

大
学
数
学

线性代数与 空间解析几何 (第四版)

哈尔滨工业大学数学系

郑宝东 主编

郑宝东 王忠英 编



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

大学
数学

线性代数与

空间解析几何 (第四版)

Xianxing Daishu yu Kongjian Jiexi Jihe

哈尔滨工业大学数学系

郑宝东 主 编

郑宝东 王忠英 编



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书是哈尔滨工业大学所编《大学数学》丛书中的一本,全套丛书包括《工科数学分析(第四版)(上、下)》、《线性代数与空间解析几何(第四版)》、《概率论与数理统计(第二版)》共4本教材。

本书将线性代数与空间解析几何这两部分内容按其自身的内在联系合理地结合起来,使它们相互支持,前后呼应,成为一体。内容包括行列式、矩阵、几何向量、 n 维向量、空间中的平面与直线、线性方程组、特征值与特征向量、线性空间与线性变换、二次型、空间中的曲面与曲线。

作为选学部分(加*号部分),本书选择了大学低年级学生可以理解的若干应用案例供读者选读,希望起到引导学生主动学习和自觉应用的作用。

本书配有内容丰富、类型齐全、难易适度的习题和综合练习,并以附录形式介绍了多项式、广义逆矩阵、Jordan标准形和MATLAB在线性代数与空间解析几何中的应用。全书层次清晰,论证简洁,可读性强。

本书适合作为高等院校理工科非数学类专业相应课程的教材或教学参考书,亦可作为硕士研究生入学考试的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

大学数学.线性代数与空间解析几何/郑宝东主编;
郑宝东,王忠英编.--4版.--北京:高等教育出版社,2013.4

大学数学系列教材

ISBN 978-7-04-037018-8

I. ①大… II. ①郑…②王… III. ①高等数学-高等学校-教材②线性代数-高等学校-教材③立体几何-解析几何-高等学校-教材 IV. ①O13②O151.2③O182.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第031224号

策划编辑 王强 责任编辑 李茜 封面设计 于文燕 版式设计 马敬茹
插图绘制 黄建英 责任校对 胡晓琪 责任印制 韩刚

出版发行	高等教育出版社	网 址	http://www.hep.edu.cn
社 址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.landaco.com
印 刷	河北鹏盛贤印刷有限公司		http://www.landaco.com.cn
开 本	787mm×960mm 1/16		
印 张	18.5	版 次	2008年6月第1版
字 数	340千字		2013年4月第4版
购书热线	010-58581118	印 次	2013年4月第1次印刷
咨询电话	400-810-0598	定 价	27.20元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物料号 37018-00

第四版前言

自本书第三版出版以来,作者又收到许多读者和教师提出的建设性意见,正是他们的关心和爱护才使本书充满活力,借此第四版出版的机会,向一直关心和支持我们工作的所有读者和同行再次表示深深的谢意。

在保持本书原有风格的基础上,我们在如下几个方面作了一些修订。

1. 为了更好地发挥大学数学教学在培养大学生自主创新能力方面的作用,书中进一步加强了对线性代数与空间解析几何中基本概念的背景、意义的阐述。比如,行列式的几何意义,特征值、特征向量的含义等。

2. 为使学生在将来的学习和工作中更好地、更自觉地应用线性代数和解析几何解决实际问题,我们选取了若干低年级大学生能够理解的应用案例,用于说明如何应用线性代数与空间解析几何的理论解决科学与技术中的实际问题。比如,矩阵乘法在保密通信、卫星定位、图形变换、网络分析等领域中的应用,特征值、特征向量在微分方程、差分方程中的应用,二次型在极值问题中的应用等。

3. 为了开阔学生的视野,作为附录,我们简单介绍了 MATLAB 在线性代数与空间解析几何中的应用。

在此次出版过程中,哈尔滨工业大学数学系王忠英副教授做了大量收集资料、编撰案例、整理写作、校对验算等工作。

由于我们的水平有限,书中错误和不妥之处在所难免,还请广大读者和同行继续批评指正。

编者

2012年9月于哈尔滨工业大学

第三版前言

培养基础扎实、勇于创新型人才,历来是大学教育的一个重要目标。随着知识经济时代的到来,这一目标显得更加突出。在工科大学教育中,数学课既是基础理论课程,又在培养学生抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力和科学计算能力诸方面起着特殊重要的作用。为适应 21 世纪高等学校学生和广大工程技术人员对数学的需求,我校作为国家工科数学教学基地之一,多年来在数学教学改革方面进行了一定的探索,已经初见成效。结合这些教学改革成果,我校编写了《大学数学系列教材》,本书就是其中的一本。

本书在如下三个方面作了修订:

1. 为了提高理工科学生利用线性代数分析问题的水平,增强自主创新能力,第三版更加注重对基本概念的阐述,特别给出了特征值、特征向量的实际背景和深刻含义。

2. 矩阵的初等变换是线性代数处理问题的最基本方法之一。第三版在理论与应用两个方面加强了对矩阵初等变换的处理,尤其强调了矩阵乘法与矩阵初等变换的联系,利用初等矩阵、可逆矩阵刻画矩阵的初等变换。

3. 分块矩阵的运算与分块矩阵的初等变换在线性代数的理论证明和实际应用中占有重要地位。借助分块矩阵,不仅可以把高阶矩阵的问题转化为低阶矩阵的问题,而且可以把低阶矩阵的问题放到高阶矩阵的环境中处理,效果显著。第三版加强了对分块矩阵初等变换的处理,给出了应用实例。

除了上述三点较重要的修改外,对第二版的某些习题、例题以及个别文字也有些修改。

自从本书问世以来,作者收到校内外许多专家和读者的反馈信息,他们对本教材提出了很多有价值的改进意见。正是由于大家的关心与支持才使本书顺利成为“普通高等教育‘十一五’国家级规划教材”。借此第三版的机会,向关心与支持我们工作的所有专家和读者表示由衷的谢意。

尽管我们做了很大努力,力求克服第一、二版的不足,但是由于我们的水平有限,不妥之处在所难免,敬请广大读者再予指正。

编者

2008 年 2 月于哈尔滨工业大学

第二版前言

自从本教材首次出版以来,作者收到读者很多反馈信息,他们对本教材提出了许多很有价值的改进意见。这是对我们工作的鼓励和支持,借此再版之机,向关怀和支持我们工作的广大读者及同行表示由衷的谢意。

根据目前教学改革的精神,结合我们的教学实践,此次修订对教材内容及习题作了小量增删。为使线性代数与空间解析几何更好地结合,我们对教材内容、体系作了小量调整。为开阔学生视野,作为附录,我们保留了广义逆矩阵简介、Jordan 标准形简介,并增加了多项式代数的有关内容,理科性质较强的工科专业的学生可以选学这部分内容。如果学生独立完成本教材的综合练习 100 题有困难,教师可选其中部分习题作为示范题讲解。

尽管此次修订过程中我们作了很大努力,力求克服第一版教材的不足,保持原教材的特点,但是由于我们水平有限,不妥之处在所难免,敬请广大读者再予指正。

编者

2003 年 3 月于哈尔滨工业大学

第一版前言

作为一种工具,数学在人类科学的进步中所起的作用是不言而喻的。今天,数学技术已成为高技术的突出标志和不可或缺的组成部分。随着科学的进步,尤其是计算机和信息技术的迅速发展,知识更新的速度不断加快。人们已不满足于把数学仅仅当作一种工具来看待,而且希望通过数学训练领会到数学的思想方法和精神实质,提高数学素养,形成一种能力,终生受益。基于这种观念,在教材的编写过程中,我们努力遵循如下几个原则:

1. 精心选择、安排教学内容,以利于培养学生对事物某一方面结构的归纳和抽象的能力,以及从具体到一般的联想能力。
2. 内容的论述科学、准确,使学生掌握一种精确的数学语言,体会到线性代数与空间解析几何的思想方法,使学生具有通过自学掌握新的数学工具和数学思想的能力。
3. 精心安排例题、习题、综合练习题,使学生养成正确的演绎推理习惯,具备较强的自己动手推理、计算的能力。

线性代数是研究有限维空间线性理论的数学分支,有限维线性空间的理论来源于二维、三维空间中的向量代数。我们把二维、三维空间的向量代数安排在一般 n 维向量前讲授,以利于学生了解这部分内容的渊源。线性代数中的许多概念都是从几何中抽象推广出来的,在几何中可以找到这些概念的模式。解析几何是利用代数方法研究几何问题的数学分支。我们把这两部分内容按其内在联系合理地结合起来,使学生充分体会从具体到一般的抽象思维方法,充分体现代数学与几何学的相互支撑和相互促进的作用。

本书编者在编写过程中一直站在读者的角度,力求通俗易懂,并充分考虑当前全国硕士生入学考试的需要,其内容和难易程度符合全国硕士研究生入学考试大纲的要求。

本书是在多年教学实践与教学改革的基础上逐步形成的,凝结了哈尔滨工业大学数学系许多教师的教学经验,尤其是戚振开教授给予我们许多指导,在此一并表示深深的谢意。

由于编者水平有限,教材中缺点和疏漏在所难免,恳请读者批评指正。

编者

2000年8月于哈尔滨工业大学

目 录

第一章 n 阶行列式	1
1.1 n 阶行列式的概念	1
1.2 行列式的性质	8
1.3 行列式的展开定理	12
1.4 Cramer 法则	17
1.5* 行列式的几何意义	19
习题一	21
第二章 矩阵	27
2.1 矩阵的概念	27
2.2 矩阵的运算	29
2.3 可逆矩阵	37
2.4 矩阵的初等变换	42
2.5 矩阵的秩	47
2.6 初等矩阵	50
2.7 分块矩阵的概念及其运算	55
2.8 分块矩阵的初等变换	62
2.9* 应用实例	68
习题二	74
第三章 几何向量	79
3.1 几何向量的概念及其线性运算	79
3.2 几何向量的数量积、向量积和混合积	81
3.3 空间中的平面与直线	91
习题三	105
第四章 n 维向量	109
4.1 n 维向量的概念及其线性运算	109
4.2 向量组线性相关与线性无关	110
4.3 向量组的秩	117
4.4 向量空间	121
4.5 欧氏空间	127
4.6* 应用实例	133
习题四	135

第五章 线性方程组	140
5.1 线性方程组有解的充要条件	140
5.2 线性方程组解的结构	142
5.3 利用矩阵的初等行变换解线性方程组	150
5.4* 应用实例	157
习题五	162
第六章 特征值、特征向量及相似矩阵	166
6.1 特征值与特征向量	166
6.2 相似矩阵	171
6.3* 应用实例	180
习题六	184
第七章 线性空间与线性变换	186
7.1 线性空间的概念	186
7.2 线性空间的基底、维数与坐标	189
7.3 线性变换	190
7.4* 应用实例	196
习题七	199
第八章 二次型与二次曲面	202
8.1 实二次型	202
8.2 化实二次型为标准形	204
8.3 正定实二次型	213
8.4 空间中的曲面与曲线	217
8.5 二次曲面	224
8.6* 二次型在多元函数极值问题中的应用	235
习题八	236
附录 I 一元多项式	240
附录 II 广义逆矩阵	244
附录 III Jordan 标准形	246
附录 IV MATLAB 在线性代数与空间解析几何中的应用	249
综合练习 100 题	252
部分习题参考答案	262
综合练习 100 题部分参考答案	274
汉英词汇索引	278
参考文献	280

第一章 n 阶行列式

行列式的概念源于对方程组的研究.随着科学与技术的发展,行列式已经成为解决科学研究和工程技术中诸多问题的有效工具.本章主要讨论如下几个问题:

1. 行列式的概念;
2. 行列式的性质;
3. 行列式的计算;
4. 行列式的应用——Cramer(克拉默)法则.

1.1 n 阶行列式的概念

1.1.1 线性方程组的求解公式

设二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

我们希望得到线性方程组(1)的求解公式.对(1)作加减消元得

$$\begin{aligned} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 &= b_1a_{22} - a_{12}b_2, \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 &= a_{11}b_2 - b_1a_{21}. \end{aligned}$$

由 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, 得(1)的求解公式

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases} \quad (2)$$

为便于记忆,引入所谓二阶行列式的概念^①.

设 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 是任意四个数,记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

^① 行列式的概念产生于17世纪末期.

称其为二阶行列式. 称 $a_{ij}(i, j=1, 2)$ 为这个行列式的元素. a_{ij} 的两个下角标 i, j 分别表示 a_{ij} 所在的行、列的序号.

$$\text{例如, } \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \times 5 - 4 \times 2 = -3.$$

利用二阶行列式, 线性方程组(1)的解可表示为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

$$\text{记 } D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

$$\text{则 } x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}.$$

例如, 对线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 = 1. \end{cases}$$

由于

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \times 2 - 5 \times (-1) = 11 \neq 0,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 2 - 5 \times 1 = -3,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \times 1 - 1 \times (-1) = 4,$$

所以

$$\begin{cases} x_1 = \frac{D_1}{D} = -\frac{3}{11}, \\ x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{4}{11}. \end{cases}$$

为了得出关于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

的求解公式, 我们引入三阶行列式. 称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \quad (3)$$

为三阶行列式.

例如,

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \times 1 \times 0 + 0 \times 2 \times 2 + 4 \times 1 \times 1 - 3 \times 2 \times 1 \\ - 0 \times 1 \times 0 - 4 \times 1 \times 2 \\ = -10.$$

利用三阶行列式,可以把一类三元线性方程组的解表示成简洁的形式.设方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$$

记

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

则该方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

为了从二、三阶行列中总结出规律,给出 n 阶行列式的定义,进而解决 n 元线性方程组的求解公式问题,我们需要做一些必要的准备工作.

1.1.2 全排列的逆序数、对换

为了给出 n 阶行列式的定义,首先介绍全排列的“逆序数”和全排列的“对换”.

把 n 个不同的元素排成一列,叫做这 n 个元素的全排列(简称排列).称 n 个不同元素的排列为 n 阶排列,给定 n 个不同元素的排列共有 $n!$ 种.例如,自然数 1,2,3 的排列共有六种:

$$123, 132, 213, 231, 312, 321.$$

为了方便,今后把自然数 $1,2,\dots,n$ 视为 n 个不同的元素的代表.用 p_i 表示这 n 个数中的一个($i=1,2,\dots,n$),且当 $i \neq j$ 时 $p_i \neq p_j$,于是 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 便是 $1,2,\dots,n$ 的一个排列.对于排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$,我们把排在 p_i 前面且比 p_i 大的数的个数 t_i 称为全排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 中 p_i 的逆序数,把这个排列中各数的逆序数之和

$$t_1 + t_2 + \cdots + t_n$$

称为这个排列的逆序数,记为 $t(p_1 p_2 \cdots p_n)$.

逆序数为奇数的排列称为奇排列;逆序数为偶数的排列称为偶排列.显然,排列 $12 \cdots n$ 的逆序数为 0,故它是偶排列.称此排列为自然排列.

例 1 求排列 23514 的逆序数.

解 在排列 23514 中,2 的逆序数是 0,3 的逆序数是 0,5 的逆序数是 0,1 的逆序数是 3,4 的逆序数是 1,故排列 23514 的逆序数

$$t(23514) = 0 + 0 + 0 + 3 + 1 = 4.$$

在一个排列中,将某两个数的位置对调(其他数不动)的变动叫做一个对换.两个相邻数的对换称为相邻对换.

定理 1.1 一个排列中的任意两个数对换后,排列改变奇偶性.

证 先证相邻对换的情形.

设一个排列为 $a_1 a_2 \cdots a_s a b b_1 b_2 \cdots b_m$,对换 a 与 b 后,排列变为 $a_1 a_2 \cdots a_s b a b_1 b_2 \cdots b_m$.显然,经过此对换后, $a_1, a_2, \dots, a_s, b_1, b_2, \dots, b_m$ 的逆序数并不改变,而 a, b 两数的逆序数为:当 $a < b$ 时, a 的逆序数增加 1,而 b 的逆序数不变;当 $a > b$ 时, a 的逆序数不变,而 b 的逆序数减少 1.所以,排列 $a_1 a_2 \cdots a_s a b b_1 b_2 \cdots b_m$ 与 $a_1 a_2 \cdots a_s b a b_1 b_2 \cdots b_m$ 的奇偶性不同.

再证一般对换的情形.

对排列 $a_1 \cdots a_s a b_1 \cdots b_m b c_1 \cdots c_n$ 做 m 次相邻对换,变成 $a_1 a_2 \cdots a_s a b b_1 b_2 \cdots b_m c_1 \cdots c_n$,再做 $m+1$ 次相邻对换,变成 $a_1 a_2 \cdots a_s b b_1 b_2 \cdots b_m a c_1 c_2 \cdots c_n$.总之,经 $2m+1$ 次相邻对换,可以把排列 $a_1 \cdots a_s a b_1 \cdots b_m b c_1 \cdots c_n$ 变成排列 $a_1 \cdots a_s b b_1 \cdots b_m a c_1 c_2 \cdots c_n$.所以,这两个排列的奇偶性相反. \square

利用全排列逆序数的概念,由三阶行列式的定义容易看出三阶行列式有如下特点:

1. 式(3)等号后共有 $3!$ 项.

2. 式(3)等号后的每一项恰是三个元素的乘积 $a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3}$. 如果将行指标按自然次序排成 123, 则这三个元素的列指标排成 $p_1 p_2 p_3$, 它是 1, 2, 3 的排列. 因此, 等号右边恰好是所有位于不同行、不同列的 3 个元素之积的代数和.

3. 式(3)等号后各项的正负号由列指标排列的奇偶性决定(此时行指标按自然次序排列). 对应的列指标的排列分别是 123, 312, 231 时, 它们都是偶排列, 取正号; 对应的列指标的排列分别是 132, 213, 321 时, 它们都是奇排列, 取负号.

综上, 可将三阶行列式写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{p_1 p_2 p_3} (-1)^{\tau(p_1 p_2 p_3)} a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3},$$

其中“ Σ ”是对 1, 2, 3 的所有全排列 $p_1 p_2 p_3$ 取和.

1.1.3 n 阶行列式的概念

定义 1.1 设 n^2 个数, 排成 n 行 n 列的数表

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array} \quad (4)$$

其中 a_{ij} 是第 i 行第 j 列的数(称为元素). 每次取由 1 至 n 的一个排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$, 做 n 个元素 $a_{1p_1}, a_{2p_2}, \cdots, a_{np_n}$ 的乘积, 并冠以符号 $(-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)}$, 得到一项

$$(-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n},$$

这样的项共有 $n!$ 个. 称这 $n!$ 项的和为与表(4)相对应的 n 阶行列式, 记作

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n},$$

其中“ Σ ”是对所有 n 阶排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 取和. 也可把行列式简记作 $\Delta(a_{ij})$.

因此, 表(4)所对应的行列式是 $n!$ 项的代数和. 这些项是一切可能的取自表(4)的不同行、不同列的 n 个元素的乘积. 其一般项为 $a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$, 当 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 是奇排列时, 此项取负号; 当 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 是偶排列时, 此项取正号.

由定义可知,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

与前面的定义是一致的.

当 $n=1$ 时, 一阶行列式 $|a| = a$, 不要与绝对值记号混淆.

仔细观察二阶行列式的定义, 可以看出, 二阶行列式的各项可按下面的对角线法则求出:

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} -$$

同样, 三阶行列式的各项也可按下面的对角线法则求出:

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} -$$

但是, 阶数大于 3 的行列式没有类似的对角线法则.

显然, 若行列式 D 的某行(列)的元素全是零, 则一项 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} = 0$, 故此行列式为零.

例 2 证明四阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}.$$

证 这是一个四阶行列式, 应有 $4! = 24$ 项. 在每项 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}$ 中, 只要有一个元素等于零, 乘积就是零, 所以只需计算乘积中不出现零的项. 由于第 4 行中元素除了 a_{44} 外都是 0, 故只需取 $p_4=4$, 第 3 行元素除了 a_{33}, a_{34} 外都是 0, 现已取 $p_4=4$, 故只需取 $p_3=3$. 同理, 只需取 $p_2=2, p_1=1$. 于是这个行列式的展开式中不为 0 的乘积只可能是 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$, 而排列 1234 的逆序数是 0, 所以这一项所带的符号是正的. 因此, 该行列式等于 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$. \square

同理可以证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

称这种主对角线(从左上角到右下角这条线)以下(上)的元素都是 0 的行列式为上(下)三角形行列式. 类似于上三角形行列式, 还有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ = (-1)^{t(n, n-1, \dots, 2, 1)} a_{1n} a_{2, n-1} \cdots a_{n1} \\ = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2, n-1} \cdots a_{n1}.$$

在行列式的定义中, 为方便, 我们将 n 个元素的行指标按自然次序排列. 事实上, 数的乘法是可交换的, 因而这 n 个元素的次序是可以任意排列的. 一般地, n 阶行列式中的项可以写成

$$a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}, \quad (5)$$

其中 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 和 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是 $1, 2, \dots, n$ 的两个排列. 利用定理 1.1 可以证明, n 阶行列式中, 项(5)前面的符号等于

$$(-1)^{t(i_1 i_2 \cdots i_n) + t(j_1 j_2 \cdots j_n)}.$$

事实上, 对换 $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$ 中任两个数后, 由于 $t(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 和 $t(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 的奇偶性同时改变, 所以 $t(i_1 i_2 \cdots i_n) + t(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 的奇偶性不变, 从而 $(-1)^{t(i_1 i_2 \cdots i_n) + t(j_1 j_2 \cdots j_n)}$ 不变. 经一系列对换, 可将 $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$ 变成 $a_{1 p_1} a_{2 p_2} \cdots a_{n p_n}$, 于是

$$(-1)^{t(i_1 i_2 \cdots i_n) + t(j_1 j_2 \cdots j_n)} = (-1)^{t(1 2 3 \cdots n) + t(p_1 p_2 \cdots p_n)} = (-1)^{t(p_1 p_2 \cdots p_n)},$$

故由 n 阶行列式的定义知, $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$ 前面的符号等于 $(-1)^{t(i_1 i_2 \cdots i_n) + t(j_1 j_2 \cdots j_n)}$.

特别地, 项 $a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}$ 前面的符号等于 $(-1)^{t(p_1 p_2 \cdots p_n)}$. 于是 n 阶行列式的定义又可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{t(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}. \quad (6)$$

我们定义的行列式中的元素是数, 事实上, 可以将其推广成元素是某些其他

数学对象的情形.例如,可以同样地定义元素是多项式的行列式.

1.2 行列式的性质

设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

记

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

即 D' 是这样得到的:把 D 中第 i 行作为 D' 的第 i 列.这就是说 D' 的第 i 行第 j 列处的元素恰为 D 的第 j 行第 i 列处的元素.

称 D' 为行列式 D 的转置行列式.

性质 1.1 行列式与它的转置行列式相等.

证 记 $b_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, 则由式(6)可得

$$\begin{aligned} D' &= \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \sum (-1)^{i(p_1 p_2 \cdots p_n)} b_{1p_1} b_{2p_2} \cdots b_{np_n} \\ &= \sum (-1)^{i(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n} \\ &= D. \quad \square \end{aligned}$$

性质 1.1 表明,对于行列式而言,关于“行”成立的性质,对于“列”也同样成立,反之亦然.

性质 1.2 互换行列式的两行(列),行列式变号.

证 设行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{j1} & b_{j2} & \cdots & b_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$