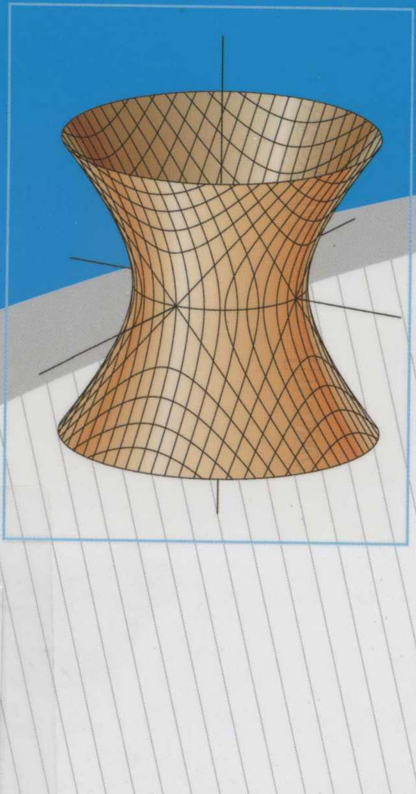
普通高等教育"十二五"规划教材
公共基础课教材系列



线性代数及其应用

李学银 盛集明 主编

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

公共基础课教材系列

线性代数及其应用

主编　李学银　盛集明

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书内容包括行列式、矩阵及其运算、向量组、线性方程组、相似矩阵与二次型、投入产出模型和线性规划模型简介、MATLAB 在线性代数中的应用等七章. 每节后面配有习题,每章后面配有复习题,并附习题及复习题参考答案.

本书可供普通高等院校理工类和经济管理类各专业作为教材,也可供在职科技工作者、经济管理者和其他人员自学或参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数及其应用/李学银,盛集明主编. —北京:科学出版社,2013.
普通高等教育"十二五"规划教材・公共基础课教材系列
ISBN 978-7-03-038201-6

Ⅰ.①线… Ⅱ.①李… ②盛… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材
Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 169410 号

责任编辑:沈力匀 / 责任校对:马英菊
责任印制:吕春珉 / 封面设计:耕者设计工作室

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
骏杰印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2013 年 8 月第 一 版 开本:787×1092 1/16
2013 年 8 月第一次印刷 印张:14 1/4
字数:340 000

定价:29.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈骏杰〉)
销售部电话 010-62134988 编辑部电话 010-62135235(VP04)

前　言

随着计算机技术的发展和普及,线性代数的重要性越来越突出,它的应用领域也越来越广泛.本书依据国家教育部审定颁发的本科线性代数课程教学基本要求编写,可供普通高等学校理工类和经济管理类各专业作为教材,也可供在职科技工作者、经济管理者和其他人员自学或参考使用,特别强调矩阵方法,即用矩阵表述问题并解决问题的方法、矩阵方法对于很多专业的后继课程学习不可或缺,如机械、电子类专业的以下课程:物理、化学、计算方法、离散数学、计算机图形学、电路、理论力学、材料力学、信号与系统、数字信号处理、机械振动等,经济管理类的课程如统计学、运筹学、计量经济学等,都要应用矩阵方法.

本书具有以下特点:

(1) 提供丰富例题和习题.典型例题便于读者理解相关概念和方法,帮助读者克服学习障碍,增强学习兴趣.每节后面都提供经过挑选的习题,每章后面还给出较为综合的复习题,供读者选择练习,逐步掌握线性代数的基本内容和方法.

(2) 强调应用.本书第六章介绍了行列式、矩阵和线性方程组在经济中的一些应用,如投入产出模型和线性规划模型.第七章介绍了线性代数方法的综合应用实例,包括化学方程式的配平问题、生物遗传模型、学业成绩换算问题、超定方程的解——最小二乘问题、电路分析问题、交通流量分析问题、人口迁徙模型、信号加密问题等.教师在教学过程中加以引导,学生会明白线性代数课程中学习的内容将会在以后的专业课中发挥重要作用.

(3) 利用计算机软件.现代软件技术为数学教学提供了强有力的支持,能够改善教学方式,提高教学质量.本书第七章介绍了 MATLAB 在线性代数中的应用,主要就本课程范围内的问题给出利用该软件进行计算的示例.使用 MATLAB 教学有助于强化学生的学习,为他们提供学习线性代数的新手段,对于进一步理解线性代数基本内容,把握线性代数实质,运用矩阵方法解决实际问题,提供了十分有益的帮助.建议组成线性代数课程学习和研讨小组,利用 MATLAB 解决不同领域中的更多实际问题.

本书内容包括行列式、矩阵及其运算、向量组、线性方程组、相似矩阵与二次型、投入产出模型和线性规划模型简介、MATLAB 在线性代数中的应用等七章,每节后面配有习题,每章后面配有复习题,并附习题及复习题参考答案.

参加本书编写的作者都是多年从事线性代数课程教学的教师.由李学银、盛集明担任主编,刘古胜、孔君香担任副主编,参加编写的还有万文婷、习长新、刘艳萍等,全书由李学银统稿.

本书从立项到成功出版得到了同事和朋友的热心帮助与大力支持.特别要向科学出版社基础与服务分社沈力匀社长、吕燕新和戴薇表示我们最诚挚的谢意,感谢他们为本书的出版所给予的鼓励引导和付出的辛勤劳动.由于作者水平有限,本书难免存在疏漏之处,敬请广大读者提出批评和建议性意见.

目　录

第一章 行 列 式

初等数学中讨论过二阶、三阶行列式,并且利用它们来解二元、三元线性方程组.为了研究 n 元线性方程组,需要把行列式推广到 n 阶,即讨论 n 阶行列式的问题.为此,本章先介绍一些预备知识,然后引出 n 阶行列式的定义并讨论其性质.

第一节 全排列及其逆序数

一、全排列

定义 1.1 由 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为这 n 个数的一个**全排列**,也称为 $\boldsymbol{n}$ **级排列**.

例如:132 是一个 3 级排列,2431 是一个 4 级排列,54321 是一个 5 级排列.

由 $1,2,\cdots,n$ 组成的所有不同的 n 级排列共有 $n!$ 个.例如,3 级排列有 $3!=6$ 个,它们是 123,132,213,231,312,321.

二、逆序数

值得注意的是,在上面的 6 个 3 级排列中,除了 123 中的数码是按由小到大的自然顺序排列以外,在其余的排列中,都是较大的数码排在较小的数码前面.例如,在排列 213 中,2 比 1 大,但 2 排在了 1 的前面,这时就说 2 和 1 构成了一个逆序.

一般地,我们有如下定义:

定义 1.2 在一个排列中,如果一对数的前后位置与大小顺序相反,即前面的数大于后面的数,那么就称它们为一个**逆序**.一个排列中逆序的总数就称为这个排列的逆序数.

例如,在排列 2431 中,21,43,41,31 是逆序,2431 的逆序数就是 4,而排列 45321 的逆序数是 9.

排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数记为 $t(p_1p_2\cdots p_n)$.

定义 1.3 逆序数为偶数的排列称为偶排列,逆序数为奇数的排列称为**奇排列**.

例如,2431 是偶排列,45321 是奇排列,$12\cdots n$ 的逆序数是零,因此是偶排列.

下面我们来讨论计算排列的逆序数的方法.

不失一般性,不妨设排列元素为自然数 $1\sim n$,并规定由小到大为标准次序.设 $p_1p_2\cdots p_n$ 为这 n 个自然数的一个排列,考虑元素 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$,如果比 p_i 大且排在 p_i 前面的元素有 t_i 个,就说 p_i 这个元素的逆序数是 t_i.全体元素的逆序数之总和

$$t=t_1+t_2+\cdots+t_n=\sum_{i=1}^{n}t_i$$

即是这个排列的逆序数.

【例 1.1】 求排列 32514 的逆序数.

解 在排列 32514 中，

3 排在首位，逆序数为 0；

2 的前面比 2 大的数有一个(3)，故逆序数为 1；

5 是最大数，逆序数总是为 0；

1 的前面比 1 大的数有 3 个(3、2、5)，故逆序数为 3；

4 的前面比 4 大的数有 1 个(5)，故逆序数为 1；

于是该排列的逆序数为

$$t = 0 + 1 + 0 + 3 + 1 = 5.$$

习题 1.1

1. 按自然数从小到大为标准次序，求下列各排列的逆序数：

(1) 4132；　　(2) 52413；

(3) 3714265；　　(4) $n(n-1)\cdots 321$；

(5) $(2k)1(2k-1)2\cdots(k+1)k$；　　(6) $13\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots 2$；

(7) $13\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$.

2. 设 $p_1p_2\cdots p_n$ 是一个 n 级排列，且 $t(p_1p_2\cdots p_n)=k$，求 $t(p_np_{n-1}\cdots p_2p_1)$.

第二节　n 阶行列式的定义

一、二阶与三阶行列式

行列式起源于解线性方程组. 首先看二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.1}$$

用消元法解此方程组. 先用 a_{22} 乘方程组(1.1)中的第 1 式的两端，得

$$a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_1a_{22},$$

再用 a_{12} 乘方程组(1.1)中的第 2 式的两端，得

$$a_{12}a_{21}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_2a_{12},$$

然后将所得的前式减去后式，消去 x_2，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12},$$

同理，也可以消去 x_1，得到

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}.$$

因此，当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，若方程组(1.1)有解，其解可写成

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ x_2 = \dfrac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases} \tag{1.2}$$

检验可知式(1.2)是式(1.1)的解.式(1.2)给出了式(1.1)的解的一般公式,但它记忆困难,应用也不方便,因而有必要引进一个新符号来表示它.这样就产生了行列式.

在式(1.1)的解的表达式(1.2)中,分母都是 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$,它只含未知量的系数,把未知量的系数按照它们在方程组中原来的位置排列成正方形,即

$$\begin{matrix} a_{11} & & a_{12} \\ & \times & \\ a_{21} & & a_{22} \end{matrix}.$$

可以看出 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 是这样两项的和:一项是正方形中实线表示的对角线(从左上角到右下角的直线叫做行列式的**主对角线**)上两元素的积,再添上正号;另一项是虚线表示的对角线(从右上角到左下角的直线叫做行列式的**次对角线**)上两元素的积,再添上负号.在这 4 个数的两旁各加一条竖线,引进符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{1.3}$$

并且规定它就表示

$$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \tag{1.4}$$

式(1.3)叫做二阶行列式,式(1.4)叫做**二阶行列式的展开式**,a_{11},a_{12},a_{21},a_{22} 叫做行列式(1.3)的**元素**.这 4 个元素排成两行两列(横排叫**行**,竖排叫**列**).例如,a_{21} 是位于第 2 行第 1 列上的元素.利用对角线把二阶行列式(1.3)展开成式(1.4),这种方法叫做二阶行列式展开的**对角线法则**.

解的表达式(1.2)中的 2 个分子也可以分别写成二阶行列式 $\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$ 和 $\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$,这样当 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ 时,线性方程组(1.1)的解可写成

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \\ x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \end{cases} \tag{1.5}$$

为了方便起见,通常用 D,D_1,D_2 分别表示式(1.5)中作为分母和分子的行列式,

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

行列式 D 是由方程组(1.1)中未知量 x_1,x_2 的系数组成的，叫做这个方程组的系数行列式. D 中第 1 列的元素 a_{11},a_{21}（即 x_1 的系数）分别换成方程组(1.1)的常数项 b_1,b_2，就得到行列式 D_1；D 中第 2 列的元素 a_{12},a_{22}（即 x_2 的系数）分别换成常数项 b_1,b_2，就得到行列式 D_2.

综上所述，利用行列式这一工具可以得到以下结论：

当线性方程组(1.1)的系数行列式 D 不等于零时，它的唯一解的公式是

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D}, \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D}. \end{cases}$$

其中 D_1、D_2 是将系数行列式 D 中第 1 列、第 2 列分别换成方程组(1.1)的常数项而得出的 2 个二阶行列式.

再看三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{1.6}$$

为了解此方程组，可依照前面的方法，先从方程组(1.6)中的第 1、第 2 两式消去 x_3，第 2、第 3 两式消去 x_3，再从所得的 2 个方程消去 x_2，就得到

$$\begin{aligned} &(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32})x_1 \\ &= b_1a_{22}a_{33} + b_3a_{12}a_{23} + b_2a_{13}a_{32} - b_3a_{13}a_{22} - b_2a_{12}a_{33} - b_1a_{23}a_{32}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

注意 式(1.7)中 x_1 的系数是一个代数和，它是由方程组(1.6)的未知量系数按这样的规律构成的：把未知量的系数按照它们在方程组中原来的位置排成三行三列的正方形，即

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

主对角线上 3 个元素相乘，主对角线的平行线上 2 个元素与对角元素相乘，一共有 3 个乘积，都取正号；次对角线上 3 个元素相乘，次对角线的平行线上 2 个元素与对角元素相乘，又有 3 个乘积，都取负号.

在这 9 个数组成的正方形两旁各加上一条竖线，引进符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1.8}$$

并且规定它就表示

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \tag{1.9}$$

式(1.8)叫做三阶行列式，式(1.9)叫做三阶行列式的展开式，将式(1.8)展开成式(1.9)的

方法叫做三阶行列式展开的对角线法则.

因此式(1.7)的右端正好可写成三阶行列式

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \tag{1.10}$$

记式(1.8)为 D,式(1.10)为 D_1,则式(1.7)可写成

$$Dx_1 = D_1.$$

设 $D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$,$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$,

则由方程组(1.6)求得类似于式(1.7)的另外两个方程是

$$Dx_2 = D_2,\quad Dx_3 = D_3.$$

于是方程组(1.6)的解 x_1,x_2,x_3 满足

$$\begin{cases} Dx_1 = D_1, \\ Dx_2 = D_2, \\ Dx_3 = D_3. \end{cases} \tag{1.11}$$

而在方程组(1.6)的系数行列式 $D\neq 0$ 的条件下,由方程组(1.11)可得

$$\begin{cases} x_1 = D_1/D, \\ x_2 = D_2/D, \\ x_3 = D_3/D. \end{cases} \tag{1.12}$$

在本章第五节"克拉默法则"中将证明公式(1.12)中的 x_1,x_2,x_3 确为方程组(1.6)的解. 因此式(1.12)是方程组(1.6)的解(唯一解)的公式.

【例 1.2】 求二元线性方程组 $\begin{cases} 3x_1-2x_2=12 \\ 2x_1+x_2=1 \end{cases}$ 的解.

解 由于 $D=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3-(-4)=7\neq 0$,

$$D_1=\begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=12-(-2)=14,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3-24=-21,$$

因此 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{14}{7}=2$, $x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{-21}{7}=-3$.

【例 1.3】 计算三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$.

解 按对角线法则,有

$$D=1\times2\times(-2)+2\times1\times(-3)+(-4)\times(-2)\times4$$
$$-1\times1\times4-2\times(-2)\times(-2)-(-4)\times2\times(-3)$$
$$=-4-6+32-4-8-24=-14.$$

【例 1.4】 设 $\vec{a}=\{2,1,-1\}$，$\vec{b}=\{1,-1,2\}$，计算 $\vec{a}\times\vec{b}$.

解 $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&1&-1\\1&-1&2\end{vmatrix}=2\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}-\vec{k}-\vec{i}-4\vec{j}=\vec{i}-5\vec{j}-3\vec{k}=\{1,-5,-3\}$.

【例 1.5】 解方程 $\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&x\\4&9&x^2\end{vmatrix}=0$.

解 方程左端的三阶行列式

$$D=3x_2+4x+18-9x-2x^2-12=x^2-5x+6,$$

由 $x^2-5x+6=0$ 解得 $x=2$ 或 $x=3$.

对角线法则只适用于二阶与三阶行列式，为了研究四阶及更高阶行列式，必须引出 n 阶行列式的概念.

二、n 阶行列式

为了定义 n 阶行列式，我们先研究三阶行列式的结构. 三阶行列定义为

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.\tag{1.13}$$

容易看出：

(1) 式(1.13)右端的每一项都恰是 3 个元素的乘积，这 3 个元素位于不同的行、不同的列. 因此，式(1.13)右端的任意项除正、负号外可以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$. 这里第 1 个下标(称行标)排成标准排列 123，而第 2 个下标(称列标)排成 $p_1p_2p_3$，它是 1、2、3 三个数的某个排列. 这样的排列共有 6 种，对应式(1.13)右端共含 6 项.

(2) 各项的正负号与列标的排列对照：

带正号的三项列标排列是：123，231，312；

带负号的三项列标排列是：132，213，321.

经计算可知前三个排列都是偶排列，而后三个排列都是奇排列. 因此各项所带的正、负号可以表示为 $(-1)^t$，其中 t 为列标排列的逆序数.

总之，三阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3},$$

其中 t 为排列 $p_1p_2p_3$ 的逆序数，$\sum$ 表示对 1、2、3 三个数的所有排列(共有 $3!=6$ 个)对

应的项求和.

仿此,我们可以把行列式推广到一般情形.

定义 1.4 设有 n^2 个数,排成 n 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

做出表中位于不同行不同列的 n 个数的乘积,并冠以符号 $(-1)^t$,得到形如

$$(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \tag{1.14}$$

的项,其中 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列,t 为这个排列的逆序数. 由于这样的排列共有 $n!$ 个,因而形如式(1.14)的项共有 $n!$ 项. 所有这 $n!$ 项的代数和

$$\sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

称为 n 阶行列式,记作

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

简记作 $\det(a_{ij})$,数 a_{ij} 称为行列式 $\det(a_{ij})$ 的元素.

显然,按定义 1.4 定义的二阶、三阶行列式与用对角线法则定义的二阶、三阶行列式是一致的. 当 $n=1$ 时,$|a|=a$. 注意不要将行列式两侧的竖线与与绝对值记号相混淆.

【例 1.6】 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & e & f & 0 \\ g & 0 & 0 & h \end{vmatrix}$.

解 由定义可知,D 是一个 $4!=24$ 项的代数和,然而在这个行列式里,除了 $acfh$, $adeh$, $bdeg$, $bcfg$ 这四项外,其余的项都至少含有一个因子 0,因而等于 0,与上面四项对应的排列依次是 1234,1324,4321,4231,而 $t(1234)=0$,$t(1324)=1$,$t(4321)=6$,$t(4231)=5$. 因此

$$D = acfh - adeh + bdeg - bcfg.$$

【例 1.7】 证明对角行列式(其中对角线上的元素是 λ_i,其他未写出的元素都是 0)

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n,$$

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

证　第 1 式是显然的，下面只证第 2 式.

若记 $\lambda_i = a_{i,n-i+1}$，则依行列式定义

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^t a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1} = (-1)^t \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n,$$

其中 t 为排列 $n(n-1)\cdots 21$ 的逆序数，故

$$t = 0+1+2+\cdots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

主对角线以下(上)的元素都是 0 的行列式，叫做上(下)三角行列式，它的计算与对角行列式计算一样.

【例 1.8】　证明下三角行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1\,1} & a_{n-1\,2} & \cdots & a_{n-1\,n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n\,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证　由于当 $j>i$ 时，$a_{ij}=0$，故 D 中可能不为 0 的元素 a_{ip_i} 的下标应有 $p_i \leqslant i$，即 $p_1 \leqslant 1, p_2 \leqslant 2, \cdots, p_n \leqslant n$.

在所有排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中，能满足上述关系的排列只有一个自然排列 $12\cdots n$，所以 D 中可能不为 0 的项只有一项 $(-1)^t a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$. 此项的符号 $(-1)^t = (-1)^0 = 1$，所以

$$D = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

习题 1.2

1. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}$；　(3) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^2 & x^2+x+1 \end{vmatrix}$；

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$；　(5) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$；　(6) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix}$.

2. 解方程 $\begin{vmatrix} x & 3 & 4 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix}=0$.

3. 当 x 取何值时 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix}\neq 0$?

4. 在六阶行列式 $\det(a_{ij})$ 中,下列元素乘积应取什么符号?

(1) $a_{15}a_{23}a_{32}a_{44}a_{51}a_{66}$; (2) $a_{11}a_{26}a_{32}a_{44}a_{53}a_{65}$;

(3) $a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}$; (4) $a_{51}a_{32}a_{13}a_{44}a_{65}a_{26}$.

5. 选择 k,l,使 $a_{13}a_{2k}a_{34}a_{42}a_{5l}$ 成为五阶行列式 $\det(a_{ij})$ 中带有负号的项.

第三节 n 阶行列式的性质

一、对换

为了研究 n 阶行列式的性质,我们先来讨论对换以及它与排列的奇偶性的关系.

在排列中,将任意 2 个元素对调,其余的元素不动,这种做出新排列的方法叫做对换.将相邻 2 个元素对换,叫做相邻对换.

定理 1.1 一个排列中的任意两个元素对换,排列改变奇偶性.

证 先证相邻对换的情形.

设排列为 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m$,对换 a 与 b,变为 $a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m$.显然 $a_1,\cdots,a_l;b_1,\cdots,b_m$ 这些元素的逆序数经过对换并不改变,而 a,b 两元素的逆序数改变为:当 $a<b$ 时,经过对换后 a 的逆序数增加 1 而 b 的逆序数不变;当 $a>b$ 时,经过对换后 a 的逆序数不变而 b 的逆序数减少 1.所以排列 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m$ 与排列 $a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m$ 的奇偶性不同.

再证一般对换的情形.

设排列为 $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n$,把它作 m 次相邻对换,调成 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m c_1\cdots c_n$,再作 $m+1$ 次相邻对换,调成 $a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_n$,总之,经 $2m+1$ 次相邻对换,排列 $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n$ 调成排列 $a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_n$,所以这两个排列的奇偶性相反.

推论 1.1 奇排列调成标准排列的对换次数为奇数,偶排列调成标准排列的对换次数为偶数.

证 由定理 1.1 知,对换的次数就是排列奇偶性的变化次数,而标准排列是偶排列(逆序数为 0),因此推论成立.

下面利用定理 1.1 讨论行列式定义的另一种表示法.

对于行列式的任一项

$$(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n},$$

其中 $1\cdots i\cdots j\cdots n$ 为自然排列,t 为排列 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 的逆序数,对换元素 a_{ip_i} 与 a_{jp_j},有

$$(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n},$$