济学研究坚持下去。直到2008年开办“数理经济学实验班”,才重新恢复数量经济学的相关研究。“数理经济学实验班”旨在培养应用数学方法分析经济学理论是现代经济学人才,数理经济学课程就成为专业核心课程,另外,在西北大学经济管理学院1998年设立的“经济学基地班”教学计划中增设了“数理经济学”课程。从那时起,笔者就从讲授运筹学相关课程转向研究和讲授数理经济学相关课程,并在参考国内外大量数理经济学教材和著作的基础上,结合教学实践中出现的问题,组织编写数理经济学讲义,经过连续5年的教学实

^① 茅于軾:《忆1982年西安数量经济学会》,引自茅于軾先生的博客

践和反复修改,最终形成本书。

近年来,国内外出版了大量数理经济学教材,本书与已出版的同类书相比,具有如下特点:

(1) 章节安排上,按照“数学原理—经济学应用”的结构进行内容组织,先介绍数学原理,然后举例说明这些原理是如何在经济学中应用的,力图把数学原理与经济学理论有机结合起来,改变现有数理经济学教材中数学与经济学分离的现状。例如,从宏观、微观经济学中选取的案例并不一定是这些方法的最新应用,但是却是把经济学与数学有机结合起来经典应用。

(2) 在数学原理介绍上,涉及微积分、线性代数、常微分方程、差分方程等内容,由简到繁、由易到难,并且简化和省略了定理的证明,突出其应用性和经济学理论的结合性,并且介绍了经济分析中的现代数学方法的具体运用,如包络定理、对偶理论。

(3) 兼顾经济学理论体系数理逻辑的系统性,从局部均衡分析、一般均衡分析、动态均衡分析角度介绍数学方法的应用,凸显经济学理论数理逻辑的系统性与逻辑性,也体现出研究问题的复杂性和分析方法复杂性的统一。

(4) 在书的内容上,选取基本的经济分析方法,主要解决学生经济学理论学习和数学方法学习分离的问题,旨在培养学生用数学语言描述经济问题的思维方式和能力,使学生能够掌握现代经济学的数理形式与数理方法。

在本书的编导过程中,得到了多方面的支持与帮助,感谢任保平教授对本书框架提出的建议和有关经济学内容的校对,感谢黎炜教授对第 10 章的校对,感谢欧阳葵博士对数学规划方面的校对,感谢笔者的学生张振海、于娜娜、朱莹、雷震宇、曹素溪、王茹、王欢、姚海博等对本书绝大部分内容的录入,感谢薛西锋教授的学生薛鑫对第 10 章差分方程内容的录入。本书在编写过程中也得到同行的支持和热情帮助,科学出版社张凯编辑工作耐心细致,在此向他们一并表示衷心感谢。最后要特别感谢陕西省重点学科理论经济学建设项目的支持。

优秀的教材一定要具备可读性、系统性和规范性,笔者虽然竭尽全力使本书达到以上要求,但是总感觉力不从心,书中内容定有不足之处,敬请读者不吝赐教。

编 者

2013 年 11 月

目 录

前言

第 1 章	
	数理经济学概述 1
1.1	数理经济学的定义 1
1.2	数理经济学的诞生和发展 2
1.3	数理经济学的研究方法和基本问题 7
1.4	数理经济学与计量经济学的关系 8
1.5	数理经济学的内容与地位 10
第 2 章	
	微积分及其经济学应用 12
2.1	一元函数和多元函数 12
2.2	经济学问题的数学描述 12
2.3	水平曲线 15
2.4	极限 16
2.5	极限的应用——连续复利 17
2.6	一元函数的导数 19
2.7	二元函数求偏导 21
2.8	多元函数的求导 22
2.9	隐函数 23
2.10	边际、弹性和增长率 27
2.11	水平曲线的分析 30
2.12	齐次函数和欧拉定理 32
第 3 章	
	静态分析与比较静态分析 37
3.1	静态分析与比较静态分析 37
3.2	商品市场的静态分析与比较静态分析 39
3.3	简单的国民收入决定模型的静态分析与比较静态分析 43

3.4	IS 曲线的静态分析与比较静态分析	45
3.5	LM 曲线的静态分析与比较静态分析	49
3.6	IS-LM 模型的静态分析与比较静态分析	51

第 4 章

	无约束最优化及其应用	57
4.1	一元函数求极值的必要条件与充分条件	57
4.2	二元函数求极值的必要条件与充分条件	58
4.3	多元函数求极值的必要条件与充分条件	61
4.4	凹函数与凸函数	62
4.5	无约束最优化模型应用	67
4.6	最优值函数及其比较静态分析	78

第 5 章

	等式约束最优化及其经济学应用	85
5.1	二元函数带等式约束的极值问题	85
5.2	多元函数带多个等式约束的极值问题	88
5.3	拟凹函数与拟凸函数	93
5.4	极值问题的比较静态分析	96
5.5	效用极大化问题	103
5.6	支出极小化问题	110
5.7	斯勒茨基等式的传统推导	115
5.8	企业利润极大化问题	116
5.9	生产成本极小化问题	120

第 6 章

	不等式约束的极值问题及其经济学应用	130
6.1	简单不等式约束极值问题的图解法	130
6.2	约束规格	132
6.3	库恩-塔克必要条件	132
6.4	对一般库恩-塔克条件的认识	142
6.5	库恩-塔克充分条件	145
6.6	效用最大化问题和支出最小化问题	153
6.7	成本最小化问题和收益最大化问题	159
6.8	比较静态分析与包络定理	163

第 7 章		
	对偶理论的经济学应用	171
7.1	对偶问题的定义及性质	171
7.2	消费者的效用极大化和支出极小化问题	173
7.3	斯勒茨基等式的现代推导	177
7.4	厂商的产出极大化问题与成本极小化问题	179
第 8 章		
	一般均衡分析的线性规划模型	184
8.1	线性规划模型	184
8.2	两个变量的线性规划问题的图解法	185
8.3	单纯形法	189
8.4	对偶问题	193
8.5	线性规划的经济学应用	196
第 9 章		
	一般均衡分析的非线性规划模型	202
9.1	一般非线性规划模型	202
9.2	两商品和两要素的非线性规划模型	202
9.3	两商品和两要素的非线性规划模型解释斯托尔帕-萨缪尔森定理	208
9.4	两商品、要素模型的应用	213
第 10 章		
	动态经济分析	218
10.1	微分方程	218
10.2	微分方程在经济学中的应用	227
10.3	差分方程	231
10.4	差分方程在经济学中的应用	236
10.5	动态最优化引论	237
10.6	动态最优化问题在经济学中的应用	239
	主要参考文献	246

第 1 章 数理经济学概述

经济分析离不开数学工具的应用,其目的是要简明、准确和更加有逻辑性地揭示经济理论和经济现象,而数理经济学恰是介绍经济分析中数学方法如何应用的学科,或者说数理经济学是经济理论用数学模型表述、推理的学科。因此,数理经济学是掌握高级经济学理论和开展经济研究的基础学科。

本章对数理经济学的定义、诞生和发展、研究方法、基本问题和研究的内容进行介绍,目的是使读者了解经济分析方法的形成过程,了解数学和经济学的联系,帮助读者掌握数理经济学的研究内容和方法。

1.1 数理经济学的定义

1838年法国著名经济学家、数学家、哲学家古诺(Antoine Augustin Cournot)出版《财富理论的数学原理研究》一书,在该书中第一次比较系统地运用数学方法分析经济问题。时至今日,应用数学原理和分析方法研究经济学问题已有近200年的历史。数学的许多分支,如微积分、线性代数、概率论与数理统计、线性规划、非线性规划、博弈论、泛函分析、拓扑学、随机过程、最优控制论等都在经济学中得到了成功的应用,并推动着经济学的发展。应用数学方法研究经济问题属于数理经济学范畴,但是数理经济学(mathematical economics)至今尚无统一的定义,以下是几种有代表性的定义。

美国经济学家阿罗(Kenneth J. Arrow)等在《数理经济学手册》一书中指出:数理经济学是包括数学概念和方法的经济学,特别强调数学在经济理论中的各种应用。

蒋中一(Alpha C. Chiang)、凯尔文·温赖特(Kevin Wainwright)在《数理经济学的基本方法》一书中指出:数理经济学是一种经济分析方法,是经济学家利用数学符号描述经济问题,运用已知的数学定理进行推理的一种方法。就分析的具体对象而言,它可以是微观或宏观经济理论,也可以是公共财政、城市经济学或其他学科方面的理论。

路甬祥、杜瑞芝分别在《现代科学技术大众百科——科技与社会卷》和《数学史辞典》中指出:数理经济学是运用数学符号、数学方法和数学图形表述和论证经济现象及其相互依存关系的一门综合性边缘学科,其主要研究经济活动中的数量关系并从中寻找规律。

杨小凯在《数理经济学基础》中指出:数理经济学主要是进行定性分析的理论经济学,它研究最优经济效果、利益协调和最优价格的确定这些经济学基本理论问题,为经济计量学、管理科学、经济控制论提供模型框架、结构和基础理论,它实在是经济学的基础之基础。

由以上定义可以看出:数理经济学主要是介绍数学方法如何应用到经济分析中,如经济问题如何用数学模型表示,一个变量的变化如何影响另一变量的变化等问题。因此,数理经济学与其说是一门经济学分支学科,不如说它是一种经济学分析方法论。

1.2 数理经济学的诞生和发展

数理经济学的诞生和发展是数学在经济学中应用的过程,也是经济学发展的必然结果。因为经济学家不仅仅要关心现实生活中的许多经济现象,更要对经济现象的数量,如价格、产量、收入、就业率、失业率、消费者价格指数(CPI)、国内生产总值(GDP)等进行度量,要和数量打交道,便要研究数量之间的变化与关系,以此来把握经济运行规律。然而,经济学经历了漫长的发展过程后才真正青睐数学。今天经济学已是社会科学领域成功运用数学的学科之一,恩格斯(Friedrich Von Engels)曾指出“一门学科只有成功运用了数学,它才成为科学。”正是因为经济学融入数学,1969年瑞典皇家科学院才设立诺贝尔经济学奖。

由阿罗等召集世界数十位著名数理经济学家编撰的《数理经济学手册》,将数理经济学的诞生与发展分为相互衔接的三个主要时期:以微积分为基础的边际主义时期(1838~1947年);集合论和线性模型时期(1948~1960年);当前的综合方法时期(1961年至今)。

1.2.1 以微积分为基础的边际主义时期(1838~1947年)

最早比较系统地运用数学方法分析经济问题的是法国学者古诺(1801—1877,拉普拉斯和泊松的学生,从事概率论的研究)。古诺在《财富理论的数学原理研究》一书中,最早将古典经济学理论用数学语言进行描述。例如,他提出单个市场上的消费行为理论,通过对需求的研究发现,商品需求量由给定价格的销售过程决定,通过连续函数 $D=F(P)$ 可以表明销售量与价格的关系;发现随着价格的下跌,需求量是增长的,随着价格的上涨,需求量是减少的,等等。因此,古诺《财富理论的数学原理研究》一书的发表标志着数理经济学的诞生,他也被认为是数理经济学的创始人。

正如杰拉德·德布罗(Gerard Debreu,1921—2004,美籍法裔经济学家和数学家)在1983年的诺贝尔经济学获奖讲演中所说:“如果要对数理经济学的诞生选择一个象征性的日子,我们会以罕见的一致意见选定1838年,古诺是作为最早建立阐明经济现象的数学模型的缔造者而著称于世的。”

赫尔曼·海因里希·戈森(Hermann Heinrich Gossen,1810—1858,德国经济学家)和卡尔·门格尔(Carl Menger,1840—1921,奥地利经济学家)被认为是边际效应学派的先驱者。戈森在他的著作中写下了大量数学符号、公式、图表,同时他自诩为“经济学史上的哥白尼”,而他的著作却无人理会。门格尔则出于对数学的无知,不了解牛顿和莱布尼兹创立的并已使用了200年的微积分,于1871年重新发明所谓“边际分析法”。这种方法包含一种模糊的数学语言,但阐明了清晰的边际效用学派的经济学,到了后一代的经济学家才搞清楚,门格尔所说的各种“边际”,原来就是数学家所说的“导数”或“偏导数”。

然而,实际上数理经济学真正诞生是在1874年1月,在瑞士洛桑大学拥有教席的法国经济学家瓦尔拉斯(Léon Walras,1834—1910)发表了论文“交换的数学理论原理”,首次公开他的一般经济均衡理论中的主要观点。虽然人们通常认为数理经济学的创

始人是法国数学家、经济学家和哲学家古诺,但是对今日的数理经济学影响最大的是瓦尔拉斯的一般经济均衡理论。直到现在,一般经济均衡理论仍然是唯一对经济整体提出的理论。一般经济均衡理论可以这样来简述:在一个经济体中有许多经济活动者,其中一部分是消费者,另一部分是生产者;消费者追求消费的最大效用,生产者追求生产的最大利润,他们的经济活动分别形成市场上对商品的需求和供给;市场的价格体系会对需求和供给进行调节,最终使市场达到一个理想的一般均衡价格体系;在这个体系下,需求与供给达到均衡,而每个消费者和每个生产者也都达到了他们的最大化要求。瓦尔拉斯把上述理论表达为以下数学问题。假定市场上一共有 l 种商品,每一种商品的供给和需求都是这 l 种商品的价格的函数,于是这 l 种商品的供需均衡就得到 l 个方程。但是价格需要有一个计量单位,或者说实际上只有各种商品之间的比价才有意义,因而这 l 种商品的价格之间只有 $l-1$ 种商品的价格是独立的,为此,瓦尔拉斯又加入了一个财务均衡关系,即所有商品供给的总价值应该等于所有商品需求的总价值。这一关系被称为“瓦尔拉斯法则”,它被用来消去一个方程。这样,瓦尔拉斯最终就认为,他得到了求 $l-1$ 种商品价格的 $l-1$ 个方程所组成的方程组。按照当时已为人们熟知的线性方程组理论,这个方程组有解,其解就是一般均衡价格体系。其实,方程组如果不是线性的方程组,方程组中的方程个数与方程是否有解就没有什么直接关系。于是,从数学的角度来看,长期以来瓦尔拉斯的一般经济均衡体系始终没有坚实的理论基础。

这个问题经过数学家和经济学家 80 年的努力才得以解决。大数学家冯·诺依曼(J. von Neumann, 1903—1957)曾在 20 世纪 30 年代投身于一般经济均衡的研究,并因此提出他著名的经济增长模型;1973 年诺贝尔经济学奖获得者里昂惕夫(W. Leontiev, 1906—1999)在 20 世纪 30 年代末开始投入-产出方法的研究,这种方法实质上是一个一般经济均衡的线性模型;分别获得 1970 年和 1972 年诺贝尔经济学奖的萨缪尔森(P. Samuelson, 1915—2009)和希克斯(J. R. Hicks, 1904—1989),也是因为用数学方法研究一般经济均衡问题而著称;在 1954 年给出一般经济均衡存在性严格证明的是阿罗和德布罗,他们对一般经济均衡问题给出了富有经济含义的数学模型,即利用 1941 年日本数学家角谷静夫(Kakutani Shizuo, 1911—2004)对布劳威尔不动点定理的推广,才给出一般经济均衡价格体系的存在性证明,阿罗和德布罗也因此先后于 1972 年和 1983 年获得诺贝尔经济学奖。

英国边际学派的第二代研究人员中有两位代表人物。一位是埃奇沃思(Edgeworth, 1845—1926),这位牛津大学教授力图用抽象的数学刻画边际效用理论。由于他把效用看作完全主观的东西,以至于他的最重要的经济学著作却有着一个《数学心理学》(Mathematical Psychics)(1881 年)的怪名称。这本书被德布罗认为是对当代数理经济学最有影响的著作之一。其中,描述商品交换的所谓的“埃奇沃思盒”(Edgeworth box),现在几乎每本经济学教科书都会提到;而所谓的“埃奇沃思猜想”则是 20 世纪 70 年代数理经济学研究最热门的课题。另一位是名气更大的马歇尔(Alfred Marshall, 1842—1924),他在 1861 年进入剑桥大学数学系,1865 年已成为一名数学家,但后来他却成了经济学“剑桥学派”的宗师。今天的微观经济学教科书中的那些既直观易懂,又严谨的曲线图,多半出于这位先生之手。他的学生凯恩斯(John Maynard Keynes, 1883—1946),称得上是对当代

西方经济学和西方经济政策影响最大的人物之一。凯恩斯是以数学家的身份开始其经济学研究的。他甚至还在1921年编写了一本《概率论》，该书称得上是那个时代最重要的概率论和或然逻辑方面的著作之一。

洛桑学派的第二代研究人员中的代表人物，是出生在巴黎的意大利人帕累托(Vifredo Pareto, 1848—1923)，作为经济学家，他是大器晚成。他做过20年地地道道的铁路和采矿工程师，甚至还当过意大利钢铁公司的总经理。经济学家潘塔莱奥尼(Maffeo Pantaleon, 1857—1924)的影响使他对经济学产生了兴趣，开始用心研究瓦尔拉斯的一般经济均衡理论。1891年他会见了瓦尔拉斯，后者大为惊讶自己竟有这样一位知音，瓦尔拉斯当即决定遴选帕累托作为他在洛桑的学术继承人。从1893年起帕累托就正式由工程师转为洛桑大学的经济学教授。洛桑学派应该说是到了那时才正式形成的，并且在相当长的时间里，帕累托的影响远超过瓦尔拉斯。人们认为帕累托是对理论经济学引入科学思想和方法最多的一个人，他在这方面的成就完全可以与庞加莱(Jules Henri Poincare, 1854—1912)在自然科学方面的成就媲美。这得益于他曾是个在数学上训练有素的工程师。帕累托的科学思想和科学方法均以数学为基础，他对一般经济均衡的研究几乎完全是数学研究。与在经济学文献中相同，“帕累托最优条件”在今天似乎也同样频繁地出现在数学文献中。他对效用的基数和序数的区分与集合论的基数和序数的研究几乎是同步的。所谓描述社会收入不均的“帕累托法则”可以概括为一个幂函数表达式： $N = Ax^{-a}$ ，其中 N 是收入高于 x 的人数，而 A 与 a 是常数。这个法则也为后来的计量经济学研究提供了范例。“数理经济学”这个名词首次公开使用是在1911年。当时帕累托将为法国《数学百科全书》提供的一篇文章的题目命名为“数理经济学”。今天这篇文章已成了经典，而从杰文斯(Willam Stanley Jevons, 1835—1882)开始提出的“数学经济学”，也从这时起作为一门学科的名称流传开来。

美国边际效用学派的奠基者是克拉克(John Bates Clark, 1847—1938)。在这个学派的第二代研究人员中，出现了一个真正的数学家，他就是欧文·费歇尔(Irving Fisher, 1867—1947)。费歇尔是耶鲁大学的数学教授，编写过多本数学方面的著作，也同样是因一位经济学家的影响，使其对经济学产生了兴趣。1892年，费歇尔编写了一本叫做《价值与价格的数学研究》的著作，颇为成功，1895年以后就正式转向经济系任教。在经济学中引入数学方法的成就方面，他与帕累托齐名，而对于后来蓬勃发展的计量经济学而言，费歇尔更是一位先驱者。他因对货币理论方面的研究而被凯恩斯看作“精神上的祖父”。

奥地利边际效用学派的第二代研究人员中并没有数学家的身影。门格尔的两大门徒庞巴维克(Eugen Böhm Bawerk, 1851—1914)和维塞尔(Friedrich von Wieser, 1851—1926)既是同年，又是同窗，甚至还是连襟。他们使门格尔开创的奥地利边际效用学派发展到尽善尽美，但是在方法上则与他们的老师一样，还是继续炮制边际分析方法。门格尔晚年得子，小门格尔(与他父亲一样也叫卡尔，但是有Carl和Karl之别)后来成为颇有影响的数学家。小门格尔早年曾去荷兰当过布劳维的助教，后来的主要研究内容也是拓扑学，他对经济学(甚至哲学)也有一定的研究。除了整理出版他父亲的著作外，他本人最大的贡献是对带不确定性的经济学的研究。他很早就进入经济学研究领域，并不拘一格地培养学生。其名下最著名的两位学生，一位是当代最伟大的数理逻

辑学家哥德尔(Kurt Godet, 1906—1978);另一位是在罗马尼亚出生的犹太人沃尔德(Abraham Wald, 1902—1950)。正是在小门格尔的帮助下,沃尔德在1933~1936年成为第一个试图给出一般经济均衡存在性严格数学证明的人,后来他又在第二次世界大战期间成为开创统计学新局面的大统计学家。还有一位代表人物是摩根斯顿(Oskar Morgenstern, 1902—1977),他受小门格尔的影响也很大。有一次他在研究一个经济学问题时,在数学上遇到了困难,便去请教数学家切克。切克告诉他这样的问题正是冯·诺伊曼最近研究的对策论问题。就这样,冯·诺伊曼与摩根斯顿走到了一起,开始了数十年有关对策论及其在经济学中的应用的 合作研究,并在1944年写出了一本德布罗的《价值理论》,这是一本小开本的、仅114页的小书。在这之前最重要的数理经济学巨著:《对策论与经济行为》有中译本,原版是一本大开本的、640页的大书。这本书一问世就被认为是20世纪前50年人类最伟大的科学成就之一。正如德布罗所说,这本书的出现,“宣告了经济理论的深刻而广泛的转变”。有一个有趣的现象值得注意,没有人认为由冯·诺伊曼在1928年创立的对策论不是一门数学,但是今天在西方大学里的对策论教授几乎都是经济系教授,而且学生想学对策论似乎也只能去经济系。此外,冯·诺伊曼投身于经济学的研究也是在他加入奥地利学派时进行的。他用德文写的极为重要的有关一般经济均衡模型和经济增长的论文,于1937年发表在小门格尔主编的数学文集中,后来因在1945年译成英文而轰动一时,被认为是开创了当代经济增长理论的新纪元。

奥地利学派的另一位声名显赫的代表人物是熊彼特(Joseph Alois Schumpeter, 1883—1950)。由于他的思想更为敏锐,视野更为开阔,人们早已不把他仅仅当作奥地利边际效用学派的代表,而是看作当代经济学最有影响的经济学家之一。他的“创新”理论、经济周期理论虽然没有包含很深奥的数学知识,但他对经济学中融入数学方法的促进作用很大。没有他的推崇,洛桑学派和数理经济学的地位或许不会如此之高。1932年,熊彼特移居美国后,在哈佛大学任教,培养了几代经济学家,如萨缪尔森、里昂惕夫、托宾(James Tobin, 1918—2002)、索洛(Robert M. Solow, 1924—)等。1937~1941年,熊彼特当选美国经济学会主席。而在1930年成立的国际性计量经济学会和1932年开始出版的《计量经济学杂志》(*Econometrica*),也是与他的倡导分不开的。那本杂志虽然称为“计量经济学”,但实际上至今还是刊载大量数理经济学的论文,即使从1974年开始又出现了另一本《数理经济学杂志》(*Journal of Mathematical Economics*),也仍是如此。它对数理经济学和计量经济学发展的作用是无法估量的。许多具有历史意义的文献,如1954年阿罗与德布罗的一般经济均衡理论,几乎都由《计量经济学杂志》刊载。

在这一阶段研究的主要问题和形成的经济学理论主要包括以下几种。企业理论:研究企业按照一定的价格投入生产要素、提供产品过程中的行为。消费者理论:研究消费者行为准则与目的对需求的影响。一般均衡:研究供给与需求的相等问题。资源的最优配置:研究最优性的概念。一般交换理论:研究讨价还价式的交易和埃奇沃思理论。

1.2.2 集合论和线性模型时期(1948~1960年)

从第二次世界大战后,早期的以微积分为基础的数理经济学日趋成熟,数理经济学的发展以应用集合论和线性模型为主要特点。相比微积分,集合论和线性模型的运用使理论更具有一般性,这一时期的基本数学工具包括数学分析、凸集理论和拓扑学等。

纽曼(Frederic Neumann)在一篇有关经济增长的论文中,首次将集合论作为研究方法,严格分析了一般经济的均衡问题,开拓了数理经济学的新方向。而突破性进展则是由阿罗和德布罗于1954年取得的,他们二人用集合论方法,通过公理化分析,重建了瓦尔拉斯的一般经济均衡理论大厦,通过使用新的数学技巧,阿罗得出创造性的一般均衡成果。即在完全竞争条件下,且存在所有商品和服务的“超前市场”(超前市场是今天能为未来获得的货物付款,或今天接收货物答应明天付款的那些市场),存在着一个竞争的多元市场均衡。阿罗和德布罗的贡献在于强调“超前市场”的存在,并给出了一般经济均衡存在性的严格数学证明,为研究均衡理论的许多问题提供了模式。阿罗还进一步研究了现实经济生活中如何处理市场不稳定和风险,使之达到“一般均衡问题”。他提出的关于“风险”和“不稳定”的新理论被西方经济学界认为是对企业决策理论作出的重要贡献。同时,集合论的应用还表现在将数学理论运用到效用理论中。对效用理论进行重新研究,存在两套公理体系。一套是不确定环境下的效用函数公理体系,拉姆齐(F. P. Ramsey, 1926年)、冯·诺伊曼与摩根斯顿(O. Morgenstern, 1947年)、马歇尔(1950年)、赫斯坦(I. N. Herstein, 1953年)与米尔诺(J. Milnor, 1953年)等都在这方面进行了深入研究。尤其是1959年德布罗的《价值理论》一书的出版,正式宣布了公理化经济学的诞生。这部著作分七章详细论述了基于集合论基础之上的经济理论体系。它向经济工作者提供了能够接受的高度有效的数学语言,使得经济工作者可以用数学语言相互交流,并以非常经济的方式进行思考。另一套是德布罗1954年提出的确定环境下的效用函数公理体系,更加展示了公理化分析的巨大威力。因为公理化假设的明确性,人们能够清晰地界定经济理论具体情况的使用范围,并在发现原始概念新解释的基础上解决新问题。同一时期,沃尔德、阿罗、德布罗、迈克肯兹(Mvekenzie Dana Mackenzie)均在各自的理论领域运用了集合论的方法。这些光辉成就,为经济学的发展树立了一座里程碑。

1948~1960年,线性模型在经济学中的应用也取得了极大的进展。里昂惕夫的线性投入-产出模型方法渐趋成熟。他提出:“表达各种经济部门之间关系的各种系数可以用统计方法来估计,而且这些系数应充分稳定,以至可以用于比较静态分析,从而对不同经济政策的效应作出定量估计。”在里昂惕夫的论著中,主要是依据一般经济均衡理论来研究各种经济活动在数量上的相互关系,用一套线性方程组来描述经济系统内部复杂的结构关系,对构建的经济模型进行求解分析。多尔夫曼(R. Dorfman)、萨缪尔森和索洛(R. M. Solow)1958年合著的《线性规划与经济分析》及盖尔(D. Gale)1960年编写的《线性经济模型理论》两部书,把线性规划、线性一般经济均衡理论和线性经济增长理论发展到了顶峰。与此同时,对策论研究也在前进。纳什(J. F. Nash, 1950年)对于 n 人对策均衡的研究,成为基础性研究;卢斯(R. D. Luce)和雷法(H. Raiffa)在1957年出版的《对策与决策》一书又发展了动态对策论。在这一阶段研究的主要问题和形成的经济学理论包

括以下几种。一般经济均衡的严格理论体系对一般均衡体系进行了系统研究,如公理化体系的建立、均衡存在性的证明、竞争均衡和社会选择问题;现行经济模型,如里昂惕夫发明的投入-产出分析法。

1.2.3 当前的综合方法时期(1961年至今)

从1961年至今,形成多种数学方法为经济研究服务的局面。微积分、集合论与线性模型相结合,向几乎所有传统经济研究领域进行拓展,同时也开辟了其他的新领域。

20世纪70年代以后,以动态经济学和混沌经济学为代表的微分方程分析方法,成为数理经济学新的研究方向,在处理时间序列模型方面,微分方程和差分方程得到了很好的运用。在金融学领域,随着金融工程、数理金融的发展,随机控制、随机过程、随机分析方法等现代数学方法也有了极大的用武之地。

从20世纪80年代起,博弈论成为经济学新的分析方法。1994年,诺贝尔经济学奖授予了纳什(John Nash)、泽尔腾(Reinhard Selten)、海萨尼(John C. Harsanyi)三位博弈论专家,以奖励他们在推动博弈论和经济学发展融合方面的贡献。可以说,博弈论在经济学中的应用,几乎改写了整个微观经济学,也促进了经济学的其他领域极大的发展。

伴随着经济学的发展,数学的应用更加深入,包含统计计量学、数理统计、控制论、预测学在内的更广泛的学科融合在一起,广义的数量经济研究已成为现代经济学研究的新特点。

黎诣远于1987年指出,数理经济学正朝两个方向发展:一是引入时间变化参数,从静态学到动态学发展;二是引入经济统计因素,将数理经济学应用于社会经济生活,成为应用经济学。

目前数理经济学研究的主要问题有不确定性问题、对偶理论、均衡的计算、社会选择问题、不完全竞争理论等。

1.3 数理经济学的研究方法和基本问题

数理经济学通常是从一定的假设条件出发,将经济活动量转化为一个或一组变量,继而写出函数式或方程组,从而得到相应的经济现象或经济系统的数学描述,然后运用数学推理方法得出结论,这是数理经济学的一般研究方法,简言之,数理经济学研究方法就是建立经济问题的数学模型与求解模型。

经济模型是经济规律或经济理论的抽象化表述,而从经济模型到数学模型,不仅需要包括经济学问题的抽象化,还包括经济学变量的提取和量化。从经济规律得到数学模型的表述,这是数理经济学要解决的基本问题。

经济模型是一种理论框架,数学形式的模型仅仅是表述经济模型的一种方式。描述经济模型的数学模型一般由三种类型组成,即定义方程、行为方程和均衡条件。

定义方程实质上是数学恒等式,常用符号“=”表示。定义方程一般用于描述经济学概念或前提假设。例如,总利润被定义为总收益与总成本之差,定义方程就表述为 $\pi = TR - TC$,这里 π 、 TR 和 TC 分别表示利润、收益和成本;销售收入等于价格与销售量之乘积,定义方程则为 $R = PQ$,其中 R 、 Q 和 P 分别表示销售收入、销售量和价格。

行为方程描述经济现象的规律,由所研究问题内包含的经济学规律决定。行为方程在数学上是两个或两个以上变量的一种函数关系,而在经济学上,是两个或两个以上经济学变量的行为关系。例如,凯恩斯消费函数描述了个人消费是随着个人收入的递增而递增的;而弗里德曼永久收入假说描述了消费与收入的长期关系是成比例的。也就是说,行为方程本质上取决于经济学理论,不同的理论体系可能得出不同的方程,在宏观经济学领域更为显著,是不同经济学流派的差异反映在数理经济学上的主要体现。从广义上讲,行为方程还可以描述一般的制度性模型,如法律、政治与经济增长的关系等,但在行为方程描述这些变量关系之前,一定要明确经济学的前提假设。

【例 1.1】 考察下面两个成本函数

$$C = 75 + 10Q \quad (1.1)$$

$$C = 110 + Q^2 \quad (1.2)$$

式中, Q 表示产量。由于两个方程具有不同的形式,所以一个方程所假设的生产条件必然与另一个方程有明显不同。在式(1.1)中,固定成本为 75(当 $Q=0$ 时的 C 值),而式(1.2)中则为 110;在式(1.1)中,产量每增加一个单位,成本增加 10 单位,而在式(1.2)中,产量增加一个单位成本增加一个单位,但是式(1.1)和式(1.2)随产量增加成本增加的速度不同。正是通过这种行为方程的设定,才给出描述经济理论的数学表达式。

均衡条件仅出现在均衡模型中,它是联结行为方程和方程组的桥梁和纽带。例如,局部市场均衡模型中实现均衡的条件为:产品的供给等于产品的需求,即 $Q_s = Q_d$ 。在均衡模型中,通常通过均衡条件方程来求得模型的均衡解。

以上描述了列方程的一般过程,也就是建立数学模型的过程,它是描述经济理论的基本环节。解方程则应属于数学问题,当然解方程也可以运用计算机软件等现代工具和手段。对解的讨论是经济学要研究的范畴,一般从解的存在性、稳定性、合理性、可控性和一定时间到达合理轨道的可达性来研究,偏重于解的经济学含义。方程的解对应着经济学的内生变量,对数学模型解进行讨论,就是要明确内生变量如何受制于外生变量,外生变量如何决定内生变量。

1.4 数理经济学与计量经济学的关系

从西方主流经济学研究经济问题的方法论角度来看,研究成果主要包括引论、文献综述、模型、检验、结果等。这里的模型即数理模型,而检验是在数理模型的基础上,导出计量经济模型,然后利用样本数据对理论模型进行计量检验,这是计量经济学要解决的问题。总体来说,数理经济学与计量经济学的主要区别有以下三点。

首先,数理经济学是数学与经济学相结合的学科,而计量经济学是经济学、数学和统计学相结合的学科。数理经济学是经济学运用数学符号和数学方法表述、演绎,进行纯理论方面的规范研究;而计量经济学是在数理模型的基础上,运用统计数据和统计学的相关知识进行假设检验,进行经验观测的实证研究。

其次,数理经济学中的数理模型变量之间的关系是确定性的关系。例如,柯布-道格

拉斯生产函数 $Y=K^aL^b$, 产量(Y)与生产要素(L 、 K)之间的关系是确定的指数关系。而计量经济学建立的模型中变量之间的关系是统计性关系, 它仅仅是推理意义上的函数关系, 因此计量模型中都含有随机误差项。例如, 凯恩斯消费函数计量经济模型为 $Y=b_1+b_2X+\mu$, 其中 μ 为干扰项或误差项, 是一个随机变量。

最后, 数理经济学中的数学模型主要用于定性分析, 而计量经济学中的数学模型主要用于定量分析。数理经济学是运用抽象的方法, 借助数学公式和几何图形研究社会经济现象, 得出概念和理论; 计量经济学进一步要求理论转化为合适的数学模型, 运用统计技术方法, 对经济变量之间的关系进行定量估计, 以此为依据进行经济分析和预测。

可以看出, 数理经济学、计量经济学存在着差异, 但作为数量经济学体系内的两个学科其联系却相当紧密。从宏观上考虑, 数理经济学属于理论经济学范畴, 计量经济学属于应用经济学范畴, 理论经济学一直肩负着对应用经济学的指导作用, 数理经济学一般需要较高深的数学知识, 而计量经济学只用到一般线性回归方面的数学方法。从微观上考虑, 使用计量经济学研究的三个基本要素为经济理论、数据资料、计量方法。三个要素在计量经济学研究中的地位 and 作用如图 1.1 所示。

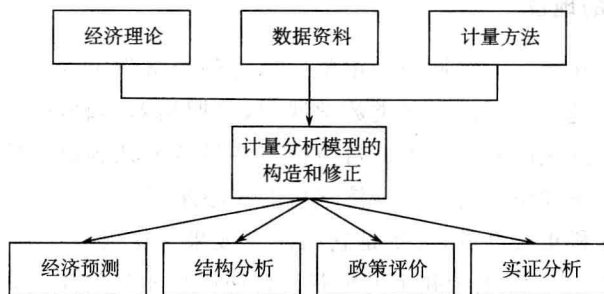


图 1.1 计量经济学三个要素的地位和作用

在图 1.1 的三个要素中, 计量方法与数理经济学的联系密切, 计量模型的构造与修正需要基本的数理经济学理论的支撑。在建立理论模型时, 一方面需要确定模型中的变量, 这一般根据经济学的理论知识来完成; 另一方面是确定模型的函数形式, 一般有两种方式, 一种是根据经济行为理论, 运用数理经济学的研究方法推导出模型的具体数学形式, 另一种是根据实际统计资料绘制被解释变量与解释变量的相关图, 由相关图显示的变量之间的相关关系确定模型的数学形式。研究经济问题的时候, 建立一个合适的模型起到了至关重要的作用。建立模型往往会遇到设立的模型无法通过检验的问题, 这给研究带来很大的困难, 研究者难以确定所采用模型的拟合度有多高, 有多种检验模型的方法, 如经济检验、统计检验、计量经济检验、预测性能检验等, 这往往需要研究者花费大量的时间, 所以对于研究者而言, 需要将数理经济学、计量经济学和统计学三门学科的知识融会贯通。因此, 未来的数量经济研究发展方向是形成数理经济学、计量经济学、统计学相关知识的一体化, 综合各方优势, 相互关联、相互交叉的研究模式。