同理心教育®
EMPATHY EDUCATION
推荐

全国高校自主招生考试

复旦千分考应试宝典

EMPATHY EDUCATION

（理科分册）

主编·高 懿/唐一端
副主编·赖 翔/郭 璠

★趋势分析与备考方略
☆单科分析与真题解析
★模拟试卷与答案解析

EMPATHY
EDUCATION

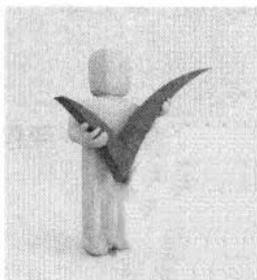
东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

主编
唐一端 高懿

副主编
郭璠 赖翔

全国高校自主招生考试

复旦千分考应试宝典



（理科分册）

东南大学出版社

内容提要

复旦大学优秀高中水平测试(以下简称千分考)涉及高中范围内的十门主要学科,二百道题均为选择,题量之大、难度之高,非寻常考试所能比拟。近年来在各科题量分布方面,语数英等主课各占32题,政史地生物化等加试科目各占16题左右,计算机占8题左右。其中既有基础知识的考查、综合能力的运用,也不乏偏、怪、难的题目;而其独特的计分方式(即做对得5分、不做不得分、做错扣2分)及标准分析算法(即正态分布原则)也让很多同学望而却步。

上海同理心教育从2006年开始涉足复旦自主招生考试的研究和辅导工作。按照复旦千分考十门功课的脉络,汇集各专业的精华,遵循复旦人的逻辑,编写了这本教材,其中包括最优秀的复旦课程、最优秀的复旦著作以及最核心的复旦人才选拔精神。学生通过对这些内容的学习,既能够从高等教育的高度来审视大多数中学阶段的学科知识,进行高效的备考;同时也能够为今后进入复旦大学学习,做好情感和精神上的铺垫。

图书在版编目(CIP)数据

复旦千分考应试宝典.理科分册 / 高懿,唐一端主编.一南京:东南大学出版社,2013.10
ISBN 978-7-5641-4362-6

Ⅰ.①复… Ⅱ.①高… ②唐… Ⅲ.①理科(教育)—课程—高中—升学参考资料 Ⅳ.①G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第147271号

复旦千分考应试宝典(理科分册)

主　　编:高　懿　唐一端
策划编辑:张　煦
装帧设计:王　玥
出 版 人:江建中
出版发行:东南大学出版社
社　　址:江苏省南京市四牌楼2号(邮编:210096)
印　　刷:常州市武进第三印刷有限公司
版　　次:2013年10月第1版　2013年10月第1次印刷
开　　本:787 mm×1092 mm　1/16
印　　张:14.5
字　　数:371千字
书　　号:ISBN　978-7-5641-4362-6
定　　价:39.00元

再版说明

高校自主招生选拔考试始于2003年，到今年已经走过10年，有大批学有所长的优秀学子通过自主招生进入自己理想的高校就读。仅上海地区的复旦、交大两校近几年在上海所招新生实际上80%以上是通过自主招生预录取这条途径的。

而考生最终能得以进入自主招生的名校，一般都需要经过笔试和面试两个环节。2013年各校自主招生的政策发生巨大变化，其中最核心的就是减少考试门数，对理科生来说考察的基本上是数学和物理两门，对于文科生而言，大多数学校是选择考察数学和语文，部分高校也没有放松对英语的要求。

作为在自主招生中声名显赫的"复旦千分考"，正式名称为复旦大学能力水平测试，也称之为复旦大学优秀生测试，简称复旦水平测试。通过一门考试，考察学生综合能力素质，是素质教育的精神体现。凡是推荐生、艺术生等想要进入复旦大学的考生都必须参加此测试。该考试的考试形式为：200道选择题。完卷时间为3小时。复旦大学2006年起开始施行水平测试，目前只面向江浙沪考生招生，必须要通过称为"千分考"的复旦大学自主招生水平测试，才能获得面试资格。

复旦千分考，题多、面广、难度大，综合交叉，备考很难，是历届参加过考试的学生普遍的反映。从千分考内容上看，近两年的理科难度明显加大，文科难度稳中有降(或曰差不多)，英文词汇题难度明显下降，语文题目沿袭了考察知识面的套路(从美学、诺贝尔奖、诗歌，到错别字、繁体字等)。风格总体说来变化不大，如果你能把十门课都学好，复旦大学的大门就永远向你敞开。

下面收录了几项较为实用的答题策略，考生可选择性参考：

1) 何时该猜答案

由数学期望可知：四个选项在你心目中等可能时，若四个都不能排除，则期

望值为负，应当空着不猜；若只能排除一个，期望值为 1/3，为正但较小，应考虑全卷做题量，谨慎为之；若能排除两个，期望值为 1.5，应该猜。

2）空多少题为好

研究结果显示，做题数不应小于 120 道，否则在一般正确率下不可能通过；若想得到高分，建议做题数大于 160 道。

3）做好标记

没错！在题号边做好此题是“肯定对”、“二选一”、“三选一”，还是“放弃吧”的简单标记，在草稿纸上划“正”字记录空白题目的数量，都是能够在高压的考场上让你“心中有数”的好办法。

4）做题顺序

建议先完成自己最擅长的科目，这样有助于保持乐观心态，也能将最应拿下的分数立即收入囊中。然后完成历史、地理、生物、政治这几门文科，因为它们思维量小，记忆量大，一眼便知答案是什么，优先完成它们可节约时间。把自己最不擅长的科目放在最后完成，可有效地避免挫败感所造成的过多负面影响。而且，此时大局基本已定，可以无压力地面对最不擅长的科目，反而有可能超常发挥。

5）怎么涂卡

建议做完一组题目（一门课、一面纸等等）集体涂一次卡。既不要做一道涂一道（每次来回，浪费时间），也不要等到全部做完再涂（万一做题慢了，来不及涂完）。但必须提醒的是，临时改变涂卡习惯可能影响心理状态，有一定风险，望同学们权衡利弊、谨慎为之。

6）心理准备

根据往年情况，考场内可能有各种各样意料之外的干扰，比如老师踱步、他人翻页、进出教室等，要以不变的镇定心态应对万变的突发情况。

本书适用于希望参加复旦千分考的同学，同时对于虽不参加复旦自主招生考试，但需要参加高考的同学，都有参考价值和兼容效应。高考，越来越多地注重考察能力，测评综合素质，鼓励创造性思维，我们借“复旦千分考应试宝典”传递正能量给所有的“明日之星”，选拔是手段不是目的，考试是挑战不是苦难，一起努力吧！

东南大学出版社

2013 年 9 月

序

自2006年起，上海同理心教育开始涉足复旦自主招生考试的研究和辅导工作。复旦自主招生是复旦大学推行的一种新的人才选拔模式。一群从复旦大学毕业的校友，怀着对母校精神的崇敬，也希望为复旦的人才选拔做点实事，从开始搜集零星材料，到摸索编写辅导讲义，几经春秋、几易书稿，并且经过几年辅导培训，讲义才基本成熟。

我们依照复旦自主招生千分考十门功课的脉络，汇集了复旦大学各个专业的精华，按照复旦人的逻辑，诠释复旦人的方式，编写了这本讲义，其中包含最优秀的复旦课程、最优秀的复旦著作以及最核心的复旦人才选拔精神。学生通过对这些内容的学习，既能够从高等教育的高度来审视大多数中学阶段的学科知识，同时也能够为今后进入复旦大学学习，作好情感和精神上的铺垫。

我们坚信苏格拉底式的教育理念：没有对话，就没有交流，没有交流，也就没有真正的教育对话，这在中学教育中尤为重要。我们始终认为，一个青少年学生更多时候需要的是理解和共鸣，而我们的传统应试教育更多的是自上而下的灌输，把原来鲜活美好的中学知识，变成了一本本枯燥无味的习题集，而传授知识的过程，也变成了教师一厢情愿上演的独角戏。

同理心教育致力于改变这样传统的教学困境，试图让更多的中学生得到理解，产生共鸣，正如我们的复旦自主招生千分考备考课程。我们首先描述给学生在复旦大学读书的美好，之后让学生感受到爱智慧的快乐，通过严谨的知识点梳理和启发式的课堂阐述，让学生掌握学科规律，找到学习的方法，在整个过程中，我们持续不断地理解和包容学生，持续不断地鼓励和赞扬学生，最终跟学生一起越过现实湍急的河流，到达理想的彼岸。

同理心的自主招生课程就好像一个“小复旦”，百花齐放，异彩纷呈。我们不仅请了复旦校友和复旦大学本校的教师分享智慧，还先后邀请过意大利威尼

斯大学汉学专业的老师给大家讲解西方历史文化与西方人眼中的中国，以及德国海德堡大学哲学系的博士给大家讲解德国哲学史。不同的教育背景的老师，一方面提升了学生的心智，开阔了学生的眼界，另外一方面以更本质的方式诠释复旦考题，让学生换位思考，能够从复旦大学选拔学生的角度来备考。

记得2010年我带的班级里，就请过威尼斯大学的老师跟同学们讨论柏拉图的cave metaphor，学生们不仅对这个问题本身有了正确的认识，更得到了很多道德启发，也就是：一个获得真理的人，应该勇敢地告诉所有人，哪怕不被接受。这样一种道德启发激发了学生们求知的责任感，也让更多学生掌握了正确的价值取向，在复旦自主招生的面试中脱颖而出。学生在面试辅导班与老师对话时，怀着一种强烈的求知求索精神和高度的社会责任感，并且体现了较好的人文与科学素养。许多教授对同理心学员的评价是：一见如故。仿佛同理心的学员就是为复旦传递薪火的新生力量。

冯友兰先生曾经谈到过“照着讲”和“接着讲”：照着经典讲的是哲学史家，接着经典讲的是哲学家。我们希望，在我们同理心教育，在我们跟更多的优秀学子达成共情(empathized)之后，他们能够沿着我们的思路，在未来的高等学府中“接着讲”下去。

由于水平和篇幅的限制，会有一些错误，也有很多内容在本书中未能穷尽，为此我们在官方网站 www. empathyedu. com 上开辟了一个专栏，定期更新一些资料和信息，真正为大家的学习提供力所能及的帮助，希望广大读者有空可以去看一下。在此，我想感谢好朋友高懿老师对本书的支持，还有同理心教育的郭播、吴笑位、张培等老师作出的巨大贡献。

唐一端

上海同理心教育

2011. 5. 26

目录

第一部分

单科分析与真题解析

一 数学

1 数学学科考试趋势分析

(1) 历年考题分布

年份	2006	2007	2008	2009	2010	2011
题号	107～136	59～88	65～96	113～144	113～144	113～144
题量	30	30	32	32	32	32
其中						
函数	11	11	8	11	11	9
平面几何及其函数	7	7	9	8	9	8
立体几何	2	3	2	3	5	4
不等式和极限	3	2	2	3	2	5
多项式	4	3	4	1	1	1
概率、排列组合、集合等	1	2	4	4	1	2
复数、行列式等	2	2	3	2	3	3

(2) 考点分析与备考方略

数学考试历来是自主招生的重头戏,复旦千分考也是如此。

复旦千分考数学题的范围比较大,考查了包括函数、平面几何、立体几何、不等式和极限、多项式、概率、复数等在内的很多内容。而难度上,源于高中又高于高中教学。这就需要我们在平时做题时,更深刻地掌握做题的方法和思路而不是一味地"刷题"。有一些题目需要一些额外的知识,而这些知识高中课堂并没有教,对于参加数学竞赛的同学来说就有一定优势,而没有参加数学竞赛的同学则需要通过额外的学习去对这些知识进行了解,比如复数的辐角等。千分考中的数学题注重的是方法和思想,一个好的方法往往可以对解题起到奇效。而我们也要充分运用排除法等特殊方法去解题,从而快速解答题目。考试时注意审题,计算时细心,因为题量巨大,很难留下时间检查,因此要力争一次做对。

2 数学学科真题与要点解析

【例 1】 $\arctan\frac{1}{3}+\arctan\frac{1}{5}+\arctan\frac{1}{7}+\arctan\frac{1}{8}=$ （ ）

A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{2}$

【答案】 该题正确答案为 B。

【解析】 我们设 $\alpha=\arctan\frac{1}{3}+\arctan\frac{1}{5}$，$\beta=\arctan\frac{1}{7}+\arctan\frac{1}{8}$，则

$\tan\alpha=\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}}=\frac{4}{7}$，$\tan\beta=\dfrac{\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{8}}=\frac{3}{11}$，由题意 α,β 为锐角

所以 $\alpha=\arctan\frac{4}{7}$，$\beta=\arctan\frac{3}{11}$，

设 $\gamma=\alpha+\beta$，由题意 γ 为锐角且 $\tan\gamma=\dfrac{\frac{4}{7}+\frac{3}{11}}{1-\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{11}}=1$，所以 $\gamma=\frac{\pi}{4}$。

【例 2】 2 012！的末尾零的个数为 （ ）

A. 500 B. 501 C. 502 D. 503

【答案】 该题正确答案为 B。

【解析】 2012！的因子 2 比因子 5 多，只分析因子 5 的总数。在 1，2，3，…，2012 中，5 的倍数的个数为 402 个，5^2 的倍数的个数为 80 个，5^3 的倍数的个数为 16 个，5^4 的倍数的个数为 3 个。所以 2012！中 5 的因子的总个数有 $302+80+16+3=501$ 个。所以 2012！的末尾有连续 501 个零。

【例 3】 记三角形三边的平方和为 M，三边上的中线的平方和为 N，则 （ ）

A. $M=N$ B. $M=2N$ C. $2M=3N$ D. $3M=4N$

【答案】 该题正确答案为 D。

【解析】 设三角形三边长分别为 a,b,c，三条中线相应为 x,y,z，因为平行四边形得对角线平方和等于四边平方和，所以可得

$(2z)^2+c^2=2(a^2+b^2)$

$(2x)^2+a^2=2(b^2+c^2)$

$(2y)^2+b^2=2(c^2+a^2)$

三式相加得 $4(x^2+y^2+z^2)=3(a^2+b^2+c^2)$。也就是答案 D。

【例 4】 正方体的对角线长为 5，其表面积为 （ ）

A. 30 B. 40 C. 50 D. 60

【答案】 该题正确答案为 C。

【解析】 设棱长为 x，则由题意可得 $3x^2=5^2$，所以表面积为 $6x^2=50$。

【例 5】 数列 $x_1=0$，$x_2=1$，$x_n=\frac{1}{2}(x_{n-1}+x_{n-2})(n>2)$，则 x_n 的值最终比较接近于

（ ）

A. 0　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. 1

【答案】 该题正确答案为C。

【解析】 我们可以在数轴上进行两分法操作，观察趋势。最终发现 x_n 趋近于$\frac{3}{4}$。

【例 6】 棱长为1的正方体内有两球外切，它们都与正方体的三个面相切，且球心在该正方体同一条对角线上，求两球体积的和最大时，两球半径之比为　　(　　)

A. $1:(2-\sqrt{3})$　　B. $1:(\sqrt{2}-1)$　　C. $1:(\sqrt{3}-1)$　　D. $1:1$

【答案】 该题正确答案为A。

【解析】 设两球半径分别为 x,y，则由题意得 $x+y+(x+y)/\sqrt{2}=1$，两球体积和为$\frac{4\pi}{3}(x^3+y^3)$，利用以上两式联立后可得当体积最大时，两球的半径比例为A。

【例 7】 地球外绕地球旋转有卫星，能看到25%以上的地球表面积，已知地球半径为R，求它离地表最小高度　　(　　)

A. $2R$　　B. $3R$　　C. $4R$　　D. R

【答案】 该题正确答案为D。

【解析】 看到的面积是一个球冠，$S_1=2\pi R*R(1-\sin\theta)$，球表面积，$S_0=4\pi R\hat{}2$，$S_1=1/4S_0$，所以 $\sin\theta=1/2$。设飞船离地 x，则离圆心 $R+x$。因为视野与球面相切，所以 $\sin\theta=R/(R+x)$。解得 $x=R$。

【例 8】 圆：$x^2+y^2+4x-2y+1=0$，直线：$3x+2y-8=0$，圆上一点到直线的最大距离是　　(　　)

A. $\frac{2}{\sqrt{13}}$　　B. $\frac{12}{13}$　　C. $\frac{12}{\sqrt{13}}+2$　　D. $\frac{2}{13}$

【答案】 该题正确答案为C。

【解析】 本题需要把圆化为标准形式后，在直角坐标系中画图即可求出。

【例 9】 $x^6+2x^4-1=0$ 的实数解的个数　　(　　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 4

【答案】 该题正确答案为C。

【解析】 求导可知该函数只有一个零点0，且该点取最小值.代入得此最小值为-1小于0，因此有两个实数解。

【例 10】 复平面内有平行四边形 $ABCD$，其中 $OA=1+3i$，$OB=2+4i$，$OD=4+5i$，则 $OC=$　　(　　)

A. $3-4i$　　B. $4+3i$　　C. $3+4i$　　D. $5+6i$

【答案】 该题正确答案为D。

【解析】 在复平面内画出图案易得答案为D。

【例 11】 已知圆 O：$x^2+y^2=1$，另有点 $P(2,0)$，Q 是圆上的动点，求$\angle POQ$ 的角平分线与 PQ 交点的轨迹方程　　(　　)

A. $\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+y^2=\frac{4}{9}$　　B. $\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+y^2=\frac{4}{9}$

C. $x^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$　　D. $x^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}$

【答案】 该题正确答案为 A。

【解析】 该题不需要进行具体计算，只需要取 0 度，45 度，90 度等特殊角平分线进行验证就可以很轻松地得到答案为 A。

【例 12】 二项式$(1+\sqrt{2})^{50}$展开后最大的是 （　　）

A. $C_{50}^{28}(\sqrt{2})^{28}$　　B. $C_{29}^{29}(\sqrt{2})^{29}$　　C. $C_{30}^{30}(\sqrt{2})^{30}$　　D. $C_{50}^{31}(\sqrt{2})^{31}$

【答案】 该题正确答案为 B。

【解析】 $(1+\sqrt{2})^{50}=\sum_{i=0}^{50}C_{50}^{k}\sqrt{2}^{k}$，令 $a_k=C_{50}^{k}\sqrt{2}^{k}$，则$\dfrac{a_{k+2}}{a_k}=\dfrac{c_{50}^{k+1}\sqrt{2}^{k+1}}{c_{50}^{k}\sqrt{2}^{k}}=\dfrac{50-k}{k+1}\sqrt{2}$。

令$\dfrac{30k}{k+1}\sqrt{2}<1$，得 $k>28.86$，所以 $k>29$ 时，a_k 递减，反之递增. 所以最大项为 a_{29} $C_{30}^{29}\sqrt{2}^{29}$。

【例 13】 $f(x)$，$g(x)$是 $f(x)$，$g(x)$的复合函数，命题："$f(x)$，$g(x)$是奇函数，则 $f(x)$，$g(x)$同时为奇函数"的逆否命题为 （　　）

A. $f(x)$，$g(x)$不同时为奇函数，则 $f(x)$，$g(x)$不是奇函数

B. $f(x)$，$g(x)$都不为奇函数，则 $f(x)$，$g(x)$不是奇函数

C. $f(x)$不是奇函数，则 $f(x)$，$g(x)$不是奇函数

D. $g(x)$不是奇函数，则 $f(x)$，$g(x)$不是奇函数

【答案】 该题正确答案为 A。

【解析】 此为基本知识题目。

【例 14】 在平面直角坐标系中，$x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1=x_3y_2+x_2y_1+x_1y_3$ 是(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，(x_3,y_2)共线的(　　)条件。

A. 充分非必要　　B. 必要非充分

C. 充要　　D. 既不充分也不必要

【答案】 该题正确答案为 B。

【解析】 当 $x_1=x_2=x_3=y_1=y_2=y_3=0$ 时，显然满足第一个条件但是不满足第二个条件，当三点共线时，由斜率相等的条件变形后可得第一个条件，因此时必要非充分条件。

【例 15】 满足 $f(x)=x^3-2x+1>0$ 的 x 的范围 （　　）

A. $\left(-\dfrac{\sqrt{5}+1}{2},1\right)\cup\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2},+\infty\right)$　　B. $\left(-\dfrac{\sqrt{5}+1}{2},\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\cup(1,+\infty)$

C. $\left(-\dfrac{\sqrt{5}-1}{2},1\right)\cup\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2},+\infty\right)$　　D. $\left(-\dfrac{\sqrt{5}-1}{2},\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\cup(1,+\infty)$

【答案】 该题正确答案为 B。

【解析】 $x^3-2x+1>0$，即$(x-1)(x^2+x-1)>0$。所以 $x^3-2x+1>0$ 的三根从小到大依次为$-\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$，$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，1。不等式的解集就是答案 B。

【例 16】 复数 $z=(\sin 80°+i\sin 10°)^5$，在复平面中将其表示的向量逆时针旋转 10°，问表示新向量的复数为 （　　）

A. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$　　C. $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$　　D. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$

【答案】 该题正确答案为 A。

【解析】 由题意 $z=(\sin 80°+i\sin 10°)^5(\cos 10°+i\sin 10°)=(\cos 10°+i\sin 10°)^6=\cos 60°+i\sin 60°$,对应的复数即为答案 A。

【例 17】 一幢楼房共有 11 层,从一楼出发,有三名乘客,每人在每一层出电梯的概率相同,问三名乘客在不同层出电梯的概率 ( )

A. $\frac{7}{25}$ B. $\frac{18}{25}$ C. $\frac{118}{121}$ D. $\frac{90}{121}$

【解答】 B $P=\frac{A_{11}^3}{11^2}=\frac{90}{121}$

【例 18】 设复数 z 满足 $|z|<1$ 且 $\left|\bar{z}+\frac{1}{z}\right|=\frac{5}{2}$,求 $|z|$。

【解答】 由 $\left|\bar{z}+\frac{1}{z}\right|=\frac{5}{2}$ 得 $|z|^2+1=\frac{5}{2}|z|$,已经转化为一个实数的方程。解得 $|z|=2$ 或 $|z|=\frac{1}{2}$,由 $|z|<1$,得 $|z|=\frac{1}{2}$。

【例 19】 是否存在四个正实数,它们的两两乘积分别是 2,3,5,6,10,16?

【解答】 设存在四个正实数分别为 $a<b<c<d$,依题意:$ab=2,ac=3,ad=5,bc=6,bd=10,cd=16$,$\therefore a^2bc=6$,$\therefore a=1,b=2,c=3,d=5$,而 $cd=15\neq16$,故不存在。

或解:$\because abcd=32$,而 $(abcd)^2=1\ 800\times16$,不满足,故不存在。

【例 20】 求过抛物线 $y=2x^2-2x-1$,$y=-5x^2+2x+3$ 交点的直线方程。

【解答】 $\begin{cases}y=2x^2-2x-1\\y=-5x^2+2x+3\end{cases}$,$\begin{cases}5y=10x^2-10x-5\\2y=-10x^2+4x+6\end{cases}$,$7y=6x+1$,$\therefore 6x+7y-1=0$ 为所求。

【例 21】 若 $A+B=\frac{2\pi}{3}$,则 $\cos^2A+\cos^2B$ 的最小值和最大值分别为多少?

【分析】 首先尽可能化简结论中的表达式 $\cos^2A+\cos^2B$,沿着两个方向:①降次:把三角函数的平方去掉;②去角:原来含两个角,去掉一个。

【解答】 $\cos^2A+\cos^2B=\frac{1+\cos 2A}{2}+\frac{1+\cos 2B}{2}=1+\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B)$

$=1+\cos(A+B)\cos(A-B)=1-\frac{1}{2}\cos(A-B)=1-\frac{1}{2}\cos\left(2A-\frac{2}{3}\pi\right)$,易得最小值为 $\frac{1}{2}$,最大值为 $\frac{3}{2}$。

【例 22】 已知向量 $\boldsymbol{a}=(0,1)$,$\boldsymbol{b}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$,$\boldsymbol{c}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$,$x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}=(1,1)$,求 $x^2+y^2+z^2$ 的最小值。

【解答】 由 $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}=(1,1)$ 得 $\begin{cases}-\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2}z=1\\x-\frac{y}{2}-\frac{z}{2}=1\end{cases}$,即 $\begin{cases}-\frac{\sqrt{3}}{2}(y-z)=1\\x-\frac{y+z}{2}=1\end{cases}$。

由于 $x^2+y^2+z^2=x^2+\frac{(y+z)^2+(y-z)^2}{2}$,

可以用换元法的思想,看成关于 $x,y+z,y-z$ 三个变量,变形 $\begin{cases}y-z=-\frac{2}{\sqrt{3}}\\y+z=2(x-1)\end{cases}$,代入

$$x^2+y^2+z^2=x^2+\frac{(y+z)^2+(y-z)^2}{2}=x^2+2(x-1)^2+\frac{2}{3}=3x^2-4x+\frac{8}{3}=$$

$3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{4}{3}$,所以最小值为$\frac{4}{3}$。

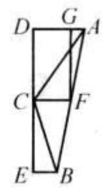
【例 23】 AB 为过抛物线 $y^2=4x$ 焦点 F 的弦,O 为坐标原点,且$\angle OFA=135°$,C 为抛物线准线与 x 轴的交点,则$\angle ACB$ 的正切值为 ( )

A. $2\sqrt{2}$　　B. $\frac{4\sqrt{2}}{5}$　　C. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$　　D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

【解答】 A 解法一:焦点 $F(1,0)$,$C(-1,0)$,AB 方程 $y=x-1$,与抛物线方程 $y^2=4x$ 联立,解得 $A(3+2\sqrt{2},2+2\sqrt{2})$,$B(3-2\sqrt{2},2-2\sqrt{2})$,于是

$k_{CA}=\frac{2+2\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$k_{CB}=\frac{2-2\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,$\tan\angle ACB=\frac{k_{CA}-k_{CB}}{1+k_{CA}k_{CB}}=2\sqrt{2}$,答案 A。

解法二:如图,利用抛物线的定义,将原题转化为:在直角梯形 $ABED$ 中,$\angle BAD=45°$,$CF/\!/DA$,$CF=2$,$AF=AD$,$BF=BE$,求$\angle ACB$。



$\tan\angle ACF=\tan\angle CAD=\frac{DC}{AD}=\frac{GF}{AF}=\frac{\sqrt{2}}{2}$。类似的,有

$\tan\angle BCF=\tan\angle CBE=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$\angle ACB=\angle ACF+\angle BCF=2\angle ACF$,

$\tan\angle ACB=\tan 2\angle ACF=2\sqrt{2}$,答案 A。

【例 24】 若对一切实数 x 都有 $|x-5|+|x-7|>a$,则实数 a 的范围是 ( )

A. $a<12$　　B. $a<7$

C. $a<5$　　D. $a<2$

【解答】 D 设 $y=|x-5|+|x-7|$

则 $y=\begin{cases}2x-12, x\geqslant 7\\ 2, 5<x<7\\ 12-2x, x\leqslant 5\end{cases}$

因此 $y\geqslant 2$

又因为对一切实数 x 均有 $y>a$ 成立,

所以 $a<2$,选 D。

【例 25】 设有集合 $S=\{x|\log_x(3x^2-4x)\geqslant 2,x>0\}$,$T=\{x|\log_x(2x^2-k^2x)\geqslant 2,x>0\}$。满足 $S\subseteq T$ 的数 k 的取值范围为 ( )

A. $k^2\geqslant 2$　　B. $k^2\leqslant 2$　　C. $k\geqslant\sqrt{2}$　　D. $k\leqslant\sqrt{2}$

【解答】 B 由 $\log_x(3x^2-4x)\geqslant 2$ 得 $x\geqslant 2$ 或 $0<x<1$

由 $\log_x(2x^2-k^2x)\geqslant 2$ 得 $x\in\{(0,k^2)\cap(0,1)\}\cup\{[k^2,+\infty)\cap[1,+\infty)\}$

因为 $S\subseteq T$,所以 $k^2\leqslant 2$。

【例 26】 设有正整数 n 可以等于 4 个不同的正整数的倒数之和,则这样的 n 个数是 ( )

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【解答】 B 正整数越大,倒数就越小。

因此,4 个不同正整数倒数之和最大值为 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{25}{12}$,