21世纪高等院校物理实验教学改革示范教材

总主编 周 进 沙振舜

大学物理实验教程

主编 刘柯林 于 瑶 朱育群

南京大学出版社

高等院校物理实验教学改革示范教材

大学
物理实验教程

总主编　周　进　沙振舜
主　编　刘柯林　于　瑶　朱育群
副主编　王艳荣　夏　卿

南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

大学物理实验教程/刘柯林,于瑶,朱育群主编.
—南京:南京大学出版社,2012.12

21世纪高等院校物理实验教学改革示范教材

ISBN 978-7-305-10919-5

Ⅰ.①大… Ⅱ.①刘… ②于… ③朱… Ⅲ.①物理学
—实验—高等学校—教材 Ⅳ.①04-33

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第301648号

出版发行 南京大学出版社
社　　址 南京市汉口路22号　　邮　编 210093
网　　址 http://www.NjupCo.com
出 版 人 左　健

丛 书 名 21世纪高等院校物理实验教学改革示范教材
书　　名 大学物理实验教程
主　　编 刘柯林　于　瑶　朱育群
责任编辑 沙振舜　沈　洁　　编辑热线 025-83593962

照　　排 江苏南大印刷厂
印　　刷 南京人民印刷厂
开　　本 787×1092　1/16　印张11.75　字数283千
版　　次 2012年12月第1版　2012年12月第1次印刷
ISBN 978-7-305-10919-5
定　　价 24.00元

发行热线 025-83594756
电子邮箱 Press@NjupCo.com
　　　　 Sales@NjupCo.com(市场部)

编 委 会

前　言

《大学物理实验教程》是一本面向应用型高等院校工科类本科生使用的教材。本书由三江学院物理教研室教师根据多年的实验教学经验编写而成。全书共有 28 个实验，内容涵盖力、热、声、光、电实验以及课题实验。实验课时数为 24 到 48 个课时。

大学物理实验是对刚跨入大学的学生进行科学实验基本训练的必修课，在培养学生掌握实验的基础知识与方法的同时，更注重培养学生的创新能力，也就是培养学生发现问题、提出问题和解决问题的能力。发现问题要有批判精神，解决问题要有方法与手段，要有继承才能有创新。本书努力体现“夯实基础、激发兴趣、创新教育、培养能力”这样一个教学理念。

本书将实验内容分为基础性实验与探究性实验两部分。基础性实验主要强调基本物理量的测量方法（如：对称法、比较法等）、基本仪器的使用、基本实验技能、误差与数据处理方法等，学生应在规定的课时内完成基础性实验。探究性实验主要是课题实验，课题的设置以培养学生发现问题和解决问题的能力为目标，有些课题是基础性实验的延续，使学生在已经了解实验原理和熟悉操作的基础上，能更多地把注意力集中到解决问题的方法上来。课题的目的比较明确，难度不大，使学生在完成课题后有一种成就感。课题的实施采用开放实验室的形式，学生选择好自己感兴趣的课题后，利用课余时间在实验室研究与完成实验。

本书在编写过程中得到三江学院各级领导的关心和支持，在此表示感谢。

由于我们的水平有限，书中的缺点和错误恳请读者批评指正。

编者

2012 年 11 月

目 录

第 1 章

测量误差与数据处理方法

§1.1 测量与误差

1.1.1 测量与测量分类

物理学是一门实验科学。物理实验不仅要定性观察各种物理现象，更重要的是找出有关物理量之间的定量关系。为此就需要进行测量。测量的意义就是将待测的物理量与一个选为标准的同类量进行比较，得出它们之间的倍数关系。选为标准的同类量称为单位，倍数称为测量数值。由此可见，一个物理量的测量值等于测量数值与单位的乘积。例如，我们说测得实验桌的长度为 1.504 m，则基本单位是 m，而桌子的长度是基本单位的 1.504 倍(数值)。显然数值的大小与选用的单位有关，选择不同的单位，相应的测量数值就有所不同。单位愈大，测量数值愈小，反之亦然。因此，我们在给出某一待测量的结果时，必须同时给出数值和单位，两者缺一不可。

测量可分为两类：一类是直接测量，如用直尺测量长度，以表计时间，用天平称质量，用安培表测电流等；另一类是间接测量，是根据直接测量所得到的数据，由一定的公式，通过运算得出结果，例如直接测出单摆的长度 l 和单摆的周期 T，运用公式 $g=4\pi^2 l/T^2$，求得重力加速度 g。在物理量的测量中，绝大部分是间接测量，但直接测量是一切测量的基础。不论直接测量或间接测量，都需满足一定的实验条件，按照严格的方法及正确地使用仪器，才能得出应有的结果。因此，在实验过程中，一定要了解实验的目的，正确地使用仪器，细心地进行操作、读数和记录，以达到巩固理论知识和加强实验技能训练的目的。

1.1.2 测量误差和误差分类

物理量在客观上存在确定的数值，称为真值。然而，在实际测量时，由于实验条件、实验方法和仪器精度等的限制或不完善，以及实验人员技术水平的原因，使得测量值与客观上存在的真值之间有一定的差异。测量值 x 与真值 a 的差值称为测量误差 Δx，简称误差。即

$$误差(\Delta x) = 测量值(x) - 真值(a)$$

误差 Δx 是一代数值，当 $x \geqslant a$ 时，$\Delta x \geqslant 0$；当 $x < a$ 时，$\Delta x < 0$。

任何测量都不可避免地存在误差，所以一个完整的测量结果应该包括测量值和误差两个部分。既然测量不能得到真值，那么怎样才能最大限度地减小测量误差并估算出误差的范围呢？要回答这些问题，首先要了解误差产生的原因及其性质。测量误差按其产生的原因与性质可分为系统误差、随机误差和过失误差三大类。

1. 系统误差

系统误差的特点是有规律性的，测量结果都大于真值，或者都小于真值。在测量条件改变时，误差也按一定规律跟着变化。

系统误差来源有下列几个方面：

(1) 由于测量仪器的不完善、仪器不够精密或安装调整不妥。如刻度不准、零点不对、砝码未经校准、天平臂不等长、应该水平放置的仪器没有放水平等。

(2) 由于实验理论和实验方法的不完善，所引用的理论与实验条件不符。如在空气中称质量而没有考虑空气浮力的影响，测长度时没有考虑温度使尺长改变，量热时没有考虑热量的散失，测电压时未考虑电压表内阻对电路的影响，标准电池的电动势未作温度修正等。

(3) 由于实验者生理或心理特点、缺乏经验等而引入的误差。例如有些人习惯于侧坐斜视读数，眼睛辨色能力较差等，使测量值偏大或偏小。

系统误差的消除或减小是实验技能问题，应尽可能采取各种措施将它降低到最小程度。例如将仪器进行校正，改变实验方法或者在计算公式中列入一些修正项以消除某些因素对实验结果的影响，纠正不良实验习惯等。

能否识别和降低系统误差与实验者的经验和实际知识有密切的关系。学生在学习过程中要逐步积累这方面的感性知识，结合实验的具体情况对系统误差进行分析和讨论。

2. 随机误差(即偶然误差)

在相同条件下，对同一物理量进行多次重复测量，即使系统误差减小到最小程度之后，测量值仍然会出现一些难以预料和无法控制的起伏，而且测量值误差的绝对值和符号在随机地变化着。这种误差称为随机误差。

随机误差来源于人们视觉、听觉和触觉等感觉能力的限制，以及实验环境偶然因素的干扰。例如温度、湿度、电源电压的起伏、气流波动以及振动等因素的影响。从个别测量值来看，它的数值带有随机性，好像毫无规律。但是，如果测量次数足够多的话，就会发现随机误差遵循一定的统计规律，可以用概率理论来估算。下面所讨论的内容均属于随机误差。

3. 过失误差

在测量中还可能出现错误，如读数错误、记录错误、操作错误、估算错误等。错误已不属于正常的测量工作范畴，应当尽量避免。克服出现错误要端正工作态度，严格工作方法。可用和另一次测量结果相比较的办法来发现错误，或者运用异常数据剔除准则来剔除异常数据。

§1.2 随机误差的高斯分布与标准误差

随机性是随机误差的特点。也就是说，在相同的条件下，对同一物理量进行多次重复测

量，每次测量值的误差时大时小，对某一次测量值来说，其误差的大小与正负都无法预先知道，纯属偶然。但是，如果测量次数相当多的话，随机误差的出现就服从一定的统计规律。根据实验情况的不同，随机误差出现概率随误差大小的分布规律有高斯分布（又叫正态分布）、t 分布、均匀分布以及反正弦分布等等。这里仅简要地介绍随机误差的高斯分布。

1.2.1　高斯分布的特征与数学表述

若测量误差主要由小误差构成，而没有一个误差占支配地位，这样的误差通常呈高斯分布。

遵从高斯分布规律的随机误差具有下列四大特点：

（1）单峰性。绝对值小的误差出现的可能性（概率）大，大误差出现的可能性小。

（2）对称性。大小相等的正误差和负误差出现的机会均等，对称分布于真值的两侧。

（3）有界性。非常大的正误差或负误差出现的可能性几乎为零。

（4）抵偿性。当测量次数相当多时，正误差和负误差相互抵消，于是误差的代数和趋向于零。

高斯分布的特征可以用高斯分布曲线表示，如图 1－2－1(a)所示。横坐标为误差 δ，纵坐标为误差的概率密度分布函数 $f(\delta)$。根据误差理论可以证明该函数的数学表述为

$$f(\delta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{\delta^2}{2\pi^2}\right) \qquad (1-2-1)$$

测量值的随机误差出现在(δ,$\delta+\mathrm{d}\delta$)区间内的可能性（概率）为 $f(\delta)\mathrm{d}\delta$，即图 1－2－1(a)中的阴影部分的面积元。上式中的 σ 是一个与实验条件有关的常数，称为标准误差。其值为

$$\sigma=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\delta_i^2}{n}} \qquad (1-2-2)$$

式中 n 为测量次数，各次测量值的随机误差为 δ_i，$i=1,2,3,\cdots,n$。可见标准误差是将各个误差的平方取平均值，再开方得到，所以标准误差又称为均方根误差。

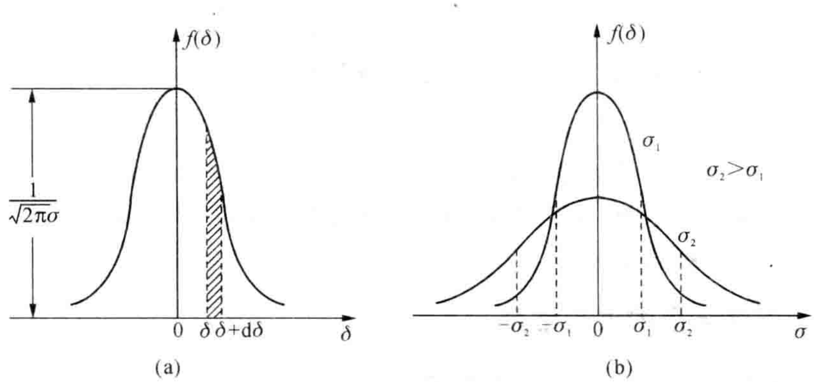

图 1－2－1　随机误差的正态分布曲线

1.2.2 标准误差的物理意义

由式(1－2－1)和式(1－2－2)可知，随机误差正态分布曲线的形状取决于 σ 值的大小，如图 1－2－1(b)所示。σ 值愈小，分布曲线愈陡峭，峰值 $f(\delta)$ 愈高，说明绝对值小的误差占多数，且测量值的重复性好，分散性小；反之，σ 值愈大，分布曲线愈平坦，峰值愈低，说明测量值的重复性差，分散性大。所以，标准误差反映了测量值的离散程度。

由于 $f(\delta)\mathrm{d}\delta$ 是测量值随机误差出现在小区间$(\delta,\delta+\mathrm{d}\delta)$的可能性(概率)，那么测量值误差出现在区间$(-\sigma,+\sigma)$内的可能性(概率)就是

$$P(-\sigma<\delta<\sigma)=\int_{-\sigma}^{\sigma}f(\delta)\mathrm{d}\delta=\int_{-\sigma}^{\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{\delta^2}{2\pi^2}\right)\mathrm{d}\delta\approx 68.3\%$$

这说明对任一次测量，其测量值误差出现在区间$(-\sigma,+\sigma)$内的可能性(概率)为68.3%。这里要特别注意标准误差的统计意义，它并不表示任一次测量值的误差就是$\pm\sigma$，也不表示误差不会超出$\pm\sigma$的界限。标准误差只是一个具有统计性质的特征量，用以表征测量值离散程度的一个特征量。

1.2.3 极限误差

与上述相仿，同样可以计算，在相同条件下对某一物理量进行多次测量，其任一次测量值的误差落在区间$(-3\sigma,+3\sigma)$内的可能性(概率)。其值为

$$P(-3\sigma,3\sigma)=\int_{-3\sigma}^{3\sigma}f(\delta)\mathrm{d}\delta=\int_{-3\sigma}^{3\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{\delta^2}{2\pi^2}\right)\mathrm{d}\delta\approx 99.7\%$$

也就是说，在 1 000 次测量中，可能有 3 次测量值的误差绝对值会超过 3σ。在通常的有限次测量情况下，测量次数很少超过几十次，因此测量值误差超出$\pm 3\sigma$范围的情况几乎不会出现，所以把 3σ 称为极限误差。

在测量次数相当多的情况下，如果出现测量值误差的绝对值大于 3σ 的数据，可以认为这是由于过失引起的异常数据而加以剔除。但是，对于测量次数较少的情况，这种判别方法就不可靠，而需要采用另外的判别准则。

§1.3 直接测量量的误差估算

在实验测量中，由于既有系统误差，又有随机误差，并且它们的来源和处理方法又不相同，为了讨论方便，我们假设已消除了系统误差，或者系统误差已减小到可以忽略的程度，即只按纯粹的随机误差来处理。

1.3.1 直接测量结果的误差估算

1. 算术平均值——测量结果的最佳估算值

尽管一个物理量的真值是客观存在，但是，即使对测量值进行了系统误差的修正，由于随机误差的存在，企图得到真值的愿望仍不能实现。那么，是否能够得到一个测量结果的最

佳值，或者说得到一个最接近真值的数值（近真值）呢？这个近真值又如何来求得？根据随机误差具有抵偿性的特点，误差理论可以证明，如果对一个物理量测量了相当多次，那么，算术平均值就是接近真值的最佳值。

设在相同条件下对一个物理量进行了多次测量，测量值分别为 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$，我们称这 n 个值为一个测量列，各次测量值的随机误差分别为 $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \cdots, \delta_n$，并用 T_x 表示该物理量的真值。根据误差的定义有

$$\delta_1 = x_1 - T_x$$

$$\delta_2 = x_2 - T_x$$

$$\delta_3 = x_3 - T_x$$

$$\cdots$$

$$\delta_n = x_n - T_x$$

将以上各式相加，得

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i = \sum_{i=1}^{n} x_i - nT_x$$

或

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - T_x \tag{1-3-1}$$

用 $\overline{x}$ 代表算术平均值，即

$$\overline{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{1-3-2}$$

式(1-3-1)写为

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_i = \overline{x} - T_x \tag{1-3-3}$$

根据随机误差的抵偿性特征，当测量次数相当多（即 n 相当大）时，由于正、负误差相互抵消，各个误差的代数和趋于零，即

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \delta_i = 0$$

于是有

$$\overline{x} \to T_x$$

由此可见，测量次数愈多，算术平均值接近真值的可能性愈大。当测量次数相当多时，算术平均值是测量结果的最佳估计值，即最近真值。测量结果就用最佳估计值 $\overline{x}$ 表示。

2. 多次测量的误差估算

当用最佳估计值表示多次测量结果时，必须同时指出其误差大小。关于误差的估算有多种方法。目前，国际上已统一采用统计学中的标准误差来评价随机误差的大小。各测量值误差的平方和的平均值的平方根称为测量列的标准误差。但由于被测量的真值是未知

的，因而各测量值的误差无法算出，标准误差只有理论上的意义。

(1) 测量列的标准偏差

实际测量中，我们能够求得最佳估计值——算术平均值，所以只能用测量值和算术平均值之差来估算标准偏差。根据算术平均值是最近真值的结论，在实际估算时采用算术平均值$\overline{x}$代替真值，用各次测量值与算术平均值的差值

$$\nu_i = x_i - \overline{x} \tag{1-3-4}$$

来估算各次的误差。差值 ν_i 称为残差。

误差理论可以证明，当测量次数 n 有限，用残差来估算标准误差时，其计算式为

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\nu_i^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} \tag{1-3-5}$$

此式称为贝塞尔公式，σ_x 称为任意一次测量值的标准偏差，它是测量次数有限多时，标准误差 σ 的一个估计值。对一个测量列来说，如果求得的标准偏差 σ_x 小，即表示测量的精密度高。其代表的物理意义为：如果多次测量的随机误差遵从高斯分布，那么，任意一次测量，测量值误差落在区间$(-\sigma_x, +\sigma_x)$内的概率(可能性)为 68.3%。或者说，它表示这组数据的误差有 68.3%的概率出现在区间$(-\sigma_x, +\sigma_x)$内。

(2) 算术平均值的标准偏差

上面关于测量列的误差估算，反映的只是 x_i 的离散性，而不是$\overline{x}$的离散性。事实上，由于重复测量的次数 n 不是无穷多，由 $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum x_i$ 求得的平均值并不是真值 T_x，所以不仅单次测量值 x_i 有误差 $\delta_i = x_i - T_x$，而且平均值本身也有误差 $\delta_{\overline{x}} = \overline{x} - T_x$，它也是随机误差，服从正态分布。用 $\sigma_{\overline{x}}$ 表示算术平均值的标准偏差，当测量次数 n 很大时，根据误差理论可以证明，平均值的标准偏差为

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n(n-1)}} \tag{1-3-6}$$

上式说明，平均值的标准偏差是 n 次测量中任意一次测量值标准偏差的 $1/\sqrt{n}$ 倍。$\sigma_{\overline{x}}$ 小于 σ_x，这个结果的合理性是显而易见的。因为算术平均值是测量结果的最佳值，它比任意一次测量值 x_i 更接近真值，误差要小。$\sigma_{\overline{x}}$ 的物理意义是：在多次测量的随机误差遵从高斯分布的条件下，真值处于区间$(\overline{x}-\sigma, \overline{x}+\sigma)$内的概率为 68.3%。

值得注意，用式(1-3-5)和(1-3-6)来估算随机误差，理论上都要求测量次数相当多。但在我们目前的实验中，往往受到时间的限制，重复测量的次数不可能很多，所以，用这两个式子估算出来的随机误差带有相当程度的近似性。另外，在测量次数较少($n<10$)时，$\sigma_{\overline{x}}$ 随着测量次数 n 的增加而明显地减小；以后，随着测量次数 n 的继续增加，$\sigma_{\overline{x}}$ 减小得愈来愈缓慢且趋近于恒定值。由此可见，过多地增加测量次数，其价值并不太大。所以在实验中，如果需要多次重复测量，一般测量次数取 5 ～ 10 次为宜。

有时会遇到测量对象本身不均匀的情况。例如，测量一根钢丝的直径。由于它各处的

直径略有微小差异，以致直径的真值各处不完全一致，所测得的各处测量值取其平均只是反映了钢丝直径的平均大小。多次测量不可能减小钢丝直径的不均匀性，而计算得到的任意一次直径测量值的标准偏差则反映出钢丝直径的不均匀程度。

(3) 测量结果的表示

当用标准偏差进行误差估算时，待测量的结果可表示为

$$x = \overline{x} \pm \sigma_{\overline{x}}(\text{单位}) \tag{1-3-7}$$

其中，$\overline{x}$为测量结果的最近真值的数值大小，$\sigma_{\overline{x}}$为误差项。这里要特别注意，不能把上式理解为最近真值就在$(\overline{x}-\sigma_{\overline{x}}, \overline{x}+\sigma_{\overline{x}})$范围内，它的意义仅表示最近真值落在区间$(\overline{x}-\sigma_{\overline{x}}, \overline{x}+\sigma_{\overline{x}})$内的概率为 68.3%。

(4) 绝对误差和相对误差

由于按式(1-3-6)来计算平均值的标准偏差比较繁，本实验中作简化处理，用平均绝对误差(简称绝对误差)Δx 来代替$\sigma_{\overline{x}}$，因而式(1-3-7)也作相应的改变。在对某一物理量进行测量时，把测量结果表示为如下形式：

$$x = \overline{x} \pm \Delta x \tag{1-3-8}$$

式中 Δx 称为测量结果的绝对误差，它与待测量有相同的单位，其大小反映测量值偏离真值的程度。

$$\Delta x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |\Delta x_i| = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i - \overline{x}| \tag{1-3-9}$$

在对不同的测量结果进行比较时，绝对误差的大小还不能客观地评价测量质量的高低。例如，用不同的仪器测量不同物体的长度时，得到结果如下：

$$l_1 = (100.0 \pm 0.5)\ \text{cm}, \qquad l_2 = (1.00 \pm 0.02)\ \text{cm}$$

如果只从绝对误差的大小来看，$\Delta l_1 > \Delta l_2$，但从绝对误差所占整个测量结果的比重来看，前者为 0.5%，而后者为 2%，这说明前者的测量质量高。所以在评价或比较不同的测量结果时，引入相对误差的概念是必要的。相对误差的定义是测量结果的绝对误差与待测量真值(最近真值)的比值，常用百分数来表示，有时也称为百分误差，即

$$E = \frac{\Delta x}{\overline{x}} \times 100\% \tag{1-3-10}$$

在表示测量的最后结果时，既要写出绝对误差，又要写出相对误差。在实验报告中表示最后结果时应写成如下形式：

$$x = \overline{x} \pm \Delta x(\text{单位}), \qquad E = \frac{\Delta x}{\overline{x}} \times 100\%$$

如果待测量有理论值或公认值，也应用相对误差表示测量结果的好坏，即

$$E_0 = \frac{|\text{测量值}(x) - \text{公认值}(x_0)|}{\text{公认值}(x_0)} \times 100\%$$

绝对误差和相对误差的数值通常只取 1～2 位数字来表示。

1.3.2 单次直接测量结果的误差估算

有些实验，由于是在动态中测量，不允许对被测量在相同条件下进行重复测量。例如，热学实验中的温度就无法多次测量。另外，在间接测量中，被测量的物理量的误差对实验结果影响较小。还有些实验对精度要求不高。在这些情况下，对被测量只测一次，那么它的误差应如何估算呢？对于单次测量，由于误差来源很多，各个实验又有各自的特点，所以难于统一标准。一般情况下单次测量量的误差可估计为仪器最小分度值的一半。

§1.4 间接测量值误差的估算——误差传递

在物理实验中，除直接测量外，极大部分实验都是经过间接测量获得最终结果的。所谓间接测量就是以直接测量为基础，按某种函数关系求出待测量。由于各个直接测量量有误差，这些误差必然影响到间接测量量，这就是误差传递，其计算基础就是多元函数的微分。各直接测量量的误差与间接测量量的误差之间的关系式，称为误差传递公式。

我们以二元函数为例来介绍误差传递公式。设 $y=F(x_1,x_2)$，其中 x_1,x_2 为两个直接测量量，y 为间接测量量。将各直接测量量的算术平均值代入公式，即可求出间接测量量的最佳估计值，即

$$\overline{y}=F(\overline{x}_1,\overline{x}_2) \tag{1-4-1}$$

当考虑各直接测量量的误差时，间接测量量也有误差，所以有

$$\overline{y}\pm\Delta y=F(\overline{x}_1\pm\Delta x_1,\overline{x}_2\pm\Delta x_2) \tag{1-4-2}$$

按泰勒公式展开上式，并略去二次以上各项得

$$\overline{y}\pm\Delta y=F(\overline{x}_1,\overline{x}_2)+\frac{\partial F}{\partial x_1}(\pm\Delta x_1)+\frac{\partial F}{\partial x_2}(\pm\Delta x_2) \tag{1-4-3}$$

在计算随机误差时，由于误差本身的正或负是不可知的，因此，上式中各误差项的系数必须取其绝对值，即

$$\Delta y=\left|\frac{\partial F}{\partial x_1}\right|\Delta x_1+\left|\frac{\partial F}{\partial x_2}\right|\Delta x_2 \tag{1-4-4}$$

相对误差为

$$\frac{\Delta y}{\overline{y}}=\left|\frac{\partial F}{\partial x_1}\right|\frac{\Delta x_1}{F}+\left|\frac{\partial F}{\partial x_2}\right|\frac{\Delta x_2}{F} \tag{1-4-5}$$

如果间接测量量 y 是直接测量量 x_1,x_2 的相乘或相除的函数关系，即 $y=x_1\cdot x_2$，则有

$$\Delta y=x_2\Delta x_1+x_1\Delta x_2 \tag{1-4-6}$$

先计算相对误差，再求绝对误差。计算公式为

$$E=\frac{\Delta y}{\overline{y}}=\left|\frac{x_2\Delta x_1}{x_1x_2}\right|+\left|\frac{x_1\Delta x_2}{x_1x_2}\right|=\left|\frac{\Delta x_1}{x_1}\right|+\left|\frac{\Delta x_2}{x_2}\right| \tag{1-4-7}$$

$$\Delta y = E \cdot \overline{y} \tag{1-4-8}$$

以上讨论没有考虑误差项的实际符号，而是从最不利的情况讨论，忽略了可以相互抵消一些的情况，因而估计出的误差会有些偏大。根据上述公式，可推导出表 1-4-1 所列的一些常用函数关系式的误差传递公式。

表 1-4-1　一些常用函数的误差传递公式

函数关系式	误差传递公式	
	绝对误差	相对误差
$y=x_1+x_2$	$\Delta y=\lvert\Delta x_1\rvert+\lvert\Delta x_2\rvert$	$E=\dfrac{\lvert\Delta x_1\rvert+\lvert\Delta x_2\rvert}{x_1+x_2}$
$y=x_1-x_2$	$\Delta y=\lvert\Delta x_1\rvert+\lvert\Delta x_2\rvert$	$E=\dfrac{\lvert\Delta x_1\rvert+\lvert\Delta x_2\rvert}{x_1-x_2}$
$y=x_1\times x_2$	$\Delta y=\lvert x_2\Delta x_1\rvert+\lvert x_1\Delta x_2\rvert$	$E=\left\lvert\dfrac{\Delta x_1}{x_1}\right\rvert+\left\lvert\dfrac{\Delta x_2}{x_2}\right\rvert$
$y=\dfrac{x_1}{x_2}$	$\Delta y=\dfrac{\lvert x_2\Delta x_1\rvert+\lvert x_1\Delta x_2\rvert}{x_2^2}$	$E=\left\lvert\dfrac{\Delta x_1}{x_1}\right\rvert+\left\lvert\dfrac{\Delta x_2}{x_2}\right\rvert$
$y=x^n$	$\Delta y=\lvert nx^{n-1}\cdot\Delta x\rvert$	$E=n\left\lvert\dfrac{\Delta x}{x}\right\rvert$
$y=\sqrt[n]{x}$	$\Delta y=\left\lvert\dfrac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}\cdot\Delta x\right\rvert$	$E=\dfrac{1}{n}\left\lvert\dfrac{\Delta x}{x}\right\rvert$
$y=\sin x$	$\Delta y=\lvert\cos x\cdot\Delta x\rvert$	$E=\dfrac{\lvert\cos x\cdot\Delta x\rvert}{\sin x}$
$y=\cos x$	$\Delta y=\lvert\sin x\cdot\Delta x\rvert$	$E=\dfrac{\lvert\sin x\cdot\Delta x\rvert}{\cos x}$

由表 1-4-1 所列常用函数关系式的误差传递公式，我们可以总结出如下规律：

(1) 当间接测量量是几个直接测量量的和（或差）时，间接测量量的绝对误差等于各直接测量量的绝对误差之和。在此情况下先算绝对误差，后算相对误差较方便。

(2) 当间接测量量是几个直接测量量的积（或商）时，间接测量量的相对误差等于各直接测量量的相对误差之和。在此情况下先算相对误差，后算绝对误差较方便。

误差传递公式除了可以用来估算间接测量值 y 的误差之外，还有一个重要的功能，就是可以用它来分析各直接测量值的误差对最后结果误差影响的大小。对于那些影响大的直接测量值，预先考虑措施，以减小它们的影响，为合理选用仪器和实验方法提供依据。

§1.5 不确定度的概念

如前所述，由于被测量的真值无从得知（我们用测量的平均值来代替），测量的误差也只能是一个不确定的范围，而不是一个准确的数值。为了更准确地表述测量结果的可靠程度，提出了采用不确定度的建议和规定。不确定度是对测量误差的一种评定方式。它是一个恒为正值的量 u，表示由于存在测量误差，导致被测量的真值不能确定的程度。真值以一定的置信概率 P 落在测量平均值附近的一个范围 $(x-u, x+u)$ 内。不确定度能更准确地用于测量结果的表述。但由于其计算比较复杂，而在一般的实验中，用前述的误差理论已足以描述被测量，所以我们对不确定度就不作进一步介绍了。

例题 1-5-1 在室温 23 ℃下，用共振干涉法测量超声波在空气中传播时的波长 λ，实验数据列于表 1-5-1。

表 1-5-1 实验数据表：实验测得的超声波波长，并计算得波长平均值及其误差

测量次数/i	波长 λ_i/cm	$\Delta\lambda_i=\lambda_i-\bar{\lambda}/(\times10^{-4}\,\text{cm})$
1	0.687 2	10
2	0.685 4	−8
3	0.684	−22
4	0.688	18
5	0.682	−42
6	0.688	18
7	0.685 2	−10
8	0.686 8	6
9	0.688	18
10	0.687 6	14
	$\bar{\lambda}=0.686\,2$	$\Delta\lambda=17$

解：(1) 求波长平均值：

$$\bar{\lambda}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}\lambda_i=0.686\,2(\text{cm})$$

(2) 求平均绝对误差：$\Delta\lambda=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}|\Delta\lambda_i|=16.6\times10^{-4}\approx17\times10^{-4}(\text{cm})$

(3) 求相对误差：

$$E=\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\times100\%=\frac{0.17\times10^{-2}}{0.686\,2}\times100\%\approx0.25\%$$

结果：在室温 23 ℃下，用共振干涉法测得超声波在空气中传播时的波长为