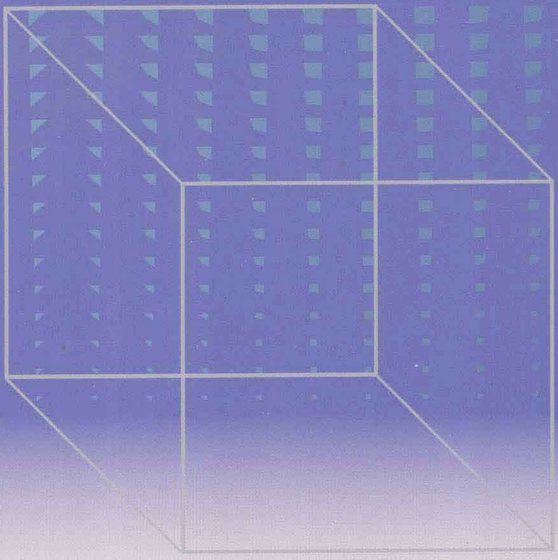
高等学校教材

高等数学

下册

刘坤 沈京一 许定亮 编



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

高等数学

下册

Gaodeng Shuxue

刘　坤　沈京一　许定亮　编

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

作者在多年教学实践的基础上，根据最新制定的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”编写了本书。

本书分上、下两册。下册内容为向量代数与空间解析几何、多元函数微分及应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、微分方程等六章。为便于同中学内容衔接，书后附有二阶行列式与三阶行列式、习题答案与提示。本书注重应用，内容丰富，层次清晰，语言通俗，深入浅出，简明扼要，便于学生自学。

本书可作为应用型本科院校工科类和农林医类各专业的高等数学教材，也可作为教学参考书和考研用书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.下册/刘坤，沈京一，许定亮编.--北京:高等教育出版社，2013.12

ISBN 978-7-04-038697-4

Ⅰ.①高… Ⅱ.①刘… ②沈… ③许… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第271017号

策划编辑	张彦云	责任编辑	张彦云	封面设计	张申申	版式设计	王　莹
插图绘制	杜晓丹	责任校对	王　雨	责任印制	尤　静		

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　址	北京市西城区德外大街4号	网　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　刷	三河市华润印刷有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　本	787mm×960mm　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　张	14.5	版　次	2013年12月第1版
字　数	260千字	印　次	2013年12月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　价	21.60元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号　38697-00

前 言

近十年来，我国的高等教育已逐渐从“精英教育”走向“大众化教育”，一批应用型本科院校应运而生，这就要求编写一本适应时代要求、有特色、高质量、切合应用型本科院校教学实际的高等数学教材。本书是作者根据“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，在多年从事高等数学教学的基础上编写而成的。

本书在内容安排和难易程度上充分考虑了大众化教育背景下的学生特点，既删除了较艰深的理论推导，又保持了理论体系的连贯性和完整性，以便为学生继续深造和考研打好基础；在编写时注重数学思想的渗透和数学方法的介绍，注重应用，着重培养学生的逻辑思维能力、应用能力和创新能力。本书结构严谨，深入浅出，例题丰富，便于自学。

全书分上、下两册，上册包括函数、极限与连续、一元函数微积分及其应用，下册包括空间解析几何与向量代数、多元函数微积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、微分方程，书后附习题答案与提示。本书适用于应用型本科院校工科类各专业，亦可供农林医类专业选用。

本书由刘坤、沈京一、许定亮编写，其中上册第一章、第三章、第四章、第五章、第六章由刘坤编写，第二章由许定亮编写；下册第七章由沈京一编写，第八章、第九章、第十章、第十二章由刘坤编写，第十一章由许定亮编写。上、下两册均由刘坤编写大纲并统稿。

在本书的编写过程中，得到了高等教育出版社的鼎力协助，编辑为此付出了辛勤的劳动，同时也得到了常州工学院教务处和理学院领导的大力支持，在此向他们深表谢意！

由于编者水平有限，书中疏漏之处在所难免，望广大读者和同行专家批评指正。

编者

2013 年 2 月

目　　录

第七章　向量代数与空间解析几何 …… 1

§7.1　空间直角坐标系 …… 1
§7.2　向量及其运算 …… 3
§7.3　曲面与空间曲线方程 …… 12
§7.4　平面及其方程 …… 18
§7.5　空间直线及其方程 …… 22
习题七 …… 26

第八章　多元函数微分及应用 …… 29

§8.1　多元函数的基本概念 …… 29
§8.2　偏导数 …… 35
§8.3　全微分及其应用 …… 41
§8.4　多元复合函数的求导法则 …… 44
§8.5　隐函数的求导法则 …… 50
§8.6　多元函数微分的几何应用 …… 52
§8.7　方向导数与梯度 …… 57
§8.8　多元函数的极值及其求法 …… 61
习题八 …… 66

第九章　重积分 …… 71

§9.1　二重积分的概念与性质 …… 71
§9.2　二重积分的计算 …… 76
§9.3　三重积分 …… 85
§9.4　重积分的应用 …… 92
习题九 …… 100

第十章　曲线积分与曲面积分 …… 106

§10.1　对弧长的曲线积分 …… 106
§10.2　对坐标的曲线积分 …… 110
§10.3　格林公式及其应用 …… 116
§10.4　对面积的曲面积分 …… 122
§10.5　对坐标的曲面积分 …… 125

§10.6 高斯公式 通量与散度 …… 132
§10.7 斯托克斯公式 环流量与旋度 …… 135
习题十 …… 139

第十一章 无穷级数 …… 144

§11.1 常数项级数的概念和性质 …… 144
§11.2 常数项级数的审敛法 …… 148
§11.3 幂级数 …… 152
§11.4 函数展开成幂级数 …… 157
§11.5 幂级数的应用 …… 161
§11.6 傅里叶级数 …… 164
§11.7 周期为 $2l$ 的函数的傅里叶级数 …… 170
习题十一 …… 172

第十二章 微分方程 …… 178

§12.1 微分方程的基本概念 …… 178
§12.2 一阶微分方程 …… 181
§12.3 可降阶的高阶微分方程 …… 189
§12.4 二阶线性微分方程解的结构 …… 192
§12.5 二阶常系数线性微分方程 …… 195
§12.6 微分方程的应用举例 …… 201
习题十二 …… 204

附录 二阶行列式与三阶行列式 …… 207

习题答案与提示 …… 209

第七章　向量代数与空间解析几何

空间解析几何的知识对学习多元函数微积分是十分必要的. 本章主要介绍空间直角坐标系的建立、向量及其运算、曲面和空间曲线、平面和直线等.

§7.1　空间直角坐标系

一、空间直角坐标系

应用代数的方法研究空间中的几何图形,首先要建立空间直角坐标系.

在空间中任意取定一点 O,过点 O 作三条互相垂直的数轴 Ox,Oy 和 Oz,它们具有相同的单位长度. 这三条轴分别叫做 Ox 轴、Oy 轴和 Oz 轴,简称 x 轴、y 轴和 z 轴,并按右手系确定其方向,即以右手握住 z 轴,当右手的四个手指从 x 轴正向以$\frac{\pi}{2}$角度转向 y 轴正向时,大拇指的指向就是 z 轴正向. 这样就建立了**空间直角坐标系** $Oxyz$(如图 7-1),点 O 称为该坐标系的**原点**,Ox 轴,Oy 轴和 Oz 轴统称为**坐标轴**.

在三条坐标轴中,每两条轴确定一个平面,分别称为 xOy 坐标面、yOz 坐标面和 zOx 坐标面. 三个坐标面将空间分成八个部分,每一部分叫做一个**卦限**(如图 7-2). 在 xOy 面的上方,边界含有 x 轴、y 轴与 z 轴正半轴的那个卦限叫做第一卦限,其他按逆时针方向依次为第二、第三、第四卦限. 在 xOy 面的下方,第一卦限下为第五卦限,按逆时针方向依次为第六、第七、第八卦限. 这八个卦限分别用罗马数字 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ表示.

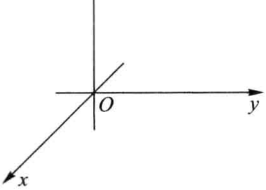


图 7-1

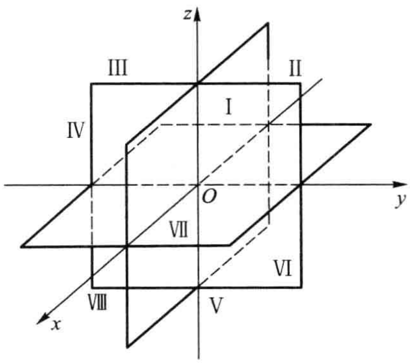


图 7-2

建立了空间直角坐标系后，就可以确定空间的点 M 与有序数组 (x,y,z) 之间的对应关系.

过空间点 M 作三个分别垂直于 Ox 轴，Oy 轴和 Oz 轴的平面，它们与各坐标轴分别交于 P,Q,R 三点，设 $OP=x$，$OQ=y$，$OR=z$，则点 M 唯一确定了一个有序数组 (x,y,z)，称它为点 M 的**空间直角坐标**，记作 $M(x,y,z)$（如图 7-3），其中 x 称为**横坐标**，y 称为**纵坐标**，z 称为**竖坐标**（或**立坐标**）. 反之，任意给定一个有序数组 (x,y,z)，可以在 Ox，Oy 和 Oz 三条坐标轴上分别取三点 P,Q,R，使 $OP=x$，$OQ=y$，$OR=z$，然后过 P,Q,R 三点分别作垂直于 Ox 轴，Oy 轴和 Oz 轴的平面，这三个平面交于一点 M，点 M 就是有序数组 (x,y,z) 所唯一确定的点. 这样，通过空间直角坐标系建立了空间一点与有序数组 (x,y,z) 之间的一一对应关系.

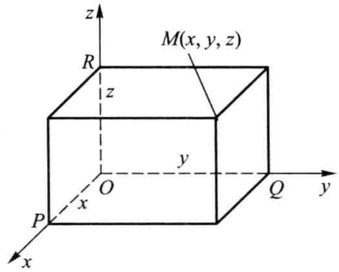


图 7-3

二、空间两点间的距离

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间任意两点，它们之间的距离记作 $|M_1M_2|$. 过 M_1 和 M_2 各作三个分别垂直于三个坐标轴的平面，这六个平面构成了一个以 M_1M_2 为对角线的长方体（如图 7-4）.

由于 $\triangle M_1NM_2$ 是直角三角形，所以

$$|M_1M_2|^2=|M_1N|^2+|NM_2|^2,$$

又 $\triangle M_1PN$ 也是直角三角形，所以

$$|M_1N|^2=|M_1P|^2+|PN|^2,$$

$$|M_1M_2|^2=|M_1P|^2+|PN|^2+|NM_2|^2,$$

又因为 $|M_1P|=|P_1P_2|=|x_2-x_1|$,

$$|PN|=|P_2Q_2|=|y_2-y_1|,$$

$$|NM_2|=|z_2-z_1|,$$

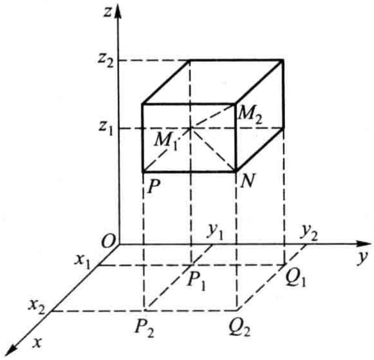


图 7-4

所以 $$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

这就是**空间任意两点间的距离公式**.

显然空间任意一点 $M(x,y,z)$ 与坐标原点 $O(0,0,0)$ 之间的距离为

$$|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

例 1.1 求在 Ox 轴上与点 $A(-1,2,-3)$ 和点 $B(1,0,3)$ 等距离的点 M 的坐标.

解　因为所求点 M 在 Ox 轴上，所以设点 M 的坐标为 $(x,0,0)$，则有 $|MA|=|MB|$，即

$$\sqrt{(x+1)^2+(0-2)^2+(0+3)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(0-0)^2+(0-3)^2},$$

因此，
$$x^2+2x+1+4+9=x^2-2x+1+0+9,$$

解得 $x=-1$，所以点 M 的坐标为 $(-1,0,0)$.

§7.2　向量及其运算

一、向量的概念

在反映现实世界的各种量中，最简单的如距离、时间和温度等，在取定某个单位以后，只需一个实数就可以表示出来，这种只有大小的量称为数量. 而另一类量，它们既有大小，又有方向，例如位移、速度、力等，这类量叫做向量（或矢量）.

定义 7.1　既有大小又有方向的量称为向量（或矢量）.

在数学上，常用一条有向线段来表示向量. 有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向. 以 A 为起点、B 为终点的有向线段所表示的向量记作 $\overrightarrow{AB}$（如图 7-5）. 有时向量也用黑体字母 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\cdots$（或 $\vec{a},\vec{b},\cdots$）表示.

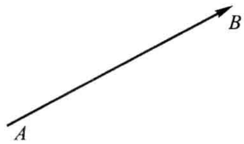


图 7-5

向量的大小称为向量的**模**. 向量 $\overrightarrow{AB}$，$\boldsymbol{a}$ 的模分别记作 $|\overrightarrow{AB}|$，$|\boldsymbol{a}|$. 模等于 1 的向量称为**单位向量**. 模等于零的向量称为**零向量**，记作 $\mathbf{0}$（或 $\vec{0}$）. 零向量的起点和终点重合，它的方向可以看作是任意的.

向量的主要特征是其大小和方向. 两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，如果它们大小相等且方向相同，则称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是相等的，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 对不同起点的向量，为了研究方便，我们常将它们平移至同一起点. 把一组向量平移至同一起点后，如果它们都在同一条直线上，这组向量就称为**共线的向量**. 共线的向量也称为**平行向量**，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 零向量与任何向量都共线.

二、向量的线性运算

1. 向量的加法和减法

定义 7.2　设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，任取一点 A，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，再以 B 为起点，作 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，连接 AC（如图 7-6），则向量 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即

$$c=a+b.$$

上述作出两向量之和的方法叫做向量相加的**三角形法则**.

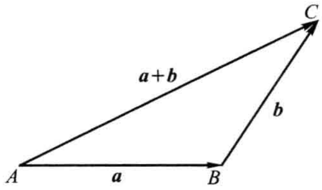


图 7-6

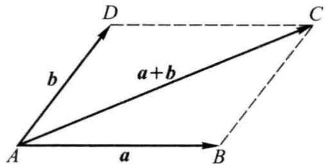


图 7-7

另外,作出两向量之和还可利用**平行四边形法则**,即:对两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,以 AB,AD 为邻边作一平行四边形 $ABCD$,连接对角线 AC(如图 7-7),向量 $\overrightarrow{AC}$ 即等于向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

向量的加法具有下列运算规律:

(1) **交换律**　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2) **结合律**　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

由于向量的加法符合交换律和结合律,所以 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n(n\geqslant 3)$ 相加可写成

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n,$$

并按向量相加的三角形法则,可得 n 个向量相加的法则如下:任取一点作为第一向量的起点,使前一向量的终点作为下一向量的起点,相继作出向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$,再以第一向量的起点为起点,最后一个向量的终点为终点作一向量,该向量即为所求的向量之和(如图 7-8).

设 $\boldsymbol{a}$ 为一向量,与 $\boldsymbol{a}$ 的模相同而方向相反的向量叫做 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**,记作 $-\boldsymbol{a}$.

定义 7.3　设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,称 $\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$ 为 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差,记作 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$. 即有

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a}).$$

任给向量 $\overrightarrow{AB}$ 及点 O,有

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA},$$

因此,若把向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 移到同一起点 O,则从 $\boldsymbol{a}$ 的终点 A 向 $\boldsymbol{b}$ 的终点 B 所引向量 $\overrightarrow{AB}$ 便是 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$(图 7-9).

由三角形两边之和大于第三边的原理,有

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|\text{ 及 }|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,$$

其中等号分别在 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向或反向时成立.

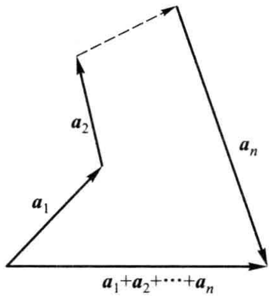


图 7-8

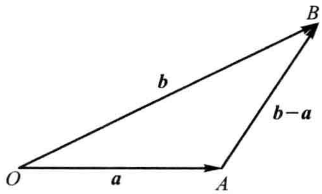


图 7-9

2. **向量与数的乘法**

定义 7.4　实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积仍是一个向量,记作 $\lambda\boldsymbol{a}$,它的模为

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|,$$

它的方向

(1) 当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 同向;

(2) 当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 反向;

(3) 当 $\lambda=0$ 时,$|\lambda\boldsymbol{a}|=0$,即 $\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量,这时它的方向可以是任意的.

特别地,当 $\lambda=\pm1$ 时,有

$$1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\ ,\ (-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}.$$

向量与数的乘法具有下列运算规律:

(1) 结合律　$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;

(2) 分配律　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a},\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

显然,向量 $\boldsymbol{a}$ 平行于向量 $\lambda\boldsymbol{a}$. 向量与数的乘法和向量平行之间有如下定理:

定理 7.1　设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,那么向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是:存在一个实数 λ,使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

证明从略.

向量的加法、减法及向量与数的乘法统称为**向量的线性运算**.

例 2.1　在三角形 ABC 中,设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$,$D,E$ 分别是 AB 和 AC 边的中点(如图 7-10),试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{DE}$.

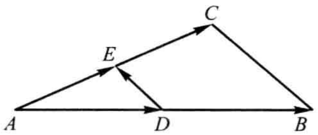


图 7-10

解　因为 D,E 分别是 AB 和 AC 边的中点,所以有

$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a},$$

$$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b},$$

则

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}).$$

3. 向量的单位化

对非零向量 $\boldsymbol{a}$,设与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量用 $\boldsymbol{e}_a$ 表示,则有

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a,$$

由此可得

$$\boldsymbol{e}_a=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a},$$

从 $\boldsymbol{a}$ 求 $\boldsymbol{e}_a$ 的过程称为**向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位化**.

三、向量的坐标及运算

1. 向量的坐标表示

建立空间直角坐标系 $Oxyz$,以 O 为始点,在 Ox 轴,Oy 轴和 Oz 轴正方向上,取三个单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$(如图 7-11),称单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 为**基本单位向量**.

对于坐标系 $Oxyz$ 中的任一点 $M(x,y,z)$,有对应的向量$\overrightarrow{OM}$,令$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$,以 OM 为对角线、三条坐标轴为棱作长方体 $RHMK$-$OPNQ$(如图 7-12),则有

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},$$

称上式为向量$\overrightarrow{OM}$的坐标表示式.

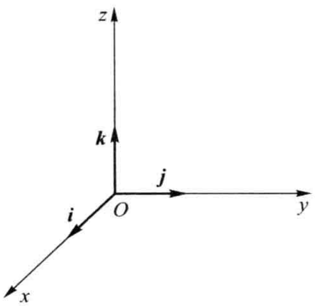


图 7-11

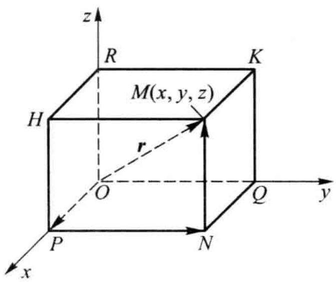


图 7-12

显然,给定向量 $\boldsymbol{r}$ 就确定了点 M,也就确定了 x,y,z 三个有序数;反之给定三个有序数 x,y,z,也就确定了点 M 及相应的向量 $\boldsymbol{r}$. 我们称(x,y,z)为向量$\overrightarrow{OM}$

在坐标系 $Oxyz$ 中的坐标,记作$\overrightarrow{OM}=\{x,y,z\}$(或 $\boldsymbol{r}=\{x,y,z\}$).

特别地,有 $\boldsymbol{i}=\{1,0,0\}$,$\boldsymbol{j}=\{0,1,0\}$,$\boldsymbol{k}=\{0,0,1\}$.

2. **向量的坐标运算**

利用向量的坐标,可以进行向量的加法、减法及数与向量乘法的运算.

设 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$,$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$,

即
$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k},$$
则
$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_x-b_x)\boldsymbol{i}+(a_y-b_y)\boldsymbol{j}+(a_z-b_z)\boldsymbol{k},$$
$$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda a_x\boldsymbol{i}+\lambda a_y\boldsymbol{j}+\lambda a_z\boldsymbol{k}(\lambda\text{ 为实数}).$$
亦即
$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\{a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z\},$$
$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\{a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z\},$$
$$\lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z\}.$$
由此可见,向量的加法、减法及数与向量的乘法,只需对向量的各个坐标分别进行相应的运算即可.

由定理 7.1,当向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时,向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$,则有 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$,从而
$$\{b_x,b_y,b_z\}=\lambda\{a_x,a_y,a_z\}.$$
即向量 $\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 对应的坐标成比例:
$$\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}.$$
其中若 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$ 中某个分量为零时,则可理解成 $\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$ 中的对应分量也为零.

3. **方向角与方向余弦**

设有两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,在空间任取一点 O,作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,规定不超过 π 的角 $\angle AOB$ 为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 之间的**夹角**(如图 7-13),记作 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$. 于是当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 方向相同时,$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$;当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 方向相反时,$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\pi$;当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 之间的夹角为$\dfrac{\pi}{2}$时,称 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 垂直,记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. 例如,在直角坐标系中,基本单位向量 $\boldsymbol{i}\perp\boldsymbol{j}$,$\boldsymbol{i}\perp\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{j}\perp\boldsymbol{k}$.

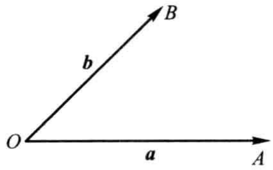


图 7-13

非零向量 $\boldsymbol{r}$ 与三条坐标轴:x 轴,y 轴,z 轴间的夹角 α,β,γ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的**方向角**. 设 $\boldsymbol{r}=\{x,y,z\}$,则
$$\cos\alpha=\frac{x}{|\boldsymbol{r}|},\cos\beta=\frac{y}{|\boldsymbol{r}|},\cos\gamma=\frac{z}{|\boldsymbol{r}|}$$
称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的**方向余弦**. 上式表明,以向量 $\boldsymbol{r}$ 的方向余弦为坐标的向量就是与 $\boldsymbol{r}$ 同方向的单位向量 $\boldsymbol{e}_r$,即

$$\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}=\left\{\frac{x}{|\boldsymbol{r}|},\frac{y}{|\boldsymbol{r}|},\frac{z}{|\boldsymbol{r}|}\right\}=\frac{1}{|\boldsymbol{r}|}\{x,y,z\}=\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}=\boldsymbol{e}_r,$$

并由此可得

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

4. **向量在轴上的投影**

由向量 $\boldsymbol{r}$ 的方向余弦

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\boldsymbol{r}|},\cos\beta=\frac{y}{|\boldsymbol{r}|},\cos\gamma=\frac{z}{|\boldsymbol{r}|},$$

得

$$x=|\boldsymbol{r}|\cos\alpha,y=|\boldsymbol{r}|\cos\beta,z=|\boldsymbol{r}|\cos\gamma,$$

分别称其为向量 $\boldsymbol{r}$ 在三条坐标轴 x 轴,y 轴,z 轴上的**投影**,而 $x\boldsymbol{i},y\boldsymbol{j},z\boldsymbol{k}$ 称为 $\boldsymbol{r}$ 在坐标轴方向上的**分向量**.

一般地,设已知点 O 及单位向量 $\boldsymbol{e}$,由此确定与 $\boldsymbol{e}$ 同方向的 u 轴(图 7-14).任给向量 $\boldsymbol{r}$,作$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$,若点 M'是点 M 在 u 轴上的投影,则向量$\overrightarrow{OM'}$称为向量 $\boldsymbol{r}$ 在 u 轴上的分向量.设$\overrightarrow{OM'}=\lambda\boldsymbol{e}$,则数 λ 称为**向量 $\boldsymbol{r}$ 在 u 轴上的投影**,记作 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{r}$ 或$(\boldsymbol{r})_u$.

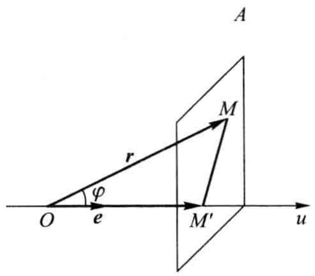


图 7-14

向量投影的性质如下:

(1) 向量$\overrightarrow{AB}$在 u 轴上的投影等于向量的模乘 u 轴与向量的夹角 φ 的余弦,即

$$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cos\varphi.$$

(2) 两个向量的和在轴上的投影等于两个向量在该轴上的投影之和(可以推广到多个向量的和),即

$$\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_1+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_2.$$

(3) $\mathrm{Prj}_u(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$.

例 2.2 设 $\boldsymbol{m}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k},\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k},\boldsymbol{p}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$,求向量 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}$ 在 x 轴上的投影及在 y 轴上的分向量.

解
$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=4(3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k})+3(2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k})-(5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k})\\&=13\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+15\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

所以,$\boldsymbol{a}$ 在 x 轴上的投影为 13,在 y 轴上的分向量为 $7\boldsymbol{j}$.

四、向量的数量积与向量积

1. **向量的数量积**

定义 7.5 两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的模乘它们夹角的余弦,称为向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的数

量积,记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}).$$

特别地,当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 有一个是零向量时,它们的数量积为零.

由数量积的定义可得:

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2\cos 0=|\boldsymbol{a}|^2$.

(2) 两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 垂直的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

由于零向量的方向是任意的,故也可认为零向量与任意向量垂直,则上述结论也可改为:两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 垂直的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

易知 $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=0,\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=0,\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=0$.

(3) 由于 $|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 在 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时是向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向上的投影,用 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$ 来表示这个投影,即得两向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的数量积

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}.$$

同理,当 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 时,有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$.

(4) 由两向量的数量积可计算两非零向量的夹角:

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}.$$

数量积具有下列运算规律:

(1) **交换律**　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$;

(2) **分配律**　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$;

(3) **数乘向量的结合律**　$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$.

例 2.3　试用向量证明三角形的余弦定理.

证　设在 $\triangle ABC$ 中(如图 7-15),$|CB|=a$,$|CA|=b$,$|AB|=c$,$\angle ACB=\theta$,要证明

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta.$$

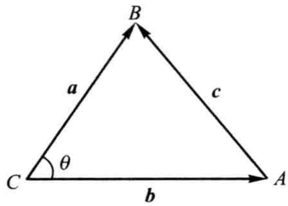


图 7-15

记 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c},\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$,则有

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},$$

所以有

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{c}|^2&=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\\&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}-2\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\\&=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}).\end{aligned}$$

由于 $|\boldsymbol{a}|=a,|\boldsymbol{b}|=b,|\boldsymbol{c}|=c,(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\theta$,所以得

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta.$$

2. 数量积的坐标表示

设有 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$,$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$,即有

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}.$$

由数量积的运算性质及 $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1,\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=0,\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=0,\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=0$ 可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i})+a_xb_y(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j})+a_xb_z(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k})\\&\quad+a_yb_x(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i})+a_yb_y(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j})+a_yb_z(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k})\\&\quad+a_zb_x(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i})+a_zb_y(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j})+a_zb_z(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.\end{aligned}$$

特别地,有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2=a_x^2+a_y^2+a_z^2,$$

即

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}.$$

而当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都不是零向量时,有

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

这就是两向量夹角余弦的坐标表示式.

对于非零向量 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$,设 $\boldsymbol{a}$ 与三个坐标轴的夹角为 α,β,γ,则可将三个夹角看作 $\boldsymbol{a}$ 与三个坐标向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 之间的夹角,从而,向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦为

$$\cos\alpha=\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{i}})=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

$$\cos\beta=\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{j}})=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

$$\cos\gamma=\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{k}})=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}.$$

例 2.4 设已知两点 $A(2,2,1),B(1,3,0)$,计算向量$\overrightarrow{AB}$的模、方向余弦,并求与 $\overrightarrow{AB}$ 同向的单位向量.

解 $\overrightarrow{AB}=\{1-2,3-2,0-1\}=\{-1,1,-1\}$,则向量$\overrightarrow{AB}$的模为

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{3}.$$

方向余弦为

$$\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{3}},\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{3}},\cos\gamma=-\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

与 $\overrightarrow{AB}$ 同向的单位向量为

$$\boldsymbol{e}_{\overrightarrow{AB}}=\left\{-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}.$$